УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

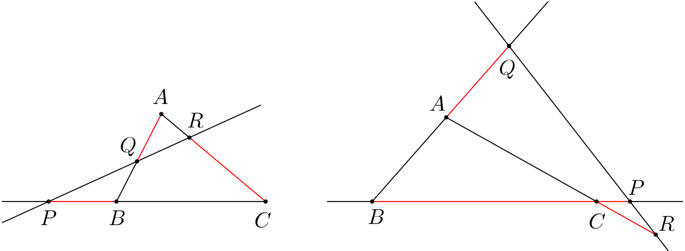
Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

14. Менелајева и Чевина теорема

Менелајева и Чевина теорема су последице Талесове теореме и Теореме о основној пропорционалности. Менелајева теорема је доказана у 1. веку, а Чевина теорема у 17. веку. Формулације ових теорема су сличне, па су оне познате као теореме близнакиње.

Менелајева теорема даје потребан и довољан услов да три тачке буду колинеарне, при чему се оне налазе на страницама неког троугла, или на продужењима страница.

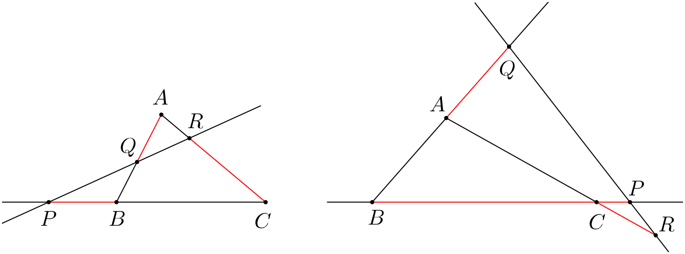


14. Менелајева и Чевина теорема

Тачке P, Q и R су такве да су:

(а) две од њих на страницама троугла, а трећа на продужењу треће странице (слика 179-а);

(б) све три на продужењима страница троугла (слика 179-б)

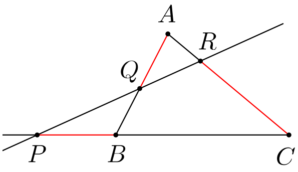


Слика 179

14. Менелајева и Чевина теорема

Права која садржи тачке P, Q и R одређује одсечке на страницама троугла, или на њиховим продужењима. На пример, на слици 180 одсечци су дужи AQ, CR и BP. Ти одсесчци су неузастопни, јер се не надовезују.

Према Менелајевој теореми тачке P, Q и R су колинеарне, ако и само ако је производ одсечака AQ, CR и BP једнак производу преосталих одсечака BQ, AR и CP (слика 179).

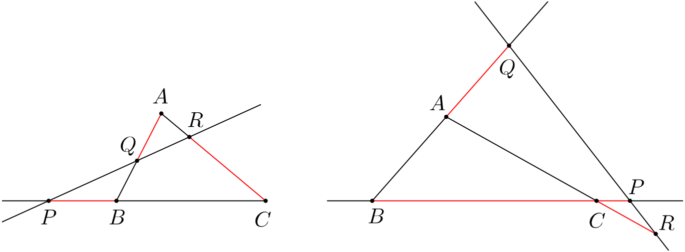


Слика 180

14. Менелајева и Чевина теорема

Менелајева теорема: Нека је $\triangle ABC$ троугао и P, Q и R тачке такве да су све три на продужењима страница троугла, или су две на двема страницама а трећа на продужењу треће странице. Тада су тачке P, Q и R колинеарне ако и само ако важи

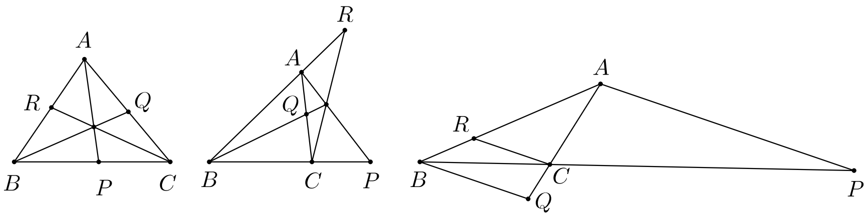
$$BQ \cdot AR \cdot CP = AQ \cdot CR \cdot BP.$$



Слика 179

14. Менелајева и Чевина теорема

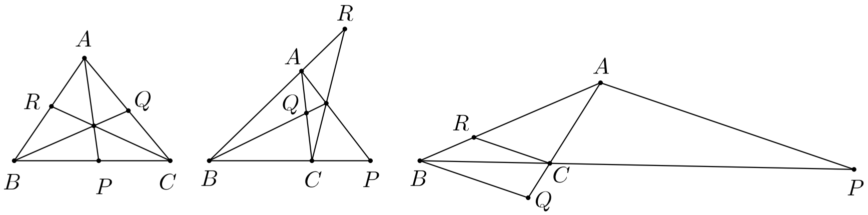
У геометрији троугла, чевијан је дуж која спаја теме троугла и произвољну тачку на наспрамној страници или на њеном продужењу. Тежишне дужи и висине су примери чевијана. Чевина теорема даје потребан и довољан услов да се чевијани троугла (или њихова продужења) секу у истој тачки, или да су паралелни. На слици 185, дужи AP, BQ и CR су чевијани троугла.



Слика 185. Чевина теорема

14. Менелајева и Чевина теорема

Тачке P, Q и R које припадају чевијанима, могу бити на страницама троугла $\triangle ABC$ (слика 185-а), или једна од њих може бити на страници троугла, а друге две на продужењима страница (слике 185-б и 185-в). Те тачке одређују одсечке на страницама или на њиховим продужењима. На пример, на слици 185-а одсечци су дужи BR, AQ и CP.

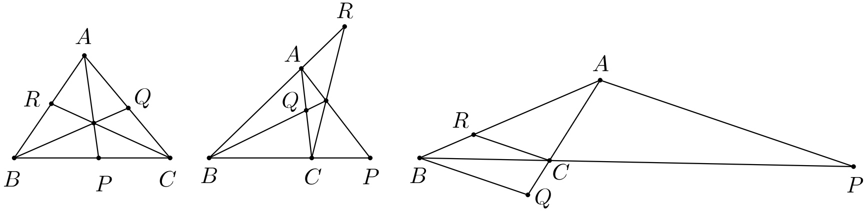


Слика 185. Чевина теорема

14. Менелајева и Чевина теорема

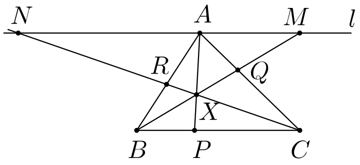
Чевина теорема: Нека је $\triangle ABC$ троугао и P, Q и R тачке такве да су све три на страницама троугла, или је једна од њих на страници а друге две на продужењима страница. Тада се чевијани AP, BQ, CR (или њихова продужења) секу у истој тачки или су паралелни, ако и само ако је

$$AQ \cdot CP \cdot BR = CQ \cdot BP \cdot AR. \tag{1}$$



Слика 185. Чевина теорема

Доказ. Претпоставимо најпре да се чевијани AP, BQ и CR секу у тачки X. Уочимо праву l која садржи теме A и паралелна је правој BC (слика 186). Права l сече праве BQ и CR у тачкама M и N редом. Применом директне Талесове теореме на троуглове $\triangle AXM$ и $\triangle XBP$, $\triangle AXN$ и $\triangle XPC$, редом налазимо да је $AX : XP = AM : BP$ и
$AX : XP = AN : CP$.



Слика 186

Одавде је $AM : BP = AN : CP$, па је

$$BP : CP = AM : AN. \tag{2}$$

Применом директне Талесове теореме на троуглове $\triangle AQM$ и $\triangle QBC$, $\triangle NRA$ и $\triangle RBC$, аналогно добијамо да је

$$AQ : CQ = AM : BC, \tag{3}$$

$$AR : BR = AN : BC. \tag{4}$$

Помоћу једнакости (2), (3) и (4), налазимо да је

$$\frac{AQ}{CQ} \cdot \frac{CP}{BP} \cdot \frac{BR}{AR} = \frac{AM}{BC} \cdot \frac{AN}{AM} \cdot \frac{BC}{AN} = 1,$$

одакле је $AQ \cdot CP \cdot BR = CQ \cdot BP \cdot AR$, што је и требало доказати.

Обрнуто, претпоставимо да важи једнакост

$$AQ \cdot CP \cdot BR = CQ \cdot BP \cdot AR. \tag{5}$$

Доказаћемо да се чевијани AP, BQ и CR секу у истој тачки.

Нека се чевијани AP и BQ секу у тачки X. Доказаћемо да чевијан CR садржи тачку X. Нека права CX сече страницу AB у тачки R_1. Тада је на основу доказаног дела теореме

$$AQ \cdot CP \cdot BR_1 = CQ \cdot BP \cdot AR_1. \tag{6}$$

Користећи једнакости (5) и (6), следи да је

$$\frac{AQ}{CQ} \cdot \frac{CP}{BP} = \frac{AR}{BR} = \frac{AR_1}{BR_1}.$$

Пошто се тачке R и R_1 налазе на страници AB и деле је у истој размери, оне се поклапају. Дакле, чевијан CR садржи тачку X. $\square$

Помоћу Чевине теореме може се доказати да се:

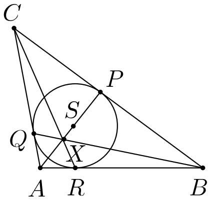
(а) тежишне дужи секу у истој тачки;

(б) праве које садрже висине секу у истој тачки;

(в) симетрале углова троугла секу у истој тачки.

Пример 8.5. Доказати да се дужи које спајају темена троугла $\triangle ABC$ и додирне тачке P, Q и R уписаног круга тог троугла на страницама BC, AC и AB редом, секу у истој тачки X (Жергонова тачка).

Решење. Нека су P, Q и R додирне тачке уписаног круга $k(S, \rho)$ на страницама BC, AC и AB редом. Како су тангентне дужи једнаке, имамо да је $AR = AQ$, $BP = BR$, $CQ = CP$.



Слика 189. Жергонова тачка

Применом претходних једнакости, добијамо да је

$$AQ \cdot CP \cdot BR = AR \cdot CQ \cdot BP,$$

одакле на основу Чевине теореме закључујемо да се чевијани AP, BQ и CR секу у истој тачки X. $\square$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. На страницама BC и AC троугла $\triangle ABC$ дате су тачке X и Y редом. Ако се дужи AX и BY секу у тачки R, при чему је $AY : YC = p$, $AR : RX = q$, $0 < p < q$, применом Менелајеве теореме израчунати $BX : XC$.

2. Дат је троугао $\triangle ABC$. Нека је P пресек симетрале спољашњег угла код темена A и праве BC, а Q и R пресеци симетрала унутрашњих углова код темена B и C и правих AC и AB редом. Доказати да су тачке P, Q и R колинеарне.

3. Дијагонале AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ се секу у тачки M тако да је $AM = MC$ и $DM = 2MB$. Ако су X и Y тачке на дужима MC и BC редом, такве да је $AC : MX = BY : YC = 3$, применом Менелајеве теореме доказати да су тачке D, X и Y колинеарне.