ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ - 4. вежбе

1. За $n \in \mathbb{N}$, испитати монотоност и ограниченост низа са општим чланом:

   а) $a_n = \dfrac{2}{3n+1}$; б) $b_n = \dfrac{2n}{n+1}$; в) $c_n = \ln \dfrac{n^2+2}{n^2+1}$; б) $d_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{5n+3}$.

2. Дати су реални низови чији су општи чланови редом:

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1}, \quad b_n = \frac{1}{n-\sqrt{n}}, \quad c_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}, \quad d_n = (-1)^n\sqrt{1+\frac{1}{n}},$$

$$e_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}, \quad f_n = n-\sqrt{n}, \quad g_n = \frac{n^2-10n}{10n+100},$$

$$h_n = \frac{(-2)^n}{n}, \quad k_n = \frac{n^2+6n^3-2n+10}{-4n-9n^3+10^{10}}, \quad l_n = \frac{n+7\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}+3},$$

$$p_n = \frac{n^{100}}{(1,1)^n}, \quad r_n = \frac{n+\sin n}{n}, \quad z_n = \frac{2^n+(-5)^n}{3^n+1}.$$

   Скуп A садржи све дате низове који конвергирају, скуп B садржи све дате низове који одређено дивергирају, а скуп C садржи све дате низове који немају граничну вредност. Одредити скупове A, B и C.

3. Дат је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ где је

$$a_n = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} + \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n + \alpha \sin\frac{n\pi}{2}.$$

   Одредити реални параметар α тако да низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира, а затим одредити $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

4. У зависности од реалног параметра a одредити

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+a^n}{2^{n+1}-5a^n}.$$

5. Доказати да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дат са

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = x_n^2,\ n\in\mathbb{N}$$

   монотон и ограничен, а затим одредити $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

6. Испитати да ли низ

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n},\ n\in\mathbb{N},$$

   има члан који је већи од 100.

7. Одредити, ако постоји

   а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.