



Концептуални и теоријски оквир – модел и моделирање

1. ДЕО КУРСА

Основни математички модели – модели као чиста репрезентација

Шта подразумевамо под математичким моделом и под математичким моделирањем?

Сваки пут када се математика користи изван саме математике, тзв. матички модел је нужно укључен, било експлицитно или, врло често, имплицитно.

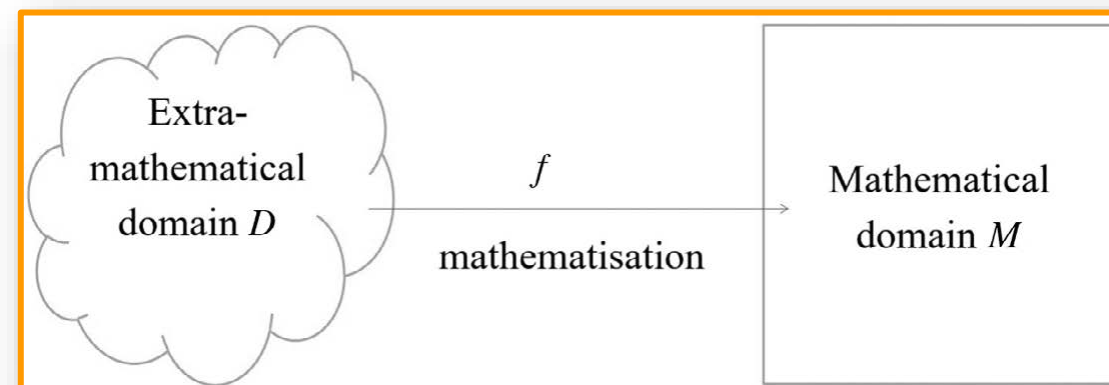
Шта је модел?

Модел је објекат (који је често сам по себи скуп објеката), који треба да представља – да репрезентује – нешто друго. Модел треба да обухвати само одређене карактеристике ентитета за који се залаже и стога је поједностављена репрезентација овог ентитета. Ово поједностављено представљање нужно – и намерно – укључује губитак информација, надамо се информација од мањег значаја у контексту о којем је реч.

Основни математички модели – модели као чиста репрезентација

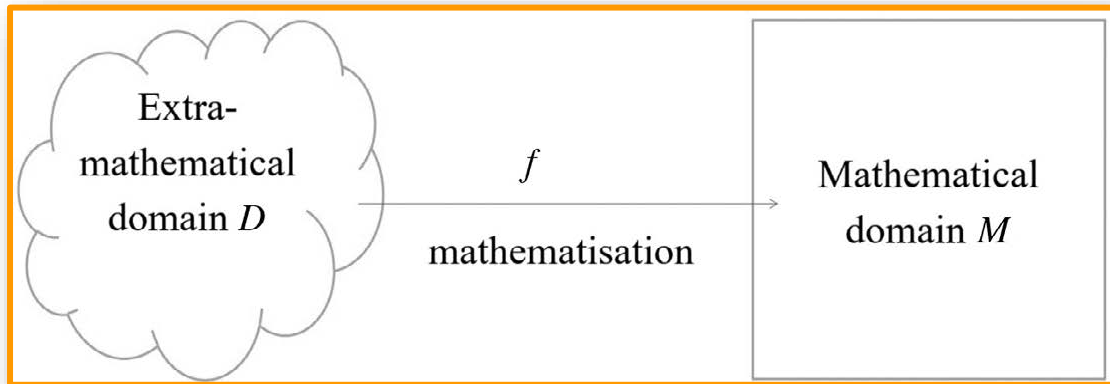
Шта подразумевамо под математичким моделом и под математичким моделирањем?

Једноставно речено, *математички модел је посебна врста модела, односно представљање аспеката ванматематичког домена помоћу неких математичких ентитета и односа између њих.*



Слика 1. Минимални дијаграм моделирања

Основни математички модели – модели као чиста репрезентација



Слика 1. Минимални дијаграм моделирања

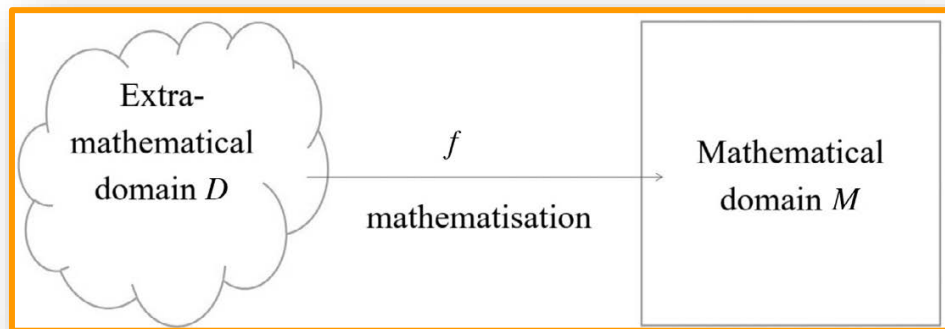
Математичка репрезентација се добија путем неке врсте „пресликавања“, f , које преводи одабране објекте из D у изабране објекте из M .

Одабир објеката из D којима треба дати математичку репрезентацију обично уопште није аутоматски процес; то је свесни чин воље *моделара*. Исто важи и за избор домена M ; избор објеката у M изабраним да представљају објекте у D ; и специфичан начин на који су објекти из D повезани са објектима из M , као што је обухваћено „мапирањем“ f .

Исходи свих ових процеса селекције и избора су у сажетом облику означени тројком (D, f, M) , која онда може послужити као *формална дефиниција математичког модела* (Niss, 1989).

Основни математички модели – модели као чиста репрезентација

Математичко моделирање је процес који се састоји од много избора и одлука укључених у успостављање модела.

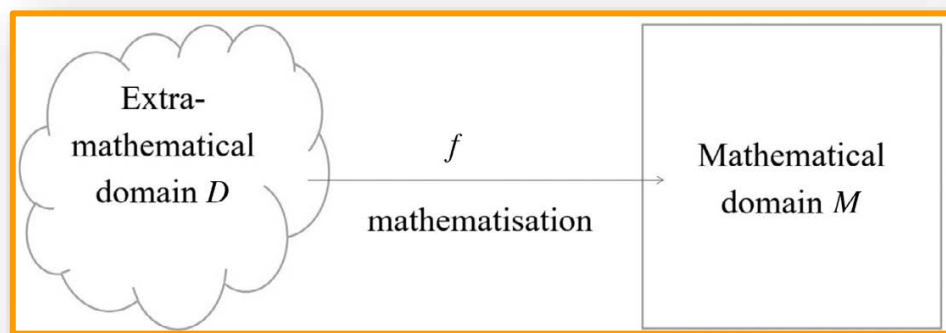


Слика 1. Минимални дијаграм моделирања

- Често се неколико различитих комбинација избора и одлука може узети у обзир да би се моделирала дата ситуација, тј. математички модел је само у тривијалним случајевима јединствено одређен ситуацијом.
- Често се под математичким моделом подразумева само M , без укључивања D или f . Међутим, дефинисање математичког модела као тројке (D, f, M) јасно даје до знања да сваки математички модел јесте модел нечега из екстра-математичког домена, а не само збирка математичких ентитета, (функција; једначина; геометријских објеката, ...).

Основни математички модели – модели као чиста репрезентација

Најједноставнији могући модел, који се састоји само од пуког представљања ванматематичких ентитета математичким, има широку употребу, али се термини „модел“ и „моделирање“ ретко користе у тако једноставним случајевима. Понекад ће се говорити о „*кодирању*“ скупа објеката уместо о његовом моделовању.

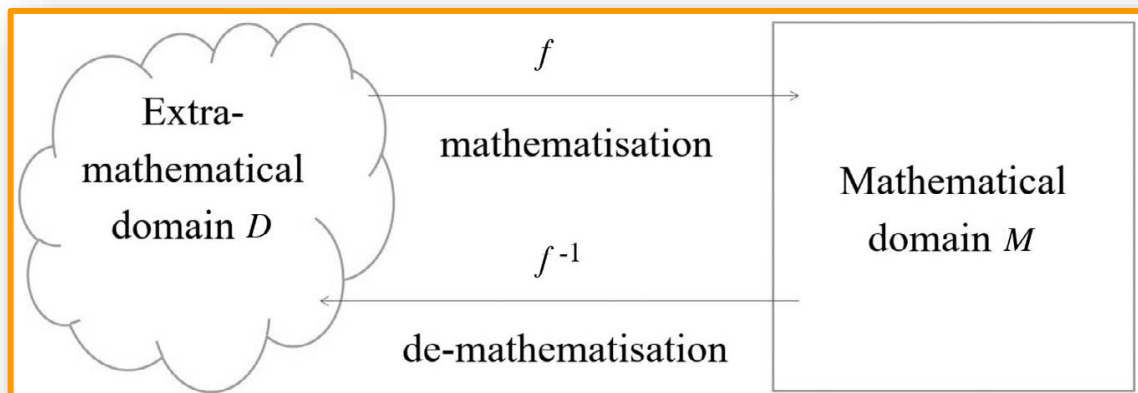


Слика 1. Минимални дијаграм моделирања

Пример 1. У већини градова у свету, зграде или главна врата у зградама опремљени су бројевима улица који омогућавају да се пронађе место где неко живи или ради без потребе да се консултује дугачак и разноврстан опис изгледа зграде или врата. Пошто неколико људи може имати исти број улице, обично нећете моћи да идентификујете одређеног појединца само на основу његове или њене адресе. Према томе, *кодирање не мора бити инверзибилно*. У овом случају, D се састоји од скупа становника у, рецимо, одређеној улици, док се M може изабрати да се састоји од скупа \mathbb{N} или неког његовог коначног подскупа.

Пример 2. Бар кодови артикала

Основни математички модели – модели као чиста репрезентација



Слика 2. Минимални дијаграм
инверзibilног моделирања

Пример 3. Регистарским таблицама аутомобила у већини земаља, где регистарске таблице садрже алфанумеричке кодове који успостављају један на један приказ свих регистрованих аутомобила у земљи.

Пример 4. У Србији сваки грађанин је представљен је јединствено одређеним идентификационим бројем - ЈМБГ. Постоје правила за добијање ЈМБГ па је осигурано да се произвољни број идентификује као легалан или невалидан. На идентификационим бројевима се не користе никакве друге математичке операције.

Математички модели са структуром

- Сложенији контексти и ситуације захтевају стварно коришћење математичких својстава ентитета које представљају, стога се мора увести **структура** у модел. То је условљено жељом да се математичким средствима представе одређена својства релевантних објеката у D , као и односи између таквих објеката. То се, дакле, мора одразити на математичка својства математичког домена M , објеката у M изабраних да представљају објекте из D , и математичких односа између тих објеката.

Пример 5. Замислимо некога ко жели да штеди у банци тако што ће сваког месеца плаћати фиксну рату на одређени период, и жели да предвиди величину акумулираног богатства након одређеног броја година. Одговор на ово питање математичким моделирањем захтева, као минимум, не само представљање рата, рокова, фиксних или променљивих каматних стопа, сума итд. већ захтева коришћење математичких својстава бројевних низова, на пример, геометријских редова, релевантних формула, итд.

Математички модели са структуром

Пример 6. Разматрамо моделирање цене вожње таксијем од S (почетна тачка) до A (тачка доласка) у одређеном граду C . Добро је познато да се такси тарифни системи разликују од места до места и од једне такси компаније до друге. Могу се применити различити услови који се односе на величину таксија, доба дана одабраног за вожњу, број путника, врсте и количине пртљага, да ли је такси наручен преко радија или је позван на улици и да ли се вози путевима са наплатом путарине или не и сл. Такође, присуство и величина основне тарифе, дужина вожње или време чекања су кључни фактори у одређивању цене вожње. Често је велики део ових информација доступан са почетних страница компанија. За некога ко жели да моделује цену такси вожње у C под различитим околностима, екстра-математички домен, D , састоји се од „универзума“ такси вожње у C и њихових трошкова, а ситуација моделирања уграђена у овај домен је такси вожња од S до A .

Математички модели са структуром

Пример 6. ... У принципу, моделирање такве возње би подразумевало узимање у обзир свих врста фактора и услова, и то би био значајан и дуготрајан задатак. Моделар, дакле, жели **прво да моделира много поједностављену ситуацију** (која би касније могла бити проширена) која одговара типичним потребама путника у таксију. Моделар одлучује да се фокусира на возњу таксијем за једну особу без пртљага у аутомобилу једне одређене компаније током радног времена (9-17 часова) и жели да одговори на питање: **Колико кошта таква возња?** Да би дао одговор, моделар узима у обзир неке поједностављујуће претпоставке, на пример, моделар може претпоставити да је такси позван преко радија; да се возња одвија одређеном рутом; и да трошак зависи само од почетног фиксног основног трошка, b , и променљиве пређене удаљености, k , и стопе d (цена по јединици удаљености), док су време чекања, накнаде за платну зону и други фактори изостављени из разматрања. Тачније, моделар бира да моделира ситуацију помоћу следеће линеарне реалне функције, c , једне променљиве:

$$c(k) = d \cdot k + b.$$

Математички модели са структуром

Пример 6. ... Овде су d, k и b ненегативни реални бројеви. Ако је валута RSD и пређено растојање k се мери у km, $c(k)$ и b се мере у RSD, d у RSD/km.

Математички домен, M , може се изабрати да се састоји од „универзума“ реалних линеарних функција једне променљиве или „универзума“ свих реалних функција једне променљиве или „универзума“ линеарних функција више променљивих, или „универзума“ свих реалних функција било ког броја променљивих итд.

Да бисмо одговорили на питање „Колико кошта возња таксијем?“, потребно је да знамо основну цену, цену за 1 km и пређену удаљеност. Консултујући веб страницу једне од такси компанија сазнајемо да је основна стопа 90 RSD, а цена по километру 110 RSD, тако да је функција наведена као:

$$c(k) = 110k + 90.$$

Према доступним картама, растојање између С и А је 12,9 км дуж предвиђене трасе.

Математички модели са структуром

Пример 6. ... $c(k) = 110k + 90$.

Према доступним картама, растојање између S и A је 12,9 km дуж предвиђене трасе. Дакле, сада можемо да преведемо наше питање из стварног света у одговарајуће математичко питање: **Која је вредност $c(12,9)$?**

Одговарање на ванматематичка питања путем математичког моделирања се постиже превођењем ових питања у математичка питања која се тичу математичких ентитета одабраних да представљају ванматематичке ентитете у фокусу наше пажње, а затим да тражимо математичке одговоре на преведена питања. Одговарање на математизована питања одвија се извођењем математичких процеса, укључујући прорачуне и извођењем математичких закључака како би се добили математички закључци и резултати у оквиру математичког домена модела.

Математички модели са структуром

Пример 6. ... $c(k) = 110k + 90$.

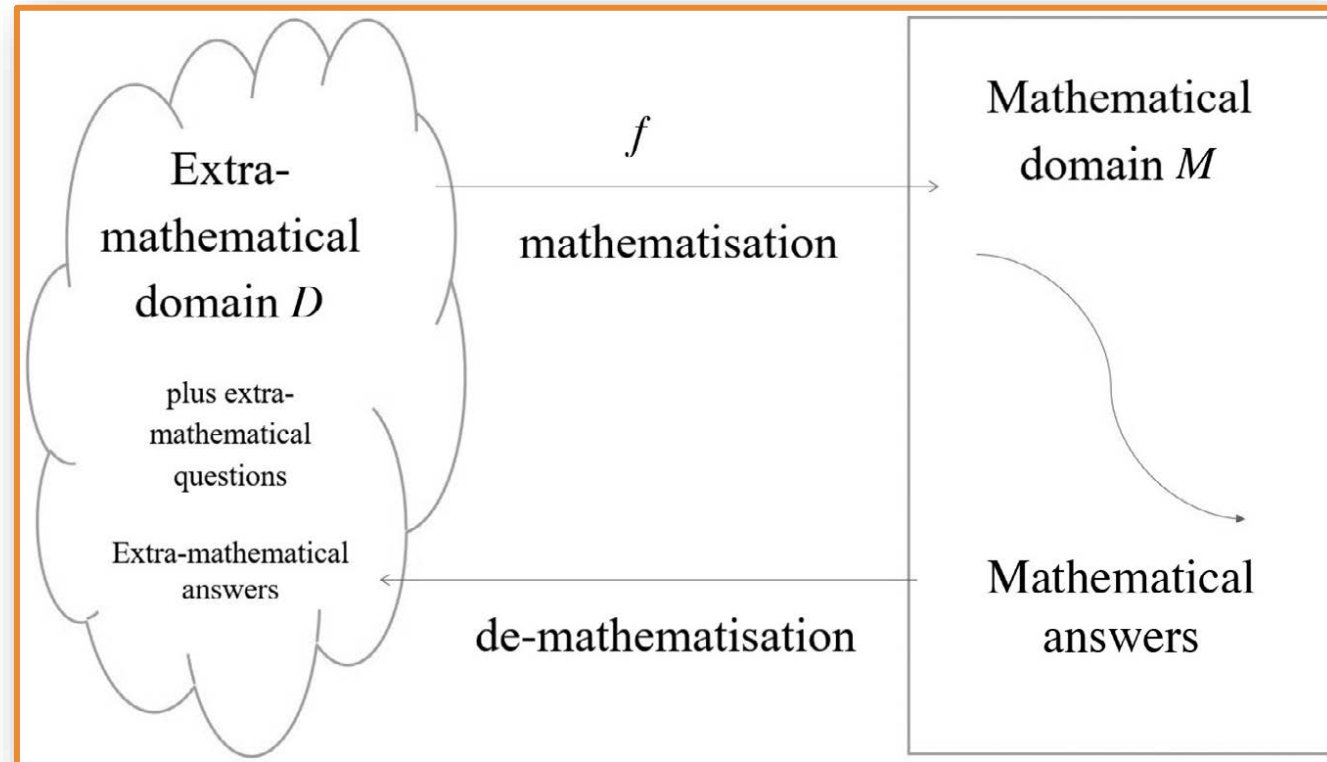
Која је вредност $c(12,9)$?

$$c(12,9) = 110 \cdot 12,9 + 90 = 1509$$

Добијени математички одговори могу бити преведени назад – дематематизовани – у одговоре који се односе на екстрематематички домен који се моделује.

У нашем примеру, ово се односи на додавање јединице (RSD) на број добијен за формулисање одговора: **Вожња таксијем кошта 1509 RSD.**

Математички модели са структуром

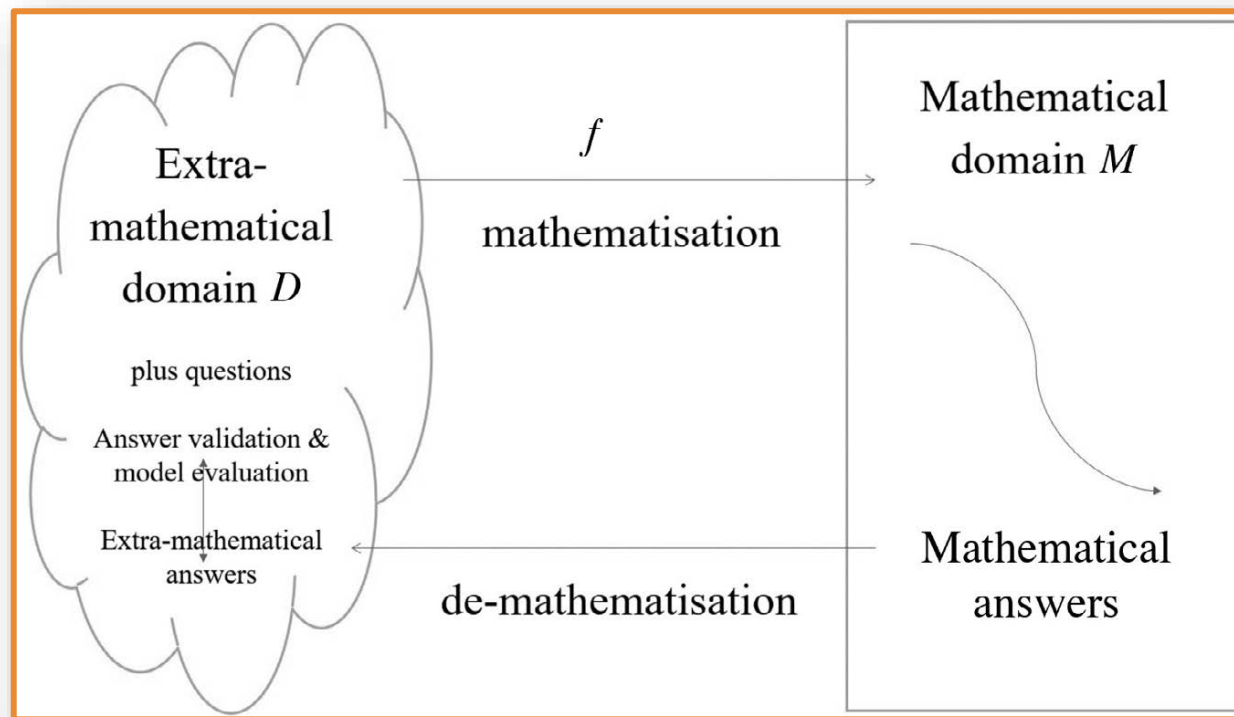


Слика 3. Дијаграм основног математичког моделирања који укључује структуру

Циклус моделирања

Компоненте које чине основну верзију, онога што се обично, назива *циклусом моделирања* су:

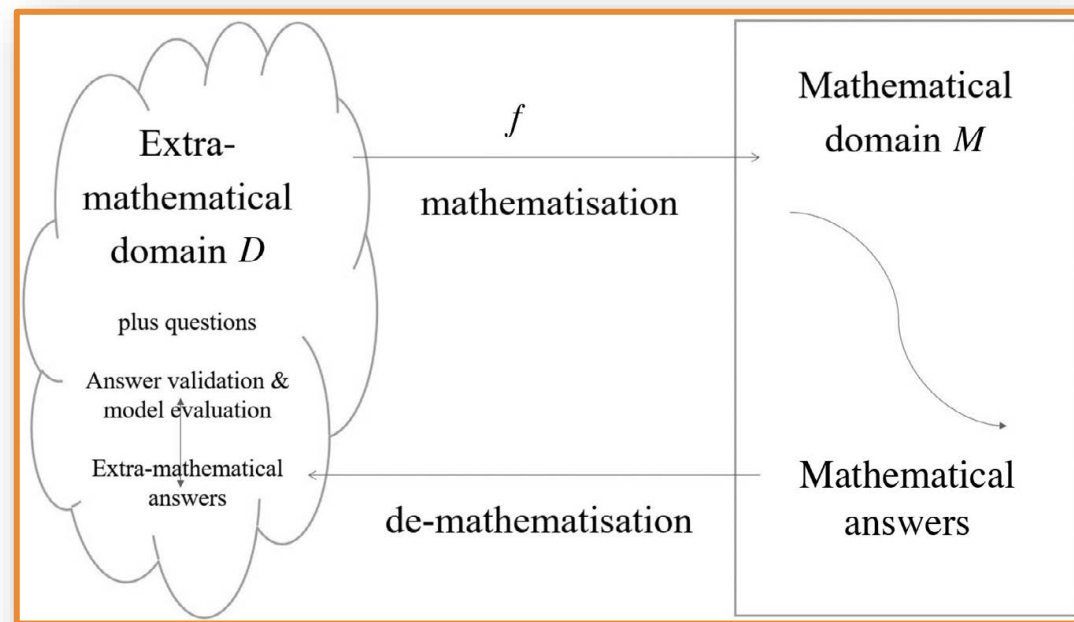
- математизација,
- математичка обрада,
- дематематизација и
- валидација одговора и евалуација модела.



Слика 4. Основни циклус моделирања

Циклус моделирања

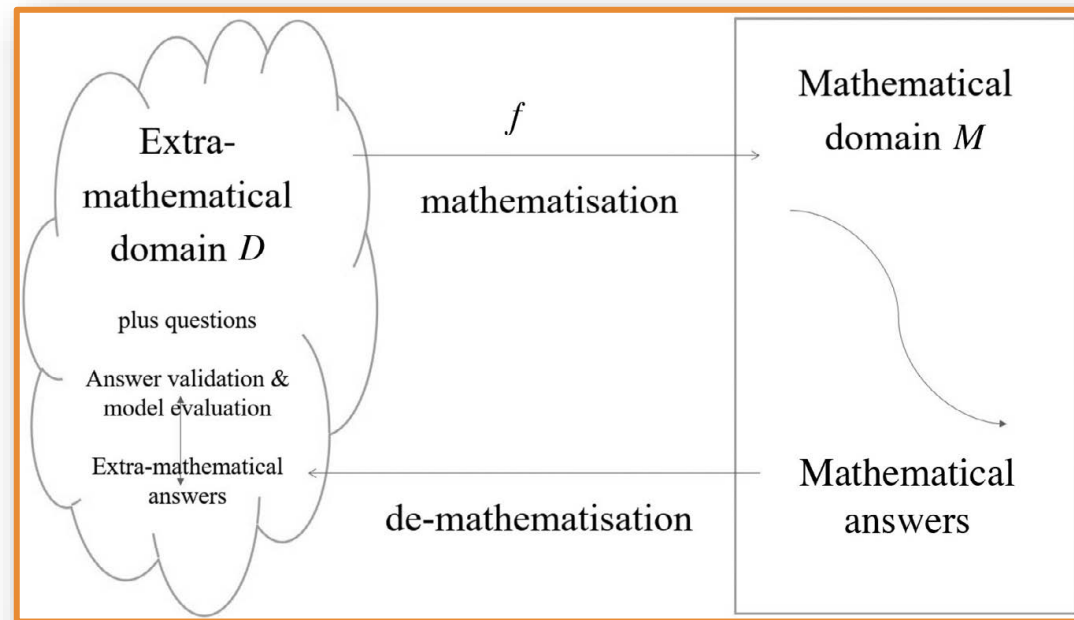
- Овај циклус моделирања **није** замишљен да буде **опис редоследа радњи** које морају да се предузму, или заиста предузимају, наведеним редоследом, када праве модел.
- Стварни **путеви моделирања могу имати разне облике**, почевши било где унутар или изван циклуса, понављајући неке подпроцесе неколико пута, прескачући друге, итд.
- **Циклус моделирања стога треба схватити као аналитичку реконструкцију корака моделирања који су нужно присутни, експлицитно или имплицитно, као инструмент за хватање и разумевање главних процеса математичког моделирања.**



Слика 4. Основни циклус моделирања

Циклус моделирања

- У зависности од тога који аспекти кључних корака основног циклуса моделирања су од посебног интереса у сваком контексту, **циклус се може проширити зумирањем детаља ових аспеката.**



Слика 4. Осноцни циклус моделирања

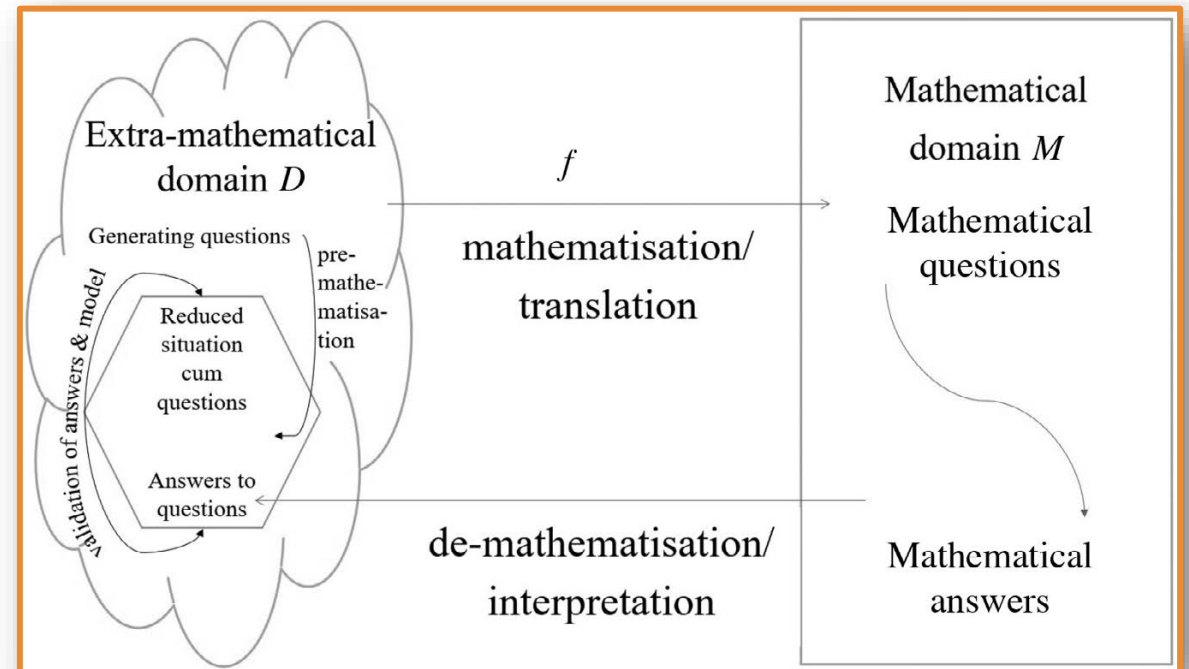
Циклус моделирања

➤ *Пред-математизација*. Суштинске компоненте пре-математизације укључују специфицирање елемената ситуације које треба узети у обзир, особина и својстава која треба узети у обзир, као и познате или претпостављене односе између елемената, укључујући механизме који управљају тим односима.

Пример 6. ... Сва разматрања укључена у одлучивање на које аспекте и услове треба обратити пажњу, а које одбацити, а која су довела до (много) поједностављене ситуације моделирања и одговарајућих питања чине први део пре-математизације. Остатак пред-математизације састоји се од свих претпоставки датих да би се ситуација даље прецизирала.

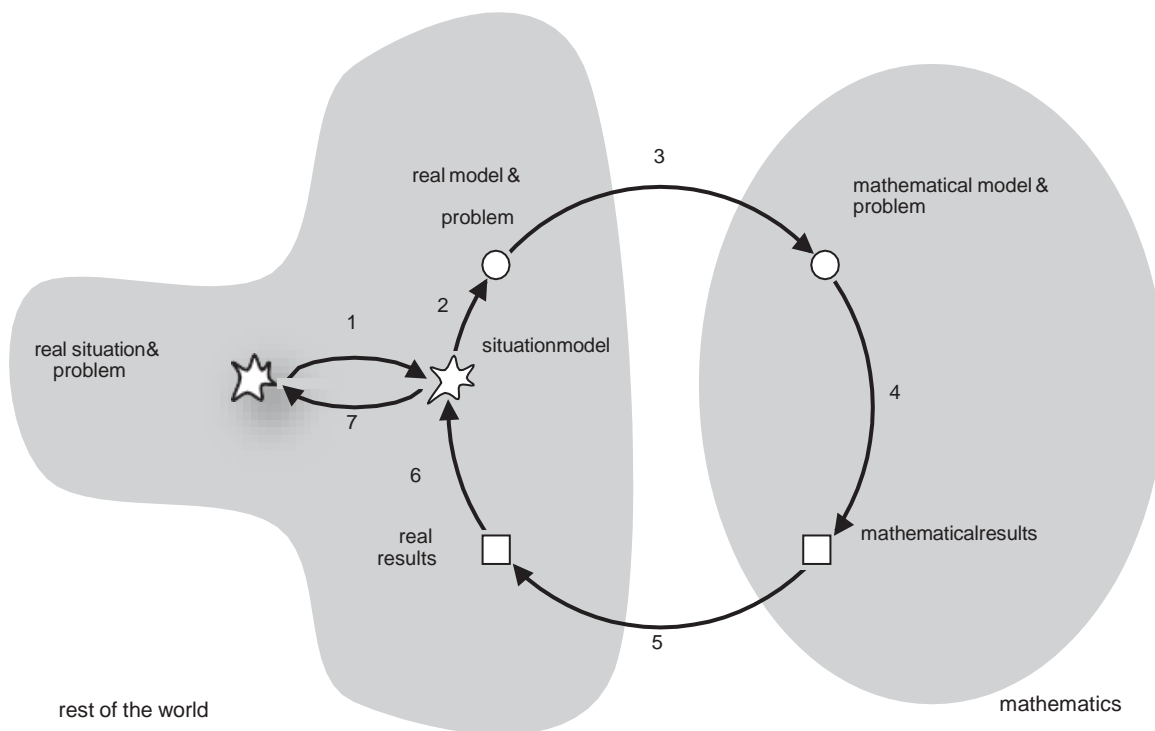
Циклус моделирања

- Резултат пре-математизације је скројено, сажето, структурирано и могуће идеализована ванматематичка ситуација – редукована ванматематичка ситуација са питањима – која садржи управо оне захтеве, елементе, факторе, компоненте, претпоставке и односе који треба да буду подвргнути математици.
- Важно је имати на уму да иако се **предматематизација** врши у циљу накнадног процеса математизације, она ипак **припада ванматематичком свету** у који је контекст уграђен.



Слика 5. Проширени циклус моделирања

Циклус моделирања



- 1 Конструисање
- 2 Поједностављивање/Структурирање
- 3 Математизација
- 4 Математички рад/решавање мат.проблема
- 5 Тумачење
- 6 Валидирање
- 7 Излагање

Слика 6. Blum-Leiss-ов циклус моделирања (школски контекст – наставник поставља проблем а ученици решавају)