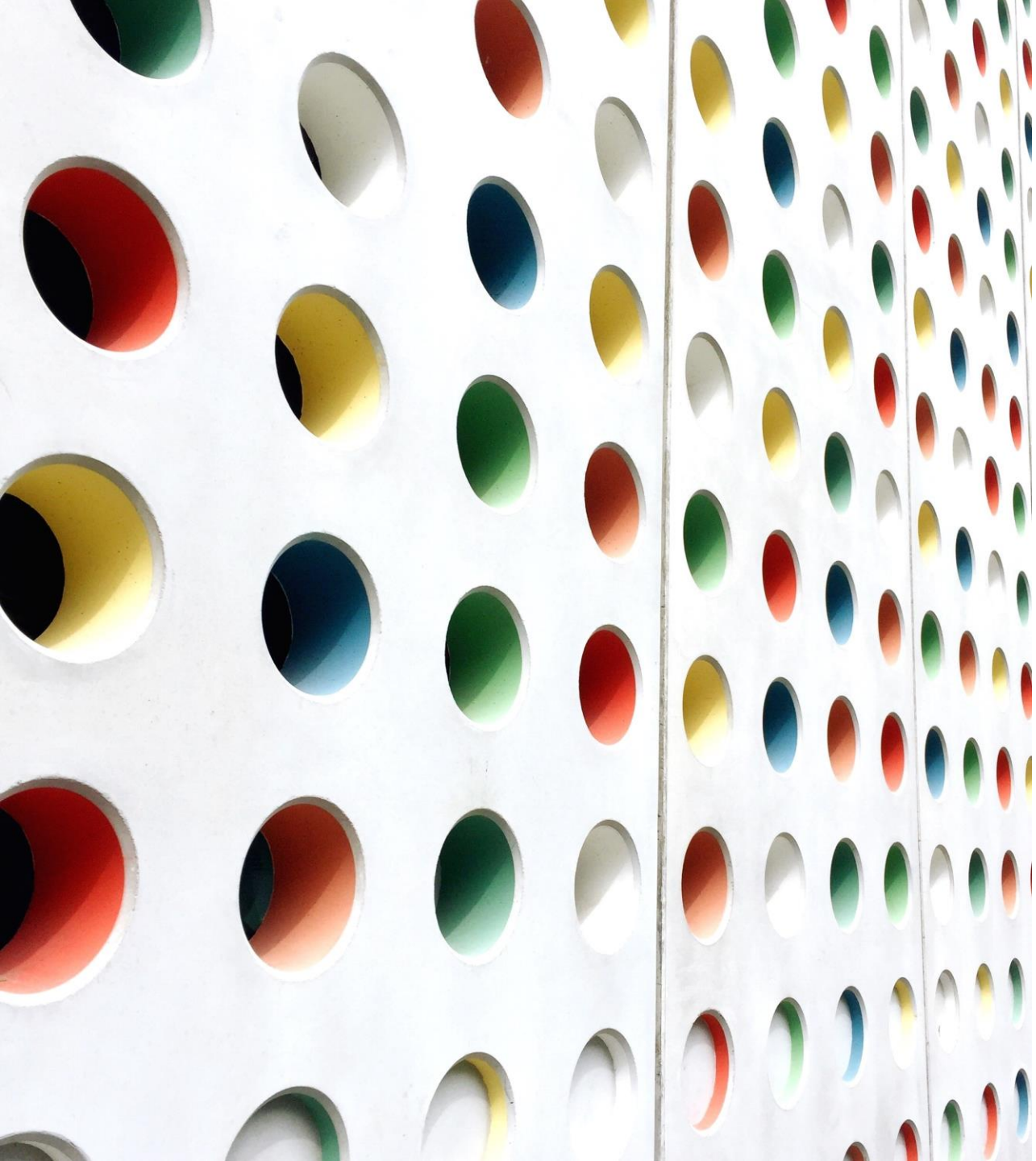
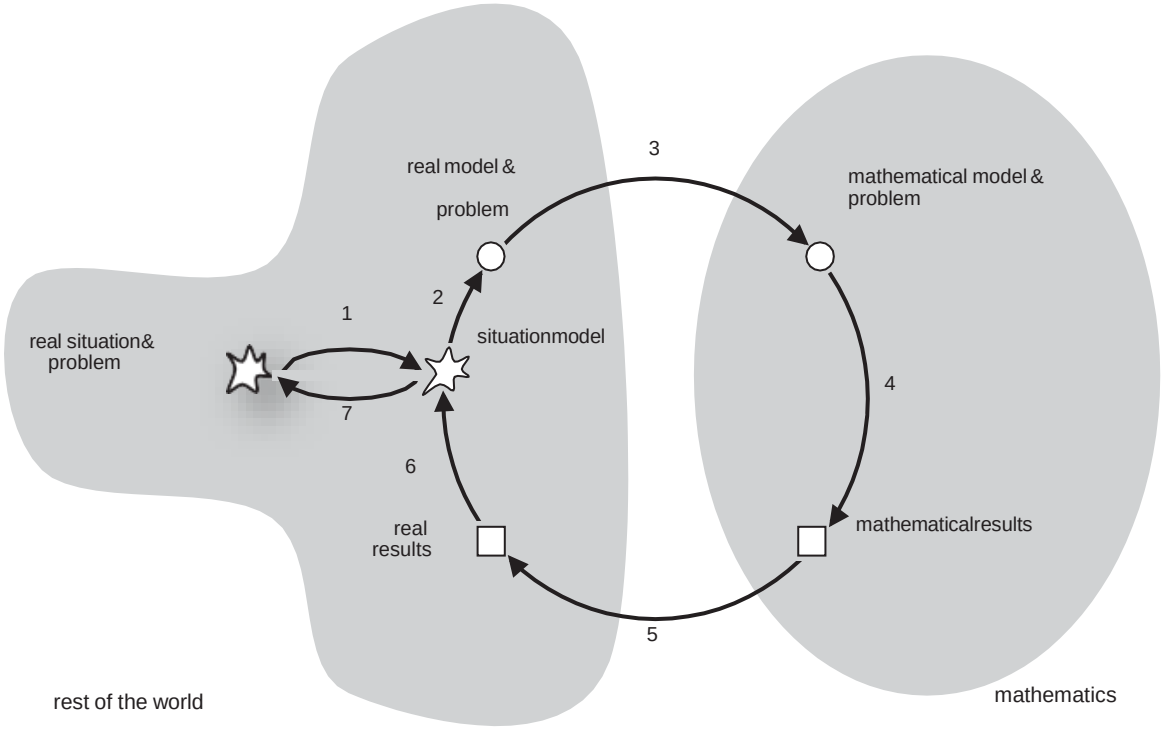


Примери моделирања

2. ДЕО КУРСА

Циклус моделирања



1 Конструисање

2 Поједностављивање/Структурирање

3 Математизација

4 Математички рад/решавање мат.проблема

5 Тумачење

6 Валидирање

7 Излагање

Слика 6. Blum-Leiss-ов циклус моделирања (школски контекст)

Пример 5: Амортизација кредита

Проблемска ситуација

У финансијском свету постоји мноштво различитих врста кредита за финансирање приватних инвестиција. Једна таква врста зајма је такозвани „зајам са сталном отплатом“, такође познат у неким земљама као „ануитетски зајам“. Код таквог кредита склапате уговор са даваоцем кредита, назовимо га „банком“ ради једноставности. Сагласни сте да ћете отплатити зајам у одређеном износу, који се зове „главница“, плус „камата“, након одређеног броја услова, у сваком од којих плаћате фиксни износ новца, који се зове „плаћање услуге по термину”. „Каматна стопа“ – по години или по року – је фиксна током „доспећа“ (трајања) кредита, односно за сваки период. Услуга по року, која је тада константна у ануитетном зајму, састоји се од збира камате по року и отплате по року главнице. Дуг који преостаје након плаћања рока назива се (одлазни) „биланс“. Овај износ тада постаје улазни салдо за следећи период. Табела која наводи услугу, камату и отплату по року за све услове назива се профилом „амортизације“ ануитетног кредита, а реч амортизација сугерише да је то начин на који се дуг, корак по корак, „изгубити".

Пример 5: Амортизација кредита

Проблемска ситуација

Ево примера амортизационог профила ануитетног зајма од одређене финансијске институције у Данској, Банкинфо. Главница зајма је 100.000 ДКК; рок доспећа кредита је 10 година, са сервисирањем сваког квартала (тј. 4 · 10 = укупно 40 термина); а годишња каматна стопа је 3%. Профил не узима у обзир инфлацију, тако да се сви подаци односе на годину у којој је кредит основан. Ако би се разматрала будућа инфлација, биле би потребне претпоставке или процене о будућим стопама инфлације.

Total service per year	DKK 11,612.06
Service per term	DKK 2,903.02
Service per month	DKK 967.67
Interest rate per term in %	0.75
Total interest during the maturity	DKK 16,120.62

Пример 5:
Амортизација кредита

Проблемска ситуација

Затим долази профил амортизације (који такође доставља банка). Табела се мора читати на следећи начин: На почетку сваког термина, примо означава улазно стање; на крају периода, плаћа се стална услуга од 2.903,02 ДКК, остављајући одлазни салдо (ултимо) улазног салда минус 2.903,02 ДКК за следећи термин. Услуга се састоји од суме дела камате и дела отплате, који се разликују у зависности од услова. Обратите пажњу на то да су бројеви заокружени на цео број ДКК.

Сада се поставља питање: одакле све те бројке, односно како их је банка израчунала?

Year	*Term*	*Primo Debt*	*Interest*	*Repay-ment*	*Ultimo Debt*	*Year*	*Term*	*Primo debt*	*Interest*	*Repay-ment*	*Ultimo Debt*
1	1	100,000	750	2,153	97,847	6	1	53,729	403	2,500	51,229
1	2	97,847	734	2,169	95,678	6	2	51,229	384	2,519	48,710
1	3	95,678	718	2,185	93,492	6	3	48,710	365	2,538	46,173
1	4	93,492	701	2,202	91,291	6	4	46,173	346	2,557	43,616
1, sum			*2,903*	*8,709*		6, sum			*1,499*	*10,113*	
2	1	91,291	685	2,218	89,072	7	1	43,616	327	2,576	41,040
2	2	89,072	668	2,235	86,837	7	2	41,040	308	2,595	38,445
2	3	86,837	651	2,252	84,586	7	3	38,445	288	2,615	35,830
2	4	84,586	634	2,269	82,317	7	4	35,830	269	2,634	33,196
2, sum			*2,638*	*8,974*		7, sum			*1,192*	*10,420*	
3	1	82,317	617	2,286	80,031	8	1	33,196	249	2,654	30,542
3	2	80,031	600	2,303	77,278	8	2	30,542	229	2,674	27,868
3	3	77,278	583	2,320	75,408	8	3	27,868	209	2,694	25,174
3	4	75,408	566	2,337	73,071	8	4	25,174	189	2,714	22,460
3, sum			*2,366*	*9,246*		8, sum			*876*	*10,736*	
4	1	73,071	548	2,355	70,716	9	1	22,460	168	2,735	19,725
4	2	70,716	530	2,373	68,343	9	2	19,725	148	2,755	16,970
4	3	68,343	513	2,390	65,953	9	3	16,970	127	2,776	14,194
4	4	65,953	495	2,408	63,545	9	4	14,194	106	2,797	11,398
4, sum			*2,086*	*9,526*		9, sum			*550*	*11,062*	
5	1	63,545	477	2,426	61,118	10	1	11,398	85	2,818	8,580
5	2	61,118	458	2,445	58,673	10	2	8,580	64	2,839	5,741
5	3	58,673	440	2,463	56,211	10	3	5,741	43	2,860	2,881
5	4	56,211	422	2,481	53,729	10	4	2,881	22	2,881	0
5, sum			*1,797*	*9,815*		10, sum			*215*	*11,398*	

Пример 5:
Амортизација кредита

- Квартална каматна стопа добијена је једноставним узимањем једне четвртине годишње каматне стопе од 3%.
- Такође је јасно да ако знамо месечну услугу од 979,67 ДКК, можемо пронаћи тромесечну услугу 979,67 · 3 ≈ 2.903,02;
- годишњи сервис 979,67 · 12 ≈ 11.612,06;
- а укупна услуга током доспећа кредита множењем овог броја са 10, добија се 116.120,60.
- Одузимајући главницу 100.000, добијамо укупно плаћену камату током 10 година, 16.120,60, што је скоро исто као и цифра приказана у табели.

Total service per year	DKK 11,612.06
Service per term	DKK 2,903.02
Service per month	DKK 967.67
Interest rate per term in %	0.75
Total interest during the maturity	DKK 16,120.62

Пример 5:
Амортизација кредита

- Одакле износ 979,67 и сви остали у табели амортизације?
- Који су основни принципи и обрасци који су одговорни за генерисање свих ових бројева?
- Вреди напоменути да у првим терминима периода амортизације стална услуга укључује прилично велику камату, док у коначним роковима само веома мали део услуге представља камату.

Year	*Term*	*Primo Debt*	*Interest*	*Repay-ment*	*Ultimo Debt*	*Year*	*Term*	*Primo debt*	*Interest*	*Repay-ment*	*Ultimo Debt*
1	1	100,000	750	2,153	97,847	6	1	53,729	403	2,500	51,229
1	2	97,847	734	2,169	95,678	6	2	51,229	384	2,519	48,710
1	3	95,678	718	2,185	93,492	6	3	48,710	365	2,538	46,173
1	4	93,492	701	2,202	91,291	6	4	46,173	346	2,557	43,616
1, sum			*2,903*	*8,709*		6, sum			*1,499*	*10,113*	
2	1	91,291	685	2,218	89,072	7	1	43,616	327	2,576	41,040
2	2	89,072	668	2,235	86,837	7	2	41,040	308	2,595	38,445
2	3	86,837	651	2,252	84,586	7	3	38,445	288	2,615	35,830
2	4	84,586	634	2,269	82,317	7	4	35,830	269	2,634	33,196
2, sum			*2,638*	*8,974*		7, sum			*1,192*	*10,420*	
3	1	82,317	617	2,286	80,031	8	1	33,196	249	2,654	30,542
3	2	80,031	600	2,303	77,278	8	2	30,542	229	2,674	27,868
3	3	77,278	583	2,320	75,408	8	3	27,868	209	2,694	25,174
3	4	75,408	566	2,337	73,071	8	4	25,174	189	2,714	22,460
3, sum			*2,366*	*9,246*		8, sum			*876*	*10,736*	
4	1	73,071	548	2,355	70,716	9	1	22,460	168	2,735	19,725
4	2	70,716	530	2,373	68,343	9	2	19,725	148	2,755	16,970
4	3	68,343	513	2,390	65,953	9	3	16,970	127	2,776	14,194
4	4	65,953	495	2,408	63,545	9	4	14,194	106	2,797	11,398
4, sum			*2,086*	*9,526*		9, sum			*550*	*11,062*	
5	1	63,545	477	2,426	61,118	10	1	11,398	85	2,818	8,580
5	2	61,118	458	2,445	58,673	10	2	8,580	64	2,839	5,741
5	3	58,673	440	2,463	56,211	10	3	5,741	43	2,860	2,881
5	4	56,211	422	2,481	53,729	10	4	2,881	22	2,881	0
5, sum			*1,797*	*9,815*		10, sum			*215*	*11,398*	

Пример 5: Амортизација кредита

Чињенице о ануитетним кредитима

- Један и само један износ новца P, по имену главница, позајмљен је приликом оснивања кредита.
- У нашем примеру изнад, главница је P = 100.000 ДКК.
- Кредит се враћа у току одређеног целог броја рокова N, који се називају роком доспећа кредита.
- У нашем примеру, сваки рок је четвртина године, а рок доспећа кредита је 10 година, дакле N = 40.
- Каматна стопа r по року је фиксна током доспећа кредита.
- У нашем примеру, каматна стопа по термину је 0,75%, тј. r = 0,75/100.
- На крају сваког рока, зајмопримац плаћа даваоцу кредита фиксни износ, под називом услуга. Овај износ означавамо са S, што је опет позитиван реалан број са истом валутом.
- У нашем примеру, услуга по кварталу је дата као S = 2.903,02 ДКК.

Пример 5: Амортизација кредита

Неопходне претпоставке за специфичан амортизациони профил кредита

1. На крају сваког рока, камата остварена текућим стањем, односно преосталим дугом на почетку рока, плаћа се из услуге. Оно што остане од услуге се користи као отплата да се смањи салдо периода да би се створио нижи одлазни салдо, који је онда нови улазни салдо за следећи период. Ова шема се наставља за све термине, осим за последњи, из којег нема излазног стања.

2. После последње услуге, на крају последњег рока, преостали дуг је 0 ДКК, и зајам је тако амортизован, односно у потпуности враћен.

3. Никаква инфлација (или дефлација, у том случају) се не узима у обзир.

Year	*Term*	*Primo Debt*	*Interest*	*Repay-ment*	*Ultimo Debt*
1	1	100,000	750	2,153	97,847
1	2	97,847	734	2,169	95,678
1	3	95,678	718	2,185	93,492
1	4	93,492	701	2,202	91,291
1, sum			*2,903*	*8,709*	
2	1	91,291	685	2,218	89,072
2	2	89,072	668	2,235	86,837
2	3	86,837	651	2,252	84,586
2	4	84,586	634	2,269	82,317
2, sum			*2,638*	*8,974*	
3	1	82,317	617	2,286	80,031
3	2	80,031	600	2,303	77,278
3	3	77,278	583	2,320	75,408
3	4	75,408	566	2,337	73,071
3, sum			*2,366*	*9,246*	
4	1	73,071	548	2,355	70,716
4	2	70,716	530	2,373	68,343
4	3	68,343	513	2,390	65,953
4	4	65,953	495	2,408	63,545
4, sum			*2,086*	*9,526*	
5	1	63,545	477	2,426	61,118
5	2	61,118	458	2,445	58,673
5	3	58,673	440	2,463	56,211
5	4	56,211	422	2,481	53,729
5, sum			*1,797*	*9,815*	

Пример 5: Амортизација кредита

Математизација

По истеку првог рока, главница P је генерисала камату rP, која се плаћа из услуге S. Остатак $S - rP$ се користи као отплата главнице. То значи да је преостали дуг, одлазни салдо, P_1, после термина 1 дат са:

$$P_1 = P - (S - rP) = P(1 + r) - S.$$

Такође можемо протумачити овај однос тако да показује – еквивалентно – да се текући дуг повећава током периода додавањем камате, а затим смањује одузимањем плаћања услуге на крају рока.

За термин 2, исти образац се понавља, али сада са P_1 као новим улазним салдом. Дакле, на крају термина 2, биланс је смањен на принос:

$$P_2 = P_1(1 + r) - S = (P(1 + r) - S)(1 + r) - S = P(1 + r)^2 - S(1 + r) - S$$

као одлазни салдо после термина 2 и отуда као улазни салдо за термин 3.

Year	*Term*	*Primo Debt*	*Interest*	*Repay-ment*	*Ultimo Debt*
1	1	100,000	750	2,153	97,847
1	2	97,847	734	2,169	95,678
1	3	95,678	718	2,185	93,492
1	4	93,492	701	2,202	91,291
1, sum			*2,903*	*8,709*	
2	1	91,291	685	2,218	89,072
2	2	89,072	668	2,235	86,837
2	3	86,837	651	2,252	84,586
2	4	84,586	634	2,269	82,317
2, sum			*2,638*	*8,974*	
3	1	82,317	617	2,286	80,031
3	2	80,031	600	2,303	77,278
3	3	77,278	583	2,320	75,408
3	4	75,408	566	2,337	73,071
3, sum			*2,366*	*9,246*	
4	1	73,071	548	2,355	70,716
4	2	70,716	530	2,373	68,343
4	3	68,343	513	2,390	65,953
4	4	65,953	495	2,408	63,545
4, sum			*2,086*	*9,526*	
5	1	63,545	477	2,426	61,118
5	2	61,118	458	2,445	58,673
5	3	58,673	440	2,463	56,211
5	4	56,211	422	2,481	53,729
5, sum			*1,797*	*9,815*	

Пример 5: Амортизација кредита

Математизација

Настављајући на овај начин током свих термина, добијамо следећи израз преосталог дуга, одлазног стања, после рока n, $n > 1$:

$$P_n = P_{n-1}(1 + r) - S$$

$$= P(1 + r)^n - S(1 + r)^{n-1} - \ldots - S(1 + r) - S$$

$$= P(1 + r)^n - S[(1 + r)^{n-1} + \ldots + (1 + r) + 1].$$

Како је $(1 + r)^{n-1} + \ldots + (1 + r) + 1 = \frac{(1+r)^n - 1}{1+r-1} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$, добијамо:

$$P_n = P(1 + r)^n - S\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Year	*Term*	*Primo Debt*	*Interest*	*Repay-ment*	*Ultimo Debt*
1	1	100,000	750	2,153	97,847
1	2	97,847	734	2,169	95,678
1	3	95,678	718	2,185	93,492
1	4	93,492	701	2,202	91,291
1, sum			*2,903*	*8,709*	
2	1	91,291	685	2,218	89,072
2	2	89,072	668	2,235	86,837
2	3	86,837	651	2,252	84,586
2	4	84,586	634	2,269	82,317
2, sum			*2,638*	*8,974*	
3	1	82,317	617	2,286	80,031
3	2	80,031	600	2,303	77,278
3	3	77,278	583	2,320	75,408
3	4	75,408	566	2,337	73,071
3, sum			*2,366*	*9,246*	
4	1	73,071	548	2,355	70,716
4	2	70,716	530	2,373	68,343
4	3	68,343	513	2,390	65,953
4	4	65,953	495	2,408	63,545
4, sum			*2,086*	*9,526*	
5	1	63,545	477	2,426	61,118
5	2	61,118	458	2,445	58,673
5	3	58,673	440	2,463	56,211
5	4	56,211	422	2,481	53,729
5, sum			*1,797*	*9,815*	

Пример 5: Амортизација кредита

Математизација

Овај израз је изведен под претпоставком да је S познато. Међутим, није – још! Али то заправо можемо утврдити позивајући се на претпоставку 2, да се зајам враћа након истека рока N.

$$0 = P_N = P(1 + r)^N - S\frac{(1+r)^N - 1}{r},$$

Тако да је:

(ii) $$S = \frac{P(1+r)^N r}{(1+r)^N - 1},$$

(iia) $$S = \frac{Pr}{1-(1+r)^{-N}}.$$

Year	*Term*	*Primo Debt*	*Interest*	*Repay-ment*	*Ultimo Debt*
1	1	100,000	750	2,153	97,847
1	2	97,847	734	2,169	95,678
1	3	95,678	718	2,185	93,492
1	4	93,492	701	2,202	91,291
1, sum			*2,903*	*8,709*	
2	1	91,291	685	2,218	89,072
2	2	89,072	668	2,235	86,837
2	3	86,837	651	2,252	84,586
2	4	84,586	634	2,269	82,317
2, sum			*2,638*	*8,974*	
3	1	82,317	617	2,286	80,031
3	2	80,031	600	2,303	77,278
3	3	77,278	583	2,320	75,408
3	4	75,408	566	2,337	73,071
3, sum			*2,366*	*9,246*	
4	1	73,071	548	2,355	70,716
4	2	70,716	530	2,373	68,343
4	3	68,343	513	2,390	65,953
4	4	65,953	495	2,408	63,545
4, sum			*2,086*	*9,526*	
5	1	63,545	477	2,426	61,118
5	2	61,118	458	2,445	58,673
5	3	58,673	440	2,463	56,211
5	4	56,211	422	2,481	53,729
5, sum			*1,797*	*9,815*	

Пример 5: Амортизација кредита

Математизација

$S = 2.903{,}02$ ДКК

$P = 100.000$ ДКК, $r = 0{,}75/100$, $N = 40$

$\left(1 + \frac{0{,}75}{100}\right)^{-40} \approx 0{,}741647961$, добијамо:

$$S \approx 100.000 \cdot \frac{0{,}0075}{1 - 0{,}741647961} = 750 \frac{\text{ДКК}}{0{,}258352039}$$

$$\approx 2.903{,}37 \text{ ДКК},$$

Даље можемо одредити остале варијабле у профилу на основу (i) и (ii). Преостале бројке које нас занимају следе одмах из вредности S.

Year	*Term*	*Primo Debt*	*Interest*	*Repay-ment*	*Ultimo Debt*
1	1	100,000	750	2,153	97,847
1	2	97,847	734	2,169	95,678
1	3	95,678	718	2,185	93,492
1	4	93,492	701	2,202	91,291
1, sum			*2,903*	*8,709*	
2	1	91,291	685	2,218	89,072
2	2	89,072	668	2,235	86,837
2	3	86,837	651	2,252	84,586
2	4	84,586	634	2,269	82,317
2, sum			*2,638*	*8,974*	
3	1	82,317	617	2,286	80,031
3	2	80,031	600	2,303	77,278
3	3	77,278	583	2,320	75,408
3	4	75,408	566	2,337	73,071
3, sum			*2,366*	*9,246*	
4	1	73,071	548	2,355	70,716
4	2	70,716	530	2,373	68,343
4	3	68,343	513	2,390	65,953
4	4	65,953	495	2,408	63,545
4, sum			*2,086*	*9,526*	
5	1	63,545	477	2,426	61,118
5	2	61,118	458	2,445	58,673
5	3	58,673	440	2,463	56,211
5	4	56,211	422	2,481	53,729
5, sum			*1,797*	*9,815*	

Пример 5: Амортизација кредита

Примедба. У табели се наводи да каматна стопа од 3% годишње одговара каматној стопи од 0,75% по кварталу. Ово није тачно ако говоримо о уобичајеном начину на који новац расте на банковном рачуну јер би квартална каматна стопа требало да доведе до сложене камате током године.

Ако износ A акумулира камату по стопи од r по кварталу, онда се A повећао на $A(1 + r)^4$ након четири термина. Ако је годишња камата s, онда морамо имати $A(1 + r)^4 = A(1 + s)$, што даје $(1 + r)^4 = 1 + s$ или, еквивалентно, $r = \sqrt[4]{s + 1} - 1$. У случају нашег примера, где је s = 0,03, добијамо

$r = \sqrt[4]{1{,}03} - 1 \approx 0{,}007417072$ а не $0{,}0075$. Ово би довело до другачије вредности S, односно $\frac{750\text{ДКК}}{1 - 0{,}007417072^{-40}} \approx 750\ \text{ДКК}/(1 - 0{,}744093908) \approx 2.930{,}76\ \text{ДКК}$. Ово сугерише да је у датој табели фиксина квартална каматна стопа од 0,75%, а не годишња каматна стопа од 3%. Насупрот томе, квартална каматна стопа од 0,75% одговара годишњој каматној стопи од $3{,}0339\%$.

Међутим, шема коју су усвојиле многе банке је да новац расте са сложеном каматом само ако је временски интервал дужи од једне године. У року од годину дана, банке често регулишу раст новца линеарно, а не експоненцијално, тако да квартална каматна стопа од 0,75% без комбиновања у ствари одговара годишњој каматној стопи од 3 %.

Пример 5: Амортизација кредита

Валидација и евалуација

Валидација добијених модела одговора се састоји у процени колико су ови одговори у складу са емпиријском реалношћу. Емпиријска стварност овде је конституисана профилом амортизације који представља Банкинфо. Наравно, могле су се узети у обзир и друге емпиријске стварности које потичу из других финансијских институција. У овом случају, одговори модела су у веома блиској сагласности са емпиријским профилом амортизације, што значи да можемо сматрати одговоре модела валидираним.

Валидација одговора је једно од средстава помоћу којих се изграђени модел може потврдити. Пошто је сврха модела дескриптивна, наиме да открије принципе и претпоставке на којима се заснива емпиријски амортизациони профил и да реконструише образац приказан у њему, може се рећи да конструисани модел обавља овај посао у веома задовољавајућој мери. Другим речима, оцена модела даје позитиван резултат. Наравно, да смо желели да модел узме у обзир и инфлацију – која није била укључена у представљени профил амортизације – ситуација би била другачија, јер би био потребан разрађенији модел.

Пример 5: Амортизација кредита

Завршне напомене

Оно што смо овде представили је део дескриптивног моделирања. Са тачке гледишта заинтересованог потрошача или финансијског аналитичара, желели смо да ухватимо и разумемо део финансијске стварности који је представљен табелом амортизације која се налази на интернету. Заснивајући наш модел на претпоставкама наведеним у 1, 2 и 3 горе, били смо успешни у овом подухвату.

Међутим, замислите да смо заузели тачку гледишта финансијске институције која је хтела да изгради одређену врсту кредита са својствима наведеним у 1, 2 и 3, што би онда били захтеви за пројектовање, добија се исти профил амортизације као резултат прескриптивног моделирања.

Овај пример илуструје како различите сврхе моделирања могу довести до истог модела, као што је такође дискутовано.