УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

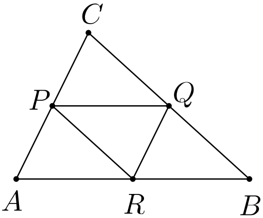
школска 2022/23

8. Средња линија троугла и трапеза

Средња линија троугла има важну улогу у геометрији троугла.

Дефиниција 4.10. Средња линија троугла је дуж чије су крајње тачке средишта двеју страница.

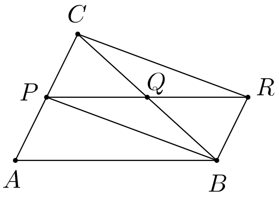
Сваки троугао има три средње линије. Средња линија PQ одговара страници AB (налази се наспрам AB), средња линија QR одговара страници AC, а средња линија PR одговара страници BC.



Теорема 4.7. Ако је PQ средња линија која одговара страници AB, тада је

$$PQ \,||\, AB, \quad PQ = \frac{1}{2}AB.$$

Доказ. Нека је P средиште странице AC и Q средиште странице BC троугла $\triangle ABC$.



Слика 105

8. Средња линија троугла и трапеза

Означимо са R тачку на правој PQ, такву да је $PQ \cong QR$, при чему важи распоред тачака $\mathcal{B}(P, Q, R)$.

Дијагонале BC и PR четвороугла $CPBR$ се полове, па је на основу Теореме 4.3 тај четвороугао паралелограм.

Отуда је $CP \cong BR$ и $CP||BR$. Како је $AP \cong PC$ и $CP \cong BR$, следи да је $AP \cong BR$. Сада је четвороугао $ABRP$ паралелограм на основу Теореме 4.3, јер има пар подударних и паралелних страница AP и BR.

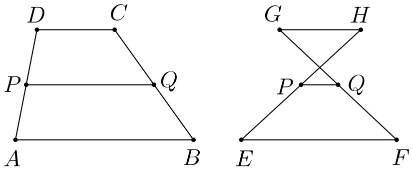
Одавде следи да је и други пар његових страница паралелан и подударан, па је $AB \cong PR$ и $AB \,||\, PR$.

Како је $PR = 2PQ$ и $AB \cong PR$, закључујемо да је $PQ = \frac{1}{2}AB$. С обзиром да дуж PQ припада правој PR и $PR \,||\, AB$, следи да је $PQ||AB$. $\square$

8. Средња линија троугла и трапеза

Дефиниција 4.11. Средња линија трапеза је дуж чије су крајње тачке средишта кракова.

Сваки конвексан трапез има средњу линију. Неконвексан трапез има средњу линију, ако његове основице нису истих дужина (слика 107). Ако су основице неконвексног трапеза истих дужина, средња линија не постоји.



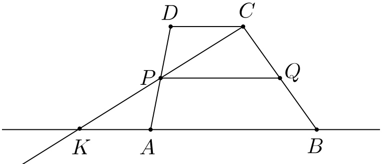
Слика 107. Средња линија конвексног и неконвексног трапеза

8. Средња линија троугла и трапеза

Теорема 4.8. Ако је PQ средња линија конвексног трапеза $ABCD$ са основицама AB и CD, тада је

$$PQ \,||\, AB, \qquad PQ = \frac{1}{2}(AB + CD).$$

Доказ. Нека је PQ средња линија конвексног трапеза $ABCD$, при чему су P и Q средишта кракова AD и BC редом. Претпоставимо да права CP сече праву AB у тачки Kтаквој да важи распоред тачака $\mathcal{B}(K, A, B)$ (тј. тачка A је између тачака K и B).



Пошто је $AP \cong PD$, $\sphericalangle KPA \cong \sphericalangle DPC$ (унакрсни углови) и $\sphericalangle KAP \cong \sphericalangle PDC$ (наизменични углови на трансверзали AD), на основу става УСУ следи да је

$$\triangle KAP \cong \triangle PCD.$$

Одавде је $KP \cong CP$ и $AK \cong CD$. Како је $KP \cong CP$ и $CQ \cong BQ$, дуж PQ је средња линија троугла $\triangle CKB$.

На основу претходне теореме 4.7, следи да је

$$PQ = \frac{1}{2}KB, \qquad PQ||KB.$$

Како је $KB = KA + AB = CD + AB$, а права KB се поклапа са правом AB, добијамо да је $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$ и $PQ \,||\, AB$, што је и требало доказати. $\square$

8. Средња линија троугла и трапеза

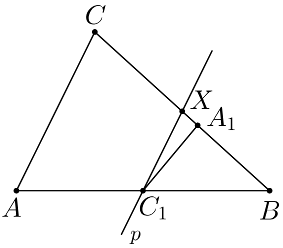
Теорема 4.9. Ако је PQ средња линија неконвексног трапеза $ABCD$ са основицама AB и CD, при чему је $AB > CD$, тада је

$$PQ||AB, \qquad PQ = \frac{1}{2}(AB - CD).$$

Доказ је аналоган доказу претходне теореме (доказати теорему 4.9 за вежбу).

Пример 4.1. Доказати да права p која садржи средиште C_1 странице AB троугла $\triangle ABC$ и паралелна је страници AC, полови страницу BC.

Решење. Претпоставимо да права p садржи средиште C_1 странице AB троугла $\triangle ABC$ и паралелна је страници AC. Нека права p сече страницу BC у тачки X. Тада је $XC_1||AC$.



Слика 87

Означимо са A_1 средиште странице BC. Тада је A_1C_1 средња линија троугла ABC, па је на основу теореме 4.8, $AC||A_1C_1$.

8. Средња линија троугла и трапеза

Како је $XC_1 || AC$ и $A_1C_1 || AC$, а на основу аксиоме паралелности кроз тачку C_1 постоји само једна права паралелна са правом AC, следи да се праве праве A_1C_1 и XC_1 поклапају.

Зато се тачке X и A_1 поклапају. Дакле, тачка X је средиште странице BC. $\square$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Доказати да су средишта страница произвољног конвексног четвороугла темена паралелограма.

2. Доказати да средишта страница једнакокраког конвексног трапеза представљају темена ромба.

3. Дијагонале конвексног трапеза $ABCD$ секу средњу линију MN тог трапеза у тачкама P и Q, тако да је $MP + QN = PQ$. Наћи однос основица трапеза.