

УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

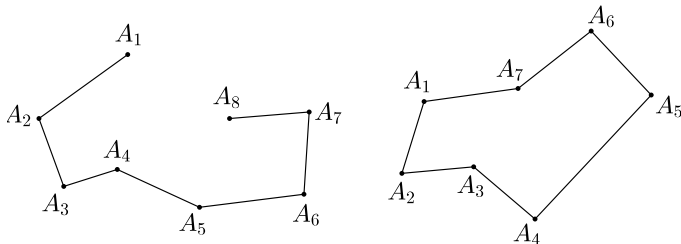
Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Присетимо се да је **полигонска линија** $A_1A_2 \dots A_n$ унија дужи $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, при чему су сваке три узастопне тачке неколинеарне (Дефиниција 2, подударност углова).

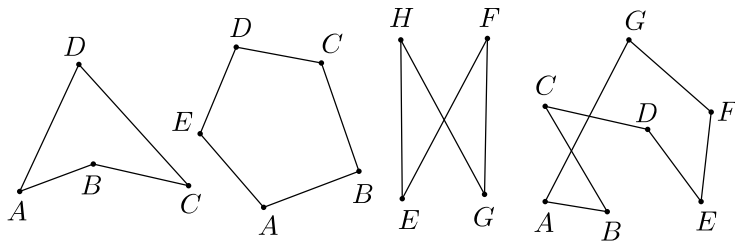
Она је **затворена**, ако се крајње тачке A_1 и A_n поклапају, односно **отворена** ако се те тачке не поклапају.



Слика 88. Отворена и затворена полигонска линија

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Дефиниција 4.1. Полигон (или **многоугао**) је затворена полигонска линија. Полигон који има $n \geq 3$ темена назива се **n -тоугао**.



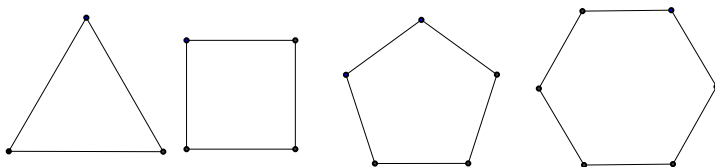
Слика 89. Полигони

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Посебна врста полигона су **правилни полигони**.

Дефиниција 4.2. Полигон (многоугао) је **правилан**, ако су све његове странице и углови једнаки.

Примери **правилних полигона** су једнакостраничан троугао, квадрат, правилан петоугао, правилан шестоугао, итд.



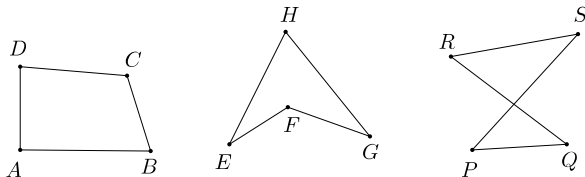
Слика 100. Правилни полигони

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Четвороуглови се могу поделити на **просте** и **сложене**.

Дефиниција 4.3. Четвороугао у еуклидској равни је **прост**, ако његове несуседне странице немају заједничких тачака. У противном, четвороугао је **сложен**.

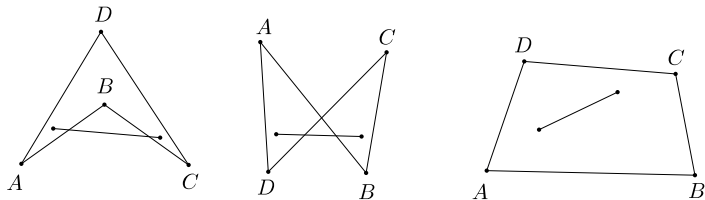
На слици 90 четвороуглови $ABCD$ и $EFGH$ су **прости**, а четвороугао $PQRS$ је **сложен**.



Слика 90. Четвороугао

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Четвороуглови се такође могу поделити на **конвексне** и **неконвексне**, у зависности од тога да ли је њихова унутрашњост **конвексна** или **неконвексна фигура** редом.



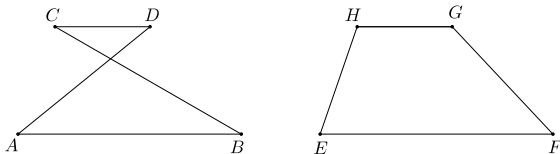
Слика 92. Неконвексан и конвексан четвороугао

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Основне врсте четвороуглова у равни су траpez, паралелограм, ромб, правоугаоник, квадрат и делтоид.

Дефиниција 4.4. Четвороугао $ABCD$ је траpez, ако има један пар паралелних наспрамних страница.

Траpez може бити неконвексан или конвексан. Он такође може бити сложен или прост (слика 93).

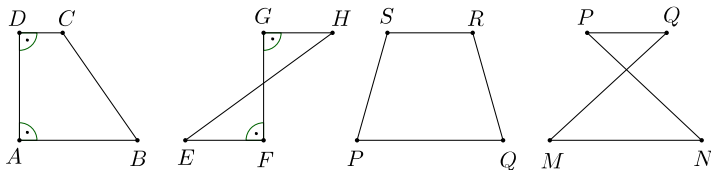


Слика 93. Неконвексан и конвексан траpez

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Паралелне странице трапеза се зову **основице**, а непаралелне странице се зову **краци**.

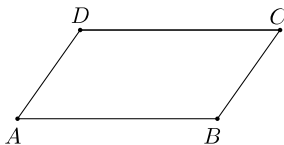
Трапез је **правоугли** ако има два права угла. Трапез је **једнакокраки**, ако има подударне краке.



Слика 94. Правоугли и једнакокраки трапез

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Дефиниција 4.5. Четвороугао $ABCD$ је **паралелограм**, ако има два пара паралелних наспрамних страница.



Слика 96. Паралелограм

Сваки паралелограм је конвексан и прост четвороугао.

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Следећа теорема даје **потребне и довољне услове** да конвексан четвороугао буде паралелограм.

Теорема 4.3. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао у еуклидској равни. Тада су следећи услови еквивалентни:

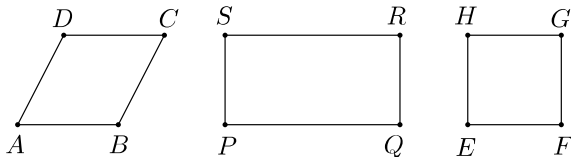
- (1) $ABCD$ је паралелограм;
- (2) суседни углови четвороугла $ABCD$ су суплементни;
- (3) наспрамни углови четвороугла $ABCD$ су подударни;
- (4) $AB = CD$ и $AB \parallel CD$;
- (5) $AB = CD$ и $BC = AD$;
- (6) дијагонале четвороугла $ABCD$ се полове.

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Дефиниција 4.6. Конвексан четвороугао је **ромб**, ако су све његове стране подударне.

Дефиниција 4.7. Конвексан четвороугао је **правоугаоник**, ако су сви његови углови прави.

Дефиниција 4.6. Конвексан четвороугао је **квадрат**, ако су ако су сви његови углови прави и све стране подударне.



Слика 98. Ромб, правоугаоник и квадрат

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Пример. Ако је четвороугао $ABCD$ ромб, доказати да је он паралелограм.

Доказ. Претпоставимо да је четвороугао $ABCD$ ромб. Тада су једнакокраки троуглови $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ подударни на основу става ССС, одакле следи да је

$$\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle BDC \cong \sphericalangle ADB \cong \sphericalangle DBC.$$

Углови $\sphericalangle ABD$ и $\sphericalangle BDC$ су наизменични углови на трансверзали BD и пошто су они подударни, на основу Теореме 3.1 (наслов 5) следи да је $AB \parallel CD$.

Аналогно, углови $\sphericalangle ADB$ и $\sphericalangle DBC$ су наизменични углови на трансверзали BD и пошто су они подударни, на основу Теореме 3.1 (наслов 5) следи да је $BC \parallel AD$.

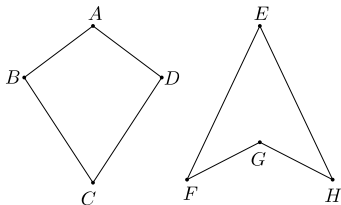
Према томе, ромб $ABCD$ је паралелограм. $\square$

7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Теорема 4.4. Ако је конвексан четвороугао $ABCD$ паралелограм, тада је он:

- (1) ромб, ако су његове дијагонале нормалне;
- (2) правоугаоник, ако су његове дијагонале подударне;
- (3) квадрат, ако су његове дијагонале нормалне и подударне.

Дефиниција 4.7. Четвороугао $ABCD$ је **делтоид**, ако је $AB \cong AD$ и $BC \cong CD$.

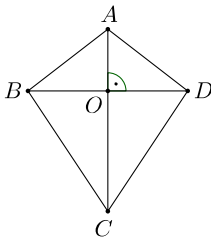


7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Делтоид може бити **конвексан** или **неконвексан**.

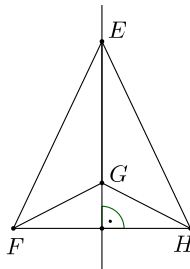
Следеће две теореме дају **потребне и довољне услове** да произвољан четвороугао буде делтоид.

Теорема 4.5. Конвексан четвороугао $ABCD$ је делтоид ако и само ако су његове дијагонале нормалне и једна од њих полови другу.



7. Основне врсте и поделе четвороуглова

Теорема 4.6. Неконвексан четвороугао $EFGH$ је делтоид ако и само ако његове дијагонале припадају нормалним правима и једна од тих правих полови другу дијагоналу (слика 103).



Слика 103

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Доказати да се симетрале углова правоугаоника секу у тачкама које су темена квадрата.
2. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао кога је $AB \cong BC \cong CD$ и $AC \perp BD$. Доказати да је $ABCD$ ромб.
3. Доказати Теорему 4.4.
4. Симетрала тупог угла паралелограма сече једну његову страницу под углом који је подударан оштром углу паралелограма. Израчунати углове тог паралелограма.
5. Нормала из једног темена правоугаоника $ABCD$ на дијагоналу дели дијагоналу у односу $1 : 3$. Израчунати угао под којим се секу дијагонале правоугаоника.