УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

проф. др Емилија Нешовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Крагујевац

школска 2022/23

18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

Основне тригонометријске функције се називају синус, косинус, тангенс и котангенс и означавају се са $\sin$, $\cos$, tg и ctg редом.

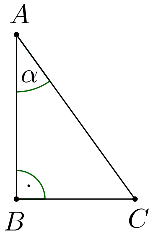
У општем случају, тригонометријске функције произвољног угла (оштрог, правог или тупог), се уводе помоћу тригонометријског круга.

Међутим, у посебном случају када је угао оштар, његове тригонометријске функције можемо да уведемо и помоћу правоуглог троугла.

18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

Дефиниција 9.1. Нека је $\triangle ABC$ правоугли троугао са правим углом у темену B и оштрим углом α у темену A. Тада је:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC}, \quad \cos\alpha = \frac{AB}{AC}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{AB}{BC}.$$



18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

Према томе:

- синус је количник наспрамне катете и хипотенузе;

- косинус је количник налегле катете и хипотенузе;

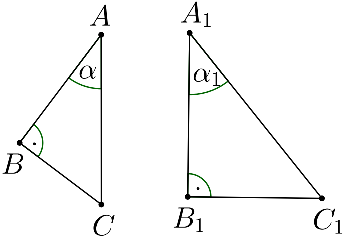
- тангенс је количник наспрамне и налегле катете;

- котангенс је количник налегле и наспрамне катете.

Показаћемо да синус оштрог угла не зависи од избора правоглог троугла који има тај оштар угао.

18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

Нека су $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ два правоугла троугла који имају оштре углове α и α_1 такве да је $\alpha \cong \alpha_1$ и праве углове у теменима B и B_1. Тада су они слични на основу става УУ.



Слика 213

18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

Из те сличности следи да су странице наспрам подударних углова пропорционалне, па је

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \sin\alpha_1.$$

Тиме смо показали да синус угла α не зависи од избора правоуглог троугла.

Ова особина такође важи и за остале тригонометријске функције оштрог угла - косинус, тангенс и котангенс.

18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

Мера угла се дефинише слично као мера дужи. То је функција која датом углу придружује позитиван реалан број.

$\boxed{\textbf{Дефиниција 9.2.}}$ Нека је $\mathcal{U}$ скуп свих углова и $\mathbb{R}^+$ скуп позитивних реалних бројева. Функција $\mathfrak{m} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^+$ се назива мера (величина) угла, ако су задовољени услови:

(1) постоји угао α_0 такав да је $\mathfrak{m}(\alpha_0) = 1$;

(2) за свака два угла α и β, ако је $\alpha \cong \beta$, тада је $\mathfrak{m}(\alpha) = \mathfrak{m}(\beta)$;

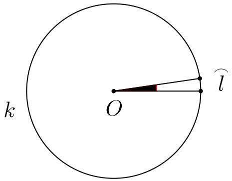
(3) за свака три угла α, β и γ, ако је $\alpha + \beta \cong \gamma$, тада је

$$\mathfrak{m}(\alpha) + \mathfrak{m}(\beta) = \mathfrak{m}(\gamma).$$

18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

Угао чија је мера једнака јединици се зове јединични угао.
Јединични угао мере у степенима је угао чија је мера 1°.
Јединични угао мере у радијанима је угао чија је мера $1\,\mathrm{rad}$.

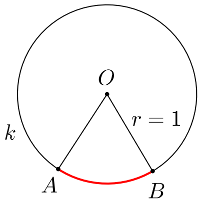
Угао чија је мера 1° добијамо када пун угао поделимо на 360 подударних централних углова. Мера сваког од њих је један степен.



18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

Углове можемо измерити у радијанима. Мера угла у радијанима једнака је дужини кружног лука који припада том углу. Она се такође назива радијанска мера угла.

Дефиниција 9.3. Нека је $\sphericalangle AOB$ централни угао јединичног круга $k(O,r)$. Мера централног угла $\sphericalangle AOB$ у радијанима једнака је дужини кружног лука $\overset{\frown}{AB}$ који припада том углу.



18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

На пример, ако централни угао $\sphericalangle AOB$ има 90°, кружни лук $\overset{\frown}{AB}$ који му припада има дужину

$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{1 \cdot \pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}.$$

На основу Дефиниције 9,3. следи да централни угао $\sphericalangle AOB$ има $\dfrac{\pi}{2}$ радијана. Ако централни угао $\sphericalangle AOB$ има 1°, кружни лук који му припада је дужине $l = \dfrac{\pi}{180}$. На основу Дефиниције 9.3 следи да је мера тог угла $\dfrac{\pi}{180}$ радијана. Тако добијамо важну релацију између степена и радијана:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}. \tag{1}$$

18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

Помоћу једнакости (1), добијамо да је

$$1\,\mathrm{rad} = 1^\circ \frac{180}{\pi} \approx 1^\circ \frac{180}{3,14} \approx 57^\circ\,17'\,45''.$$

Користећи једнакост (1), такође налазимо да је

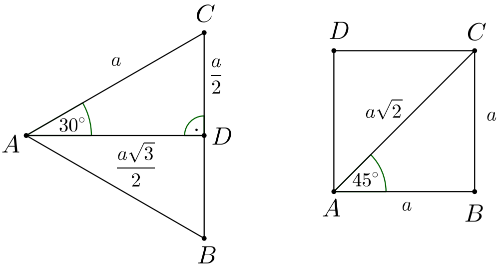
$$30^\circ = 30\cdot 1^\circ = 30\,\frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad},$$

$$45^\circ = 45\cdot 1^\circ = 45\,\frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad},$$

$$60^\circ = 60\cdot 1^\circ = 60\,\frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}.$$

18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

Помоћу једнакостраничног троугла и квадрата можемо да израчнамо синус, косинус, тангенс и котангенс неких оштрих углова (слика 220).



Слика 220

18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

У следећој табели приказане су вредности тригонометријских функција неких оштрих углова.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\alpha = 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\alpha = 45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha = 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

18. Тригонометријске функције оштрих углова и мера угла

Поставља се питање како да дефинишемо тригонометријске функције оштрог угла који је измерен у радијанима. Одговор је дат у следећој дефиницији.

Дефиниција 9.4. Нека је α оштар угао који има t радијана. Тада је

$$\sin\alpha = \sin t, \quad \cos\alpha = \cos t, \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} t, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg} t.$$

На основу претходне дефиниције, ако је $\mathfrak{m}(\alpha) = \dfrac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$, тада је

$$\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6}, \quad \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}.$$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунати синус, косинус, тангенс и котангенс угла чија је мера: (а) $\frac{\pi}{8}$ радијана; (б) $\frac{\pi}{12}$ радијана.

2. Израчунати вредност израза:

$$\sin 30^\circ + \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ.$$

3. Израчунати вредност израза:

(а) $\sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$; (б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

4. Израчунати вредност израза:

(а) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^3\frac{\pi}{4}$; (б) $2\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ$.