УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

12. Тетивни и тангентни четвороуглови

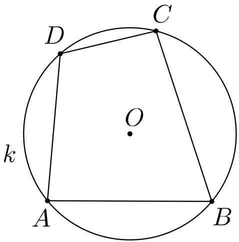
Тетивни и тангентни четвороуглови су посебни четвороуглови који су дефинисани у односу на круг.

Постоје четвороуглови који нису ни тетивни ни тангентни, као што су на пример паралелограм и произвољан неједнакокраки трапез.

С друге стране, постоје и тетивно-тангентни четвороуглови који су истовремено тетивни и тангентни.

12. Тетивни и тангентни четвороуглови

Дефиниција 7.1. Конвексан четвороугао око кога се може описати круг назива се тетиван четвороугао.



Слика 156. Тетиван четвороугао

Странице таквог четвороугла су тетиве круга, па отуда назив тетиван четвороугао.

12. Тетивни и тангентни четвороуглови

Следећа теорема даје једноставне критеријуме помоћу којих се може утврдити да ли је четвороугао тетиван.

Теорема 7.1. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Тада важе следећа тврђења:

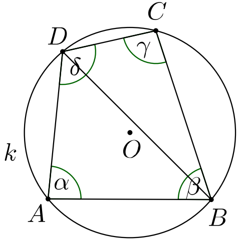
(1) наспрамни углови су суплементни, тј. $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$;

(2) симетрале било које три странице се секу у истој тачки;

(3) свака страница се из преостала два темена види под подударним угловима.

Обрнуто, ако је $ABCD$ конвексан четвороугао и важи једно од тврђења (1), (2) или (3), тада је четвороугао $ABCD$ тетиван.

Доказ. Претпоставимо да је $ABCD$ тетиван четвороугао. Тада се око њега може описати круг $k(O, r)$ (слика 157). Углови α и γ (односно β и δ) су суплементни на основу Теореме 6.4, јер се њихова темена налазе са различитих страна тетиве BD (односно AC). Тиме је доказано тврђење (1).



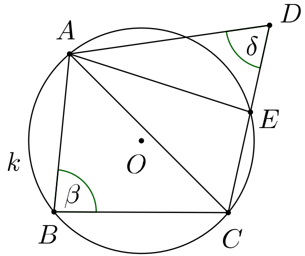
Слика 157

Како је $OA \cong OB \cong r$, тачка O је на симетрали странице AB. Слично, како је $OB \cong OC \cong r$ и $OC \cong OD \cong r$, тачка O је на симетралама страница BC и CD редом.

Отуда се симетрале станица AB, BC и CD секу у тачки O, што доказује тврђење (2).
Како су $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ADB$ периферијски углови над тетивом AB чија су темена са исте стране тетиве AB, помоћу Теореме 6.4 закључујемо да је $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle ADB$ (слика 157). Отуда се страница AB види под подударним угловима из темена C и C. Исти закључак важи и за преостале странице, чиме је доказано тврђење (3).

15. Тетивни и тангентни четвороуглови

Обрнуто, претпоставимо да важи тврђење (1), тј. нека су наспрамни углови конвексног четвороугла $ABCD$ суплементни. Означимо са k круг описан око троугла $\triangle ABC$. Претпоставимо да је теме D изван круга k. Означимо са E другу пресечну тачку круга k и праве CD (слика 158).



Слика 158

Тада су углови $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle AEC$ суплементни на основу теореме о периферијским угловима над истом тетивом.

Помоћу релација $\beta + \delta = 180^\circ$ и $\beta + \sphericalangle AEC = 180^\circ$, налазимо да је $\delta = \sphericalangle AEC$.

Међутим, то је немогуће јер је спољашњи угао $\sphericalangle AEC$ троугла $\triangle ADE$ већи од његовог унутрашњег угла δ. Отуда теме D није изван круга k.

Ако је теме D унутар круга k, такође се добија контрадикција. Одавде следи да је теме D на кругу k, па је $ABCD$ тетиван четвороугао.

Ако важе тврђења (2) и (3), доказ тече аналогно. $\square$

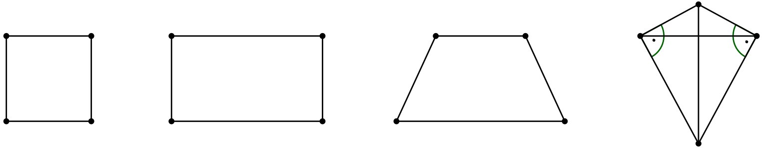
Примери тетивних четвороуглова су:

(а) квадрат;

(б) правоугаоник;

(в) конвексан једнакокраки трапез;

(г) конвексан правоугли делтоид.

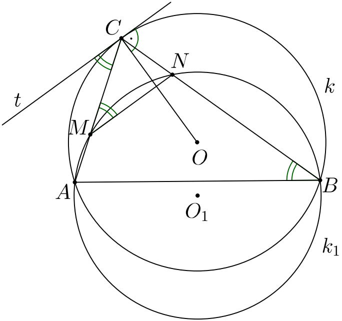


Слика 159. Тетивни четвороуглови

Пример 7.1. Дат је троугао $\triangle ABC$ и произвољан круг $k_1(O_1, r_1)$ који садржи темена A и B и сече странице AC и BC редом у тачкама M и N. Доказати да је тетива MN паралелна тангенти описаног круга $k(O, r)$ троугла $\triangle ABC$ у тачки C.

Решење. Претпоставимо да круг $k_1(O_1, r_1)$ који садржи темена A и B троугла $\triangle ABC$ сече странице AC и BC редом у тачкама M и N.

Тада је $ABNM$ тетиван четвороугао.



Слика 161

На основу претходне теореме, његови наспрамни углови су суплементни.

Отуда је $\sphericalangle AMN + \sphericalangle ABN = 180^\circ$.

Углови $\sphericalangle AMN$ и $\sphericalangle CMN$ су напоредни (јер имају заједнички крак, а друга два крака припадају истој правој), а тиме и суплементни, па је $\sphericalangle AMN + \sphericalangle CMN = 180^\circ$.

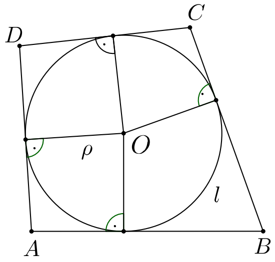
На основу претходне две једнакости добијамо
$\sphericalangle CMN = \sphericalangle ABN$ (слика 161).

Пошто је $\sphericalangle ABC$ периферијски угао над тетивом AC, помоћу Теореме 6.5 закључујемо да је $\sphericalangle tCA \cong \sphericalangle ABC$.

Користећи релације $\sphericalangle CMN = \sphericalangle ABN$, $\sphericalangle ABN \cong \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle tCA \cong \sphericalangle ABC$ добијамо да је $\sphericalangle tCA \cong \sphericalangle CMN$. С обзиром да су ови углови подударни као наизменични углови на трансверзали AC, следи да је $t \,||\, MN$, што је и требало доказати. $\square$

12. Тетивни и тангентни четвороуглови

Дефиниција 7.2. Конвексан четвороугао у који се може уписати круг назива се тангентан четвороугао.



Слика 162. Тангентан четвороугао

Странице таквог четвороугла припадају тангентама круга, па отуда назив тангентан четвороугао. Следећа теорема даје једноставне критеријуме помоћу којих се може одредити да ли је конвексан четвороугао тангентан.

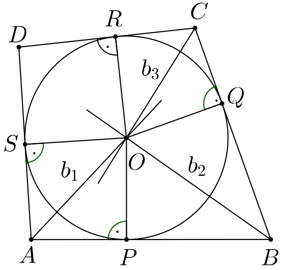
Теорема 7.2. Нека је $ABCD$ тангентан четвороугао. Тада важе следећа тврђења:

(1) збирови наспрамних страница су једнаки, тј. $AB + CD = BC + AD$;

(2) симетрале било која три угла секу се у истој тачки.

Обрнуто, ако је $ABCD$ конвексан четвороугао и важи тврђење (1) или (2), тада је четвороугао $ABCD$ тангентан.

Доказ. Претпоставимо да је $ABCD$ тангентан четвороугао. Тада постоји круг $l(O, \rho)$ који додирује његове странице AB, BC, CD и AD редом у тачкама P, Q, R и S (слика 163).



Слика 163

Како су тангентне дужи повучене из дате тачке на дати круг су подударне, имамо да је

$$AP \cong AS, \quad BP \cong BQ, \quad CQ \cong CR, \quad DR \cong DS,$$

па је

$$\begin{aligned} AB + CD &= (AP + BP) + (CR + DR) \\ &= (AS + BQ) + (CQ + DS) \\ &= (AS + DS) + (BQ + CQ) = AD + BC, \end{aligned}$$

чиме је доказано тврђење (1).

Круг $l(O, \rho)$ додирује све странице четвороугла $ABCD$ у тачкама P, Q, R и S, па је (слика 163)

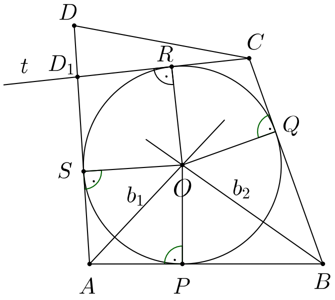
$$OP \cong OQ \cong OR \cong OS \cong \rho.$$

Како је $OP \cong OS$, тачка O је на симетрали угла $\sphericalangle DAB$.

Слично, како је $OP \cong OQ$ и $OQ \cong OR$, тачка O је на симетралама углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BCD$ редом.

Отуда се симетрале унутрашњих углова $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BCD$ секу у истој тачки O. Исту особину имају и симетрале три произвољна унутрашња угла, чиме је доказано тврђење (2).

Обрнуто, претпоставимо да важи тврђење (1). Нека су b_1 и b_2 симетрале углова код темена A и B (слика 164).



Слика 164

Ако би симетрале b_1 и b_2 биле паралелне, тада би супротни углови на њиховој трансверзали AB били суплементни. То би даље значило да је збир унутрашњих углова у теменима A и B четвороугла $ABCD$ једнак 360°, што је немогуће.

Зато се симетрале b_1 и b_2 секу у некој тачки O која је подједнако удаљена од страница AD, AB и BC.

Одавде следи да постоји круг $l(O, \rho)$ који додирује странице AD, AB и BC редом у тачкама S, P и Q. Доказаћемо да тај круг додирује и четврту страницу CD.

Нека је t друга тангента из темена C на круг l, која га додирује у тачки R. Ако је $t||AD$, користећи претпоставку $AB + CD = BC + AD$ добија се контрадикција.

Отуда тангента t сече праву AD у некој тачки D_1. Претпоставимо да важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, D_1, D)$.

Тада је четвороугао $ABCD_1$ тангентан, па према доказаном делу теореме важи $AB + CD_1 = BC + AD_1$. Одузимањем једнакости $AB + CD = BC + AD$ и $AB + CD_1 = BC + AD_1$ налазимо да је $CD - CD_1 = AD - AD_1$. Како је $AD - AD_1 = DD_1$, користећи последње две једнакости добијамо да у троуглу $\triangle CDD_1$ важи $CD - CD_1 = DD_1$, што није могуће због неједнакости троугла.

Према томе, не важи распоред тачкака $\mathcal{B}(A, D_1, D)$. Аналогно се може доказати да не важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, D, D_1)$, па следи да је $D = D_1$. Отуда тачка D припада тангенти t из тачке C на круг l. То значи да круг l додирује и четврту страницу CD, па је $ABCD$ тангентан четвороугао.

Претпоставимо сада да важи тврђење (2), тј. нека се симетрале углова $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle ADC$ конвексног четвороугла $ABCD$ секу у тачки O.

Означимо са P, Q, R и S нормалне пројекције тачке O на краке AB, BC, CD и AD тих углова редом.

Тада је $OP \cong OQ \cong OR \cong OS$ због подударности одговарајућих троуглова. Ако је $OP \cong \rho$, круг $l(O, \rho)$ додирује све странице четвороугла $ABCD$, па на основу Дефиниције 7.2 следи да је четвороугао $ABCD$ тангентан. $\square$

12. Тетивни и тангентни четвороугао

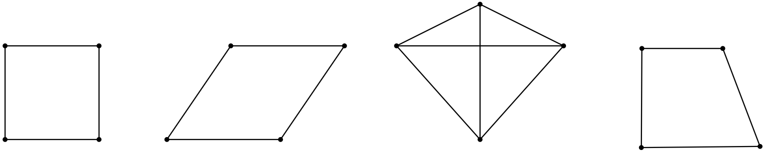
Примери тангентних четвороуглова су:

(а) квадрат;

(б) ромб;

(в) конвексан делтоид;

(г) конвексан трапез $ABCD$ који испуњава услов $AB + CD = BC + AD$.



Слика 165. Тангентни четвороуглови

12. Тетивни и тангентни четвороуглови

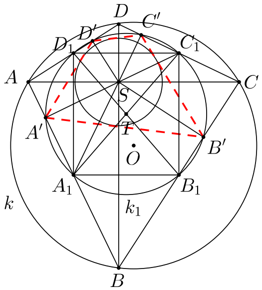
Тетивно-тангентан четвороугао је конвексан четвороугао који је истовремено тетиван и тангентан. Он се такође назива бицентрични четвороугао.

Дефиниција 7.3. Конвексан четвороугао око кога се може описати круг и у који се може уписати круг назива се тетивно-тангентан четвороугао.

Најједноставнији примери таквих четвороуглова су квадрат, конвексан једнакокраки трапез чије наспрамне странице задовољавају услов $AB + CD = 2BC$ и правоугли делтоид.

Међутим, класа тетивно-тангентних четвороуглова је много шира.

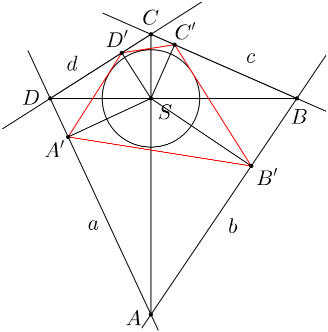
Теорема 7.3. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао чије су дијагонале AC и BD нормалне и секу се у тачки S. Ако су A', B', C' и D' нормалне пројекције тачке S редом на странице AB, BC, CD и AD, тада је $A'B'C'D'$ тетивно-тангентан четвороугао.



Слика 167. Тетивно-тангентан четвороугао

На основу претходне теореме следи да је у сваки тетиван четвороугао са нормалним дијагоналама уписан неки тетивно-тангентан четвороугао, што значи да постоји бесконачно много таквих четвороуглова. Такође важи и следећа теорема.

Теорема 7.4. Нека је $A'B'C'D'$ произвољан тетивно-тангентан четвороугао и S центар круга уписаног у тај четвороугао. Тада постоји јединствен тетиван четвороугао $ABCD$, са нормалним дијагоналама које се секу у тачки S, у који је четвороугао $A'B'C'D'$ уписан.



Слика 168

ЗАДАЦИ ВЕЖБАЊЕ

1. Права p паралелна основици BC једнакокраког троугла $\triangle ABC$ сече његове краке AB и AC редом у тачкама E и F. Доказати да је $BCFE$ тетиван четвороугао.
2. Доказати да су праве које садрже висине троугла симетрале углова троугла чија су темена подножја висина.
3. Око троугла $\triangle ABC$ је описан круг $k(O, r)$. Доказати да су полупречници OA, OB и OC описаног круга нормални на праве одређене подножјима висина из темена B и C, A и C, A и B редом.
4. Дат је правоугли троугао $\triangle ABC$ са правим углом у темену A. Ако је D подножје висине AD из темена A на страницу BC, B_1 средиште катете AC и C_1 средиште катете AB, доказати да се око четвороугла AC_1DB_1 може описати круг.