УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

9. Значајне тачке троугла

Значајне тачке троугла које се уводе у основној школи су центар описаног круга, центар уписаног круга, ортоцентар и тежиште.

Постоје и друге значајне тачке троугла - Фермаова[1], Наполеонова[2], Жергонова[3], Брокарова[4], Нагелова[5], Микелова[6], Фојербахова[7], итд.

---

[1] П. де Ферма, француски математичар, 17. век
[2] Наполеон Бонапарта, француски војсковођа, 18. век
[3] Ј. Д. Жергон, француски математичар, 19. век
[4] А. Брокар, француски математичар, 19. век
[5] К. Х. фон Нагел, немачки математичар, 19. век
[6] А. Микел, француски математичар, 19. век
[7] К. В. Фојербах, немачки математичар, 19. век

Да бисмо дефинисали центар описаног круга и центар уписаног круга троугла, присетимо се дефиниције круга.

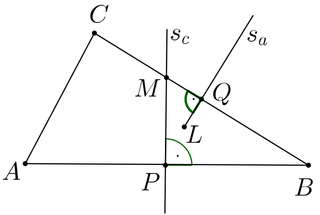
Дефиниција 5.1. Круг $k(O, r)$ са центром у тачки O и полупречника $r \in \mathbb{R}^+$ у еуклидској равни је скуп тачака X таквих да је $OX \cong r$.

Најпре ћемо доказати да се све три симетрале страница троугла секу у истој тачки.

Теорема 5.1. Симетрале страница троугла секу се у истој тачки.

Доказ. Означимо са s_c, s_a и s_b симетрале страница AB, BC и AC редом троугла $\triangle ABC$. Нека је симетрала s_c нормална на страницу AB у тачки P и нека она сече страницу BC у тачки M. Нека је симетрала s_a нормална на страницу BC у тачки Q и нека је L њена произвољна тачка, таква да су P и L са исте стране праве BC.

9. Значајне тачке троугла

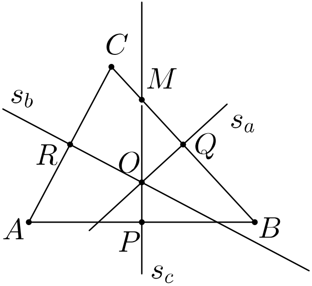


Ако би симетрале s_a и s_c биле паралелне, тада би супротни углови $\sphericalangle PMQ$ и $\sphericalangle MQL$ на трансверзали BC били суплементни. Како је угао $\sphericalangle MQL$ прав, следило би да је и угао $\sphericalangle PMQ$ прав. Тада би збир углова у троуглу $\triangle PBM$ био већи од 180°, што је немогуће.

9. Значајне тачке троугла

Зато се симетрале s_a и s_c секу у некој тачки O.

Пошто тачка O припада симетрали s_c, следи да је $OA \cong OB$. Такође, пошто $O \in s_a$ следи да је $OB \cong OC$. Одавде налазимо да је $OA \cong OC$, што значи да $O \in s_b$. Дакле, све три симетрале се секу у истој тачки O. $\square$

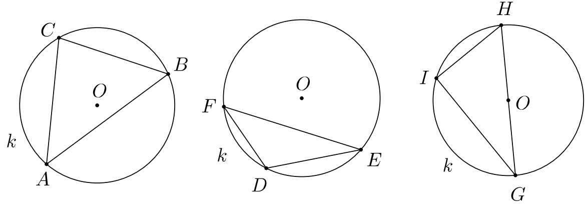


9. Значајне тачке троугла

Дефиниција 5.2. Пресечна тачка симетрала страница троугла назива се центар описаног круга.

Пресечна тачка O симетрала страница има особину да је $OA \cong OB \cong OC$. То значи да су темена троугла $\triangle ABC$ подједнако удаљена до тачке O. Дакле, та темена припадају неком кругу са центром у тачки O.

Дефиниција 5.3. Круг са центром у тачки O, који садржи сва темена троугла, назива се описани круг троугла.

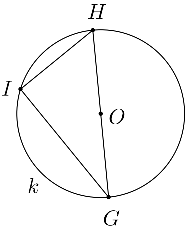


9. Значајне тачке троугла

Код оштроуглог троугла, тачка O је унутар троугла.

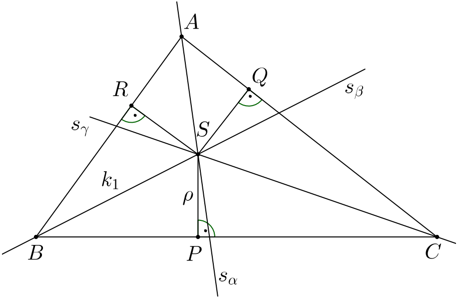
Код тупоуглог троугла, тачка O је изван троугла. Код правоуглог троугла тачка O је на хипотенузи. Наиме, за правоугли троугао важи следећа теорема.

Теорема 5.2. Тачка O је центар описаног круга правоуглог троугла ако и само ако се поклапа са средиштем његове хипотенузе.



Може се доказати да се све три симетрале углова троугла секу у истој тачки.

Теорема 5.3. Симетрале углова троугла секу се у истој тачки.



Дефиниција 5.4. Пресечна тачка симетрала углова троугла назива се центар уписаног круга.

Ако је S пресечна тачка симетрала углова, тада је (слика 116)

$$SP \cong SQ,$$

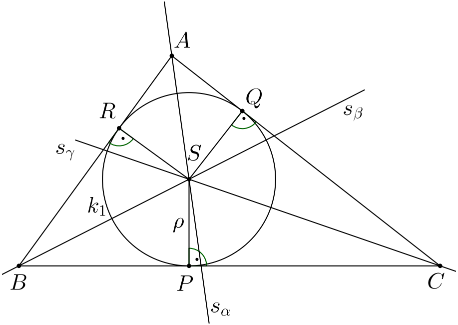
јер је тачка S подједнако удаљена од кракова угла γ (видети Пример 2.5, Наслов 5-подударност троуглова). Такође је

$$SQ \cong SR,$$

јер је тачка S подједнако удаљена од кракова угла α.

Дакле, тачке P, Q и R су подједнако удаљене од тачке S. То значи да оне припадају неком кругу са центром у тачки S.

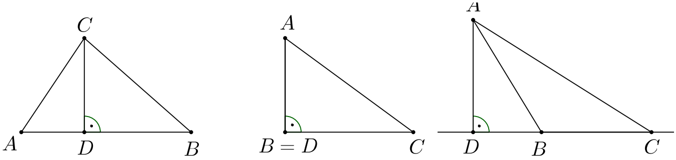
Дефиниција 5.5. Круг са центром у тачки S, који додирује све странице троугла, назива се упсани круг троугла.



Слика 116

9. Значајне тачке троугла

Висина троугла је дуж одређена теменом троугла и нормалном пројекцијом темена на наспрамној страници. Нормална пројекција темена зове се подножје висине.

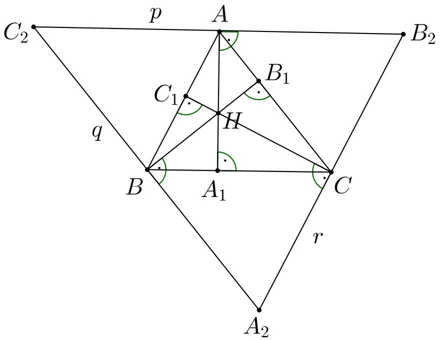


Слика 118. Подножје висине

Да бисмо дефинисали ортоцентар, доказаћемо следећу теорему.

Теорема 5.6. Праве које садрже висине троугла секу се у истој тачки.

Доказ. Означимо са p, q и r праве које су у теменима A, B и C нормалне на висине AA_1, BB_1 и CC_1 редом троугла $\triangle ABC$.



9. Значајне тачке троугла

Тада је $p \,||\, BC$, $q \,||\, AC$ и $r \,||\, AB$, јер су супротни углови на трансверзалама AA_1, BB_1 и CC_1 прави, тј. суплементни.

Ако би праве p и q биле паралелне, како је $p \,||\, BC$, $q \,||\, AC$, следило би да је $BC \,||AC$ што је немогуће. Зато се праве p и q секу у некој тачки C_2.

Аналогно следи да се праве p и r секу у тачки B_2, а праве q и r у тачки A_2.

Тада је четвороугао $BCAC_2$ паралелограм, јер је $BC \,||\, C_2A$ и $AC \,||\, C_2B$. Како су наспрамне странице паралелограма подударне, имамо да је $BC \cong C_2A$.

На исти начин закључујемо да је BCB_2A паралелограм, одакле следи да је $BC \cong AB_2$. Како је $BC \cong C_2A$ и $BC \cong AB_2$, имамо да је $C_2A \cong AB_2$. Дакле, тачка A је средиште дужи C_2B_2.

Истим поступком се може доказати да су и тачке B и C средишта дужи C_2A_2 и A_2B_2 редом.

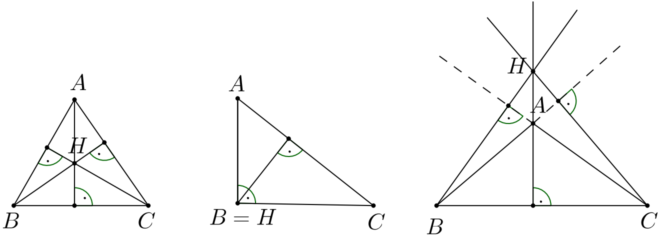
Сада имамо да праве AA_1, BB_1 и CC_1 садрже средишта дужи C_2B_2, C_2A_2 и A_2B_2 редом и нормалне су на те дужи.

Према томе, праве AA_1, BB_1 и CC_1 су симетрале страница троугла $\triangle A_2B_2C_2$.

Пошто се на основу теореме 5.1 симетрале страница секу у истој тачки, следи да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 које садрже висине секу у истој тачки, што је и требало доказати. $\square$

Дефиниција 5.6. Пресечна тачка правих које садрже висине назива се ортоцентар.

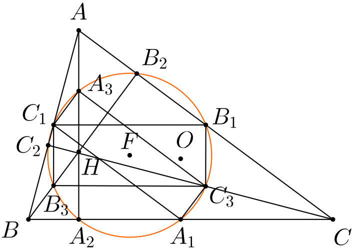
Ортоцентар се налази унутар троугла, ако је троугао оштроугли. Код правоуглог троугла, ортоцентар се поклапа са теменом правог угла. Ортоцентар се налази изван троугла, ако је троугао тупоугли.



Слика 120. Ортоцентар

Следећа теорема говори о кругу девет тачака, који се такође назива Ојлеров круг или Фојербахов круг.

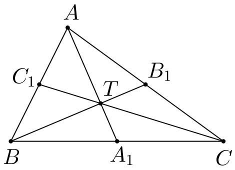
Теорема 5.7. Средишта страница, подножја висина и средишта дужи које су одређене ортоцентром и теменом троугла, припадају истом кругу (кругу девет тачака).



Слика 122. Круг девет тачака

Тежишна дуж (медијана) троугла је дуж одређена теменом троугла и средиштем наспрамне странице.

Теорема 5.8. Тежишне дужи троугла секу се у истој тачки T која их дели у односу $2:1$.



Слика 122. Тежиште

Дефиниција 5.7. Пресечна тачка тежишних дужи назива се тежиште.

9. Значајне тачке троугла

За правоугли троугао имамо интересантну особину.

Теорема 5.9. Тежишна дуж која одговара хипотенузи једнака је половини хипотенузе.

Доказ теореме 5.9 за вежбу (Упутство: уочити средиште једне од катета, па искористи особину средње линије троугла).

Код једнакостраничног троугла, све четири значајне тачке се поклапају, јер се симетрале страница поклапају са симетралама углова, и оне садрже одговарајуће висине и тежишне дужи.

Код једнакокраког троугла, све четири значајне тачке су колинеарне, јер се симетрала основице поклапа са симетралом угла при врху и садржи тежишну дуж и висину које одговарају основици.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Доказати да два подударна троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ имају подударне:
(а) одговарајуће висине;
(б) одговарајуће тежишне дужи.
2. Ако троугао има подударне две тежишне дужи, онда је он једнакокраки. Доказати.
3. Доказати да су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подударни, ако је $c \cong c_1$, $h_c \cong h_{c_1}$ и $t_c \cong t_{c_1}$.
4. Доказати да се симетрала правог угла у темену A правоуглог троугла $\triangle ABC$ поклапа са симетралом угла између висине и тежишне дужи које одговарају хипотенузи.
5. Одредити углове правоуглог троугла $\triangle ABC$, ако је угао између висине и тежишне дужи које одговарају хипотенузи једнак 20°.