УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

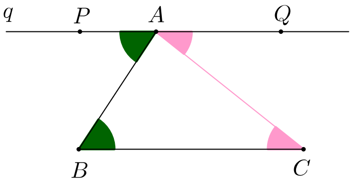
школска 2022/23

6. Збир углова у троуглу, четвороуглу и неједнакост троугла

Познато је од раније да је збир углова у троуглу једнак опруженом углу, чија је мера 180° или π радијана. О томе говори следећа теорема.

Теорема 3.5. Збир углова у троуглу еуклидске равни једнак је опруженом углу.

Доказ. Нека је $\triangle ABC$ произвољан троугао у еуклидској равни.



6. Збир углова у троуглу, четвороуглу и неједнакост троугла

На основу аксиоме паралелности, кроз тачку A постоји јединствена права q паралелна са правом BC.

Нека су P и Q произвољне тачке на правој q такве да важи распоред тачака $\mathcal{B}(P, A, Q)$, односно да је тачка A између тачака P и Q.

Како су углови $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle PAB$ наизменични углови на трансверзали AB паралелних правих q и BC, имамо да је

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PAB.$$

Такође су и углови $\sphericalangle BCA$ и $\sphericalangle CAQ$ наизменични углови на трансверзали AC паралелних правих q и BC, па је

$$\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle CAQ.$$

Помоћу претходних двеју једнакости добијамо да је збир углова у троуглу

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle BAC = \sphericalangle PAB + \sphericalangle CAQ + \sphericalangle BAC = \sphericalangle PAQ.$$

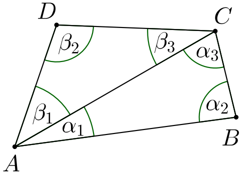
Пошто су тачке P, A и Q колинеарне, угао $\sphericalangle PAQ$ је опружен, чиме је тврђење теореме доказано. $\square$

Следећа теорема је последица Теореме 3.5.

Теорема 3.6. Збир углова у конвексном четвороуглу еуклидске равни једнак је пуном углу.

6. Збир углова у троуглу, четвороуглу и неједнакост троугла

Доказ. Конвексан четвороугао $ABCD$ се дијагоналом AC може разложити на троуглове $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$.



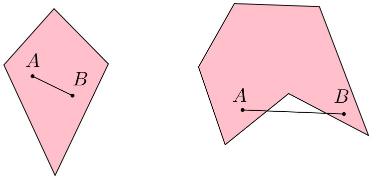
Пошто је збир углова у троугловима $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ једнак опруженом углу, а збир два опружена угла је пун угао, следи да је збир углова у четвороуглу $ABCD$ једнак пуном углу. Његова мера је $360°$. $\square$

6. Збир углова у троуглу, четвороуглу и неједнакост троугла

Претходна теорема се односила на конвексан четвороугао.

Четвороугао је конвексан, ако је његова унутрашњост конвексна фигура. Такве фигуре се уводе на следећи начин.

Дефиниција 6.1. Фигура Φ је конвексна, ако за сваке две тачке A и B те фигуре важи да дуж AB припада тој фигури. У супротном, фигура Φ је неконвексна.



Слика 8. Конвексна и неконвексна фигура

6. Збир углова у троуглу, четвороуглу и неједнакост троугла

Примери конвексних фигура су троугаона површ, раван, полураван, кружна површ, оштар и прав угао, угао мањи од опруженог угла, итд.

Сваки троугао је конвексан, јер је његова унутрашњост конвексна фигура.

Произвољан четвороугао може бити конвексан или неконвексан.

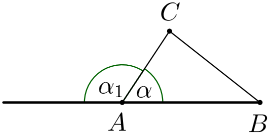
На пример, сваки паралелограм је конвексан четвороугао, а трапез може бити конвексан или неконвексан. Такође и делтоид може бити конвексан или неконвексан.

6. Збир углова у троуглу, четвороуглу и неједнакост троугла

И следећа теорема је последица Теореме 3.5 о збиру углова у троуглу.

Теорема 3.7. Спољашњи угао троугла једнак је збиру два унутрашња угла који му нису суседни.

Доказ. Спољашњи угао α_1 код темена A је напоредан унутрашњем углу α.



Спољашњи угао троугла

6. Збир углова у троуглу, четвороуглу и неједнакост троугла

Пошто су напоредни углови суплементни, имамо да је

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ = \alpha + \beta + \gamma,$$

одакле следи да је

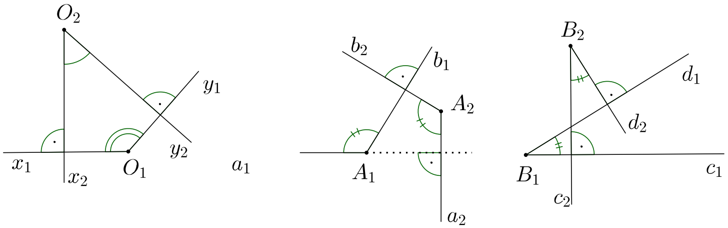
$$\alpha_1 = \beta + \gamma.$$

Слично се доказује да је $\beta_1 = \alpha + \gamma$ и $\gamma_1 = \alpha + \beta$. $\square$

Помоћу Теореме о збиру углова у конвексном четвороуглу, може се доказати теорема која важи за углове са нормалним крацима.

Најпре наводимо њихову дефиницију, а затим теорему о угловима са нормалним крацима (Теорема 3.8.).

Дефиниција 6.3. Углови са нормалним крацима су углови код којих су краци једног угла нормални на краке другог угла, или на праве које садрже те краке.



Слика 79. Углови са нормалним крацима

6. Збир углова у троуглу, четвороуглу и неједнакост троугла

Теорема 3.8. Ако су α и β углови са нормалним крацима у еуклидској равни, тада су они:

(а) подударни, ако су оба оштри, прави или тупи;

(б) суплементни, ако је један оштар а други туп.

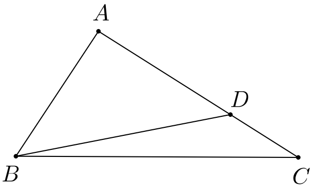
Раније смо напоменули да се помоћу ставова ССУУ и УСУ може се доказати следећа теорема (5. Подударност троуглова и углови на трансверзали).

Теорема 2.23. Наспрам подударних страница у троуглу $\triangle ABC$ налазе се подударни углови и обрнуто.

И следеће три теореме се односе на странице троугла.

Теорема 3.9. Наспрам веће странице у троуглу $\triangle ABC$ налази се већи угао и обрнуто.

Доказ. Претпоставимо најпре да је $AC > AB$. Тада на страници AC постоји тачка D таква да је $AB \cong AD$.



Слика 82

6. Збир углова у троуглу, четвороуглу и неједнакост троугла

Како је троугао $\triangle ABD$ једнакокраки, насправ кракова се налазе подударни углови, па је

$$\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle ADB.$$

Пошто је $\sphericalangle ADB$ спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, на основу Теореме о спољашњем углу имамо да је

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle DCB + \sphericalangle DBC > \sphericalangle DCB.$$

Због распореда тачака $\mathcal{B}(A, D, C)$ полуправа BD са теменом B се налази унутар угла $\sphericalangle ABC$, па је

$$\sphericalangle ABC > \sphericalangle ABD \cong \sphericalangle ADB > \sphericalangle DCB \cong \sphericalangle ACB.$$

6. Збир углова у троуглу, четвороуглу и неједнакост троугла

Како је по претпоставци $AC > AB$ и важи $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB$, следи да се наспрам веће странице у троуглу налази се већи угао.

Обрнуто, претпоставимо да је $\beta > \gamma$. Доказаћемо да је $AC > AB$.

Ако би страница AC била подударна страници AB, тада би на основу Теореме 2.23 следило да је $\beta \cong \gamma$, што је у супротности са претпоставком.

Ако би страница AC била мања од странице AB, тада би на основу доказаног дела теореме следило да је $\beta < \gamma$, што је такође контрадикција. Према томе, $AC > AB$. $\square$

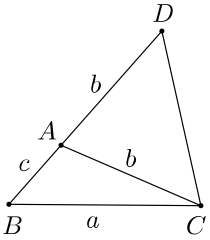
Следећа неједнакост која се односи на странице троугла се зове неједнакост троугла. Она има велику примену у геометрији троугла.

Теорема 3.10 (неједнакост троугла) Збир две странице у троуглу већи је од треће странице, тј.

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad a + c > b.$$

Доказ. Доказаћемо да је у троуглу $\triangle ABC$ збир било које две странице, на пример $b + c$, већи од треће странице a.

У том циљу, уочимо тачку D на правој AB тако да је $AD \cong AC$, при чему важи распоред тачака $\mathcal{B}(B, A, D)$ (тј. тачка A је између тачака B и D).



Слика 83. Неједнакост троугла

Тада је

$$BD \cong AB + AD \cong AB + AC.$$

Пошто је троугао $\triangle ACD$ једнакокраки, имамо да је

$$\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle ACD.$$

Због распореда тачака $\mathcal{B}(B, A, D)$ полуправа CA са теменом C се налази унутар угла $\sphericalangle BCD$, па је

$$\sphericalangle BCD > \sphericalangle ACD \cong \sphericalangle ADC \cong \sphericalangle BDC.$$

Како је угао $\sphericalangle BCD$ (наспрам странице BD) већи од угла $\sphericalangle BDC$ (наспрам странице BC), применом Теореме 3.9 следи да је

$$BD > BC,$$

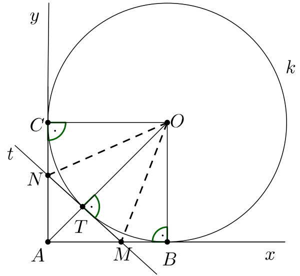
односно $AB + AC > BC$, што је и требало доказати. $\square$

На основу претходне теореме, имамо да је $AB + AC > BC$, одакле је $AB > BC - AC$. Тако добијамо следећу теорему.

Теорема 3.11. Разлика две странице у троуглу мања је од треће странице, тј.

$$a - b < c, \quad b - c < a, \quad c - a < b.$$

Пример 3.6. У прав угао са теменом у тачки A уписан је круг $k(O, r)$ који додирује његове краке Ax и Ay у тачкама B и C редом. Произвољна тангента t круга k у тачки T сече краке Ax и Ay редом у тачкама M и N, при чему је $\mathcal{B}(A, M, B)$. Доказати да је $MB + NC < \dfrac{1}{2}(AB + AC)$.



Решење. Правоугли троуглови $\triangle CNO$ и $\triangle ONT$ су подударни на основу става ССУУ. Из те подударности следи да је $NC \cong NT$, тј. тангентне дужи из тачке N су подударне.

Аналогно, правоугли троуглови $\triangle OTM$ и $\triangle OMB$ су подударни на основу истог става ССУУ. Одавде следи да је $MB \cong MT$, тј. тангентне дужи из тачке M су подударне.

Отуда је

$$MN = MT + TN = MB + NC.$$

Применом неједнакости троугла на троугао $\triangle NAM$, имамо да је

$$AM + AN > MN.$$

Користећи последње две релације, добијамо да је

$$\begin{aligned} AB + AC &= (AM + MB) + (AN + NC) \\ &= (AM + AN) + (MB + NC) \\ &> MN + MN = 2MN = 2(MB + NC), \quad \square \end{aligned}$$

одакле следи да је

$$MB + NC < \frac{1}{2}(AB + AC),$$

што је и требало доказати. $\square$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Доказати да је збир дијагонала AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ већи од збира његових наспрамних страница AB и CD.

2. Ако је тачка E пресек странице BC и симетрале унутрашњег угла α троугла $\triangle ABC$, доказати да је $AB > BE$ и $AC > CE$.

3. Тачка M се налази на симетрали спољашњег угла код темена C троугла $\triangle ABC$. Доказати да је $MA + MB > CA + CB$.

4. Тачка F је произвољна тачка унутар троугла $\triangle ABC$. Доказати да је $AC + BC > AF + BF$.

5. Ако је тачка M унутар троугла $\triangle ABC$ а s његов полуобим, доказати да је $s < AM + BM + CM < 2s$.