

УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

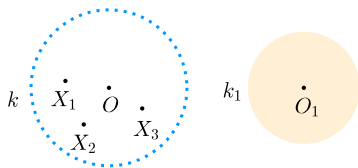
10. Круг у еуклидској равни

Све тачке у еуклидској равни које не припадају кругу $k(O, r)$, можемо поделити на **унутрашње** и **спољашње**.

Тачка X је **унутрашња тачка круга** $k(O, r)$, ако је $OX < r$.

Тачка X је **спољашња тачка круга** $k(O, r)$, ако је $OX > r$.

Дефиниција 6.1. Скуп свих унутрашњих тачака круга $k(O, r)$ назива се **отворена кружна површ**.



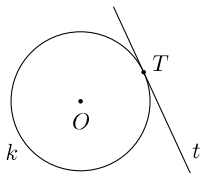
Слика 126. Отворена и затворена кружна површ

10. Круг у еуклидској равни

Дефиниција 6.2. Унија круга $k(O, r)$ и отворене кружне површи назива се **затворена кружна површ**.

Права и круг који припадају истој равни могу имати **ниједну, једну, или две заједничке тачке**.

Дефиниција 6.4. Права која има једну заједничку тачку са кругом назива се **тангента**.



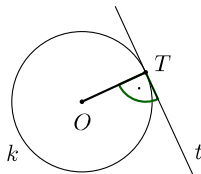
Слика 56. Тангента

10. Круг у еуклидској равни

Ако је нека права **тангента круга**, каже се да она **додирује круг**.
Заједничка тачка тангенте и круга се зове **додирна тачка**.

Следећа теорема даје потребан и довољан услов да права буде тангента круга.

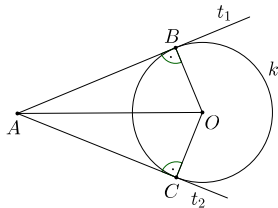
Теорема 2.24. Права t је тангента круга $k(O, r)$ у тачки $T \in k(O, r)$ ако и само ако је нормална на његов полупречник OT .



Тангента

10. Круг у еуклидској равни

Ако је дата тачка A изван круга, тада постоје **две тангенте** из тачке A на круг.



Слика 59. Тангентне дужи

Дужи AB и AC које припадају тангентама, називају се **тангентне дужи** (слика 59).

10. Круг у еуклидској равни

Како је $OA \cong OA$, $OB \cong OC \cong r$, $\sphericalangle ABO = \sphericalangle ACO = 90^\circ$ и углови наспрам OB и OC оштри, применом става подударности ССУУ, следи да је $\triangle ACO \cong \triangle AOB$, одакле је $AB \cong AC$. Тиме је доказана следећа теорема.

Теорема 2.25. Тангентне дужи из дате тачке на дати круг су подударне.

Два круга могу имати заједничке тангенте, а и не морају, што зависи од њиховог међусобног положаја.

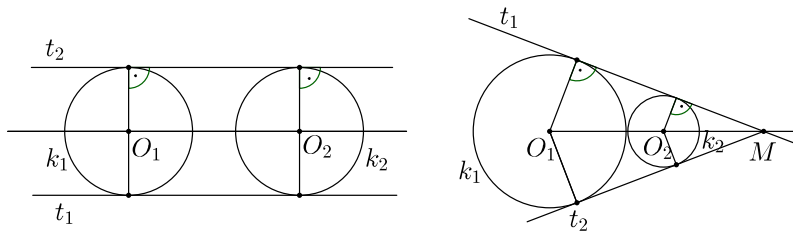
Дефиниција 6.5. Права t је заједничка тангента кругова $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, ако са круговима $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ има по једну заједничку тачку.

Ако је права t заједничка тангента кругова $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, тада она додирује оба круга и нормална је на полупречнике тих кругова у тачкама додир.

10. Круг у еуклидској равни

Заједничке тангенте два круга могу бити **спољашње** или **унутрашње**.

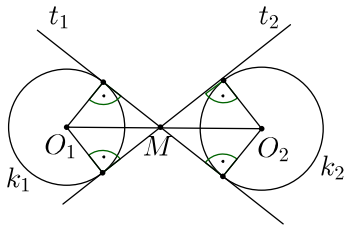
Заједничке спољашње тангенте кругова $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ су паралелне правој O_1O_2 , или се секу на правој O_1O_2 у некој тачки M која не припада дужи O_1O_2 .



Слика 127. Заједничке спољашње тангенте

10. Круг у еуклидској равни

Заједничке унутрашње тангенте кругова $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се секу на правој O_1O_2 у некој тачки M која припада дужи O_1O_2 (слика 128).

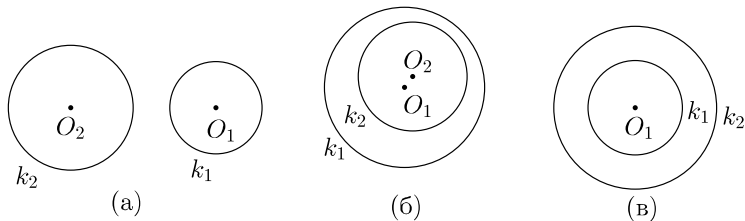


Слика 128. Заједничке унутрашње тангенте

10. Круг у еуклидској равни

Два круга $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ у равни могу имати један од следећих положаја:

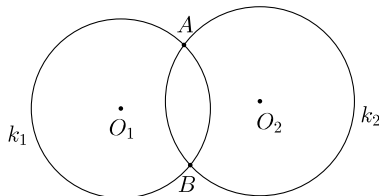
(1) могу бити **дисјунктни** (тј. не секу се). Тада се сваки од њих не налази унутар другог круга, или се један од њих налази унутар другог круга. Ако им се центри поклапају, они се називају **концентрични кругови** (слика 129).



Слика 129. Дисјунктни кругови

10. Круг у еуклидској равни

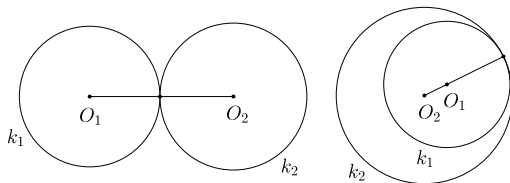
(2) могу да се **секу** (слика 130). Тада они имају две заједничке спољашње тангенте, а заједничке унутрашње тангенте не постоје.



Слика 130. Кругови који се секу

10. Круг у еуклидској равни

(3) могу да се **додирују** споља или изнутра.



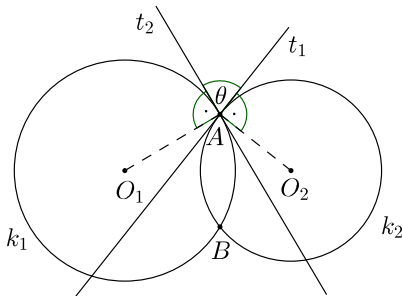
Слика 131. Кругови који се додирују споља или изнутра

Кругови се **додирују споља**, ако имају само једну заједничку тачку и ако се сваки од њих не налази унутар другог круга. Кругови се **додирују изнутра**, ако имају само једну заједничку тачку и ако се један од њих налази унутар другог круга.

10. Круг у еуклидској равни

Ако се произвољни кругови секу, можемо посматрати **угао између тих кругова**, односно угао под којим један круг сече други круг.

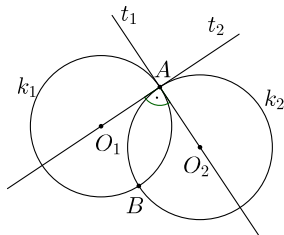
Дефиниција 6.6. Угао између кругова $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ који се секу, је угао између њихових тангенти у тачки пресека.



Слика 133. Угао између два круга

10. Круг у еуклидској равни

У специјалном случају, ако се тангенте у тачки пресека два круга секу под правим углом, тада се и ти кругови секу под правим углом. За такве кругове се каже да су **нормални** (ортогонални, управни).

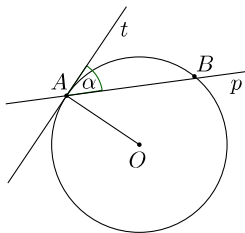


Слика 134. Нормални кругови

10. Круг у еуклидској равни

Ако произвољна права сече круг, можемо посматрати **угао између праве и круга**, односно угао под којим права сече круг.

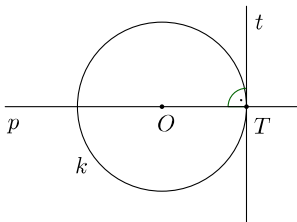
Дефиниција 6.8. Угао између праве и круга који се секу, је угао између праве и тангенте круга у тачки пресека.



Слика 135. Угао између праве и круга

10. Круг у еуклидској равни

У специјалном случају, ако права садржи центар круга и сече круг у некој тачки T , тада је она нормална на тангенту у тачки T . Пошто је права нормална на тангенту, каже се да су тада права и круг **међусобно нормални**.



Слика 136. Нормалност праве и круга

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. На тангенти круга k у тачки A дате тачке B и C тако да је $B(A, B, C)$. Из тачака B и C повучене су тангенте BD и CE на исти круг, при чему су D и E додирне тачке. Доказати да су углови $\sphericalangle BOC$ и $\sphericalangle DAE$ подударни или суплементни.
2. Дата је дуж AB и њено средиште O . У тачкама A и B повучене су нормале p и q редом на ту дуж, а из тачке O су повучене две међусобно нормалне полуправе које секу p и q редом у тачкама C и D . Доказати да је права CD тангента круга пречника AB .
3. Дате су тангентне дужи AP и AQ круга k . Нека је M произвољна тачка на кругу тако да су M и A са исте стране праве PQ . Кроз тачку M је повучена тангента на круг k која сече праве AP и AQ редом у тачкама B и C . Доказати да је обим троугла $\triangle ABC$ једнак $2AP$.