

Додатни поправни колоквијум из Комплексне анализе 1

25. август 2023. године

Први колоквијум

1. (а) **(4 поена)** Ако су z_1 и z_3 два наспрамна темена једног квадрата у комплексној равни, показати да су преостала два темена

$$z_{2/4} = \frac{1}{2}(z_1 + z_3) \pm i\frac{1}{2}(z_1 - z_3).$$

- (б) **(3 поена)** Доказати идентитет

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 4|a|^2$$

где је $|a| = |b|$ и a и b комплексни бројеви.

2. **(8 поена)** Одредити аналитичку функцију $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ чији је имагинарни део функција

$$v(x, y) = e^{x-y} \sin(x + y).$$

3. **(8 поена)** Одредити хармонијску функцију $u(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.

Други колоквијум

1. **(8 поена)** Пресликавањем $w = \frac{1}{e^{\frac{-2\pi i}{z-2i+1}} - 1} + \frac{1}{2}$ пресликати област

$$D_z = \{z \mid |z - 2i| > 1, \operatorname{Re} z > -1, \operatorname{Im} z > 2\}.$$

2. **(7 поена)** Пресликати област $D_z = \{z \mid \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z\}$ на област $D_w = \{w \mid |w + i| > 2\}$.

3. **(8 поена)** Функцију $f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}$ представити Лорановим редом у прстену чији је центар тачка 1, тако да конвергира у тачки $1 + \frac{3}{2}i$.

Трећи колоквијум

1. **(5 поена)** Коришћењем Кошијеве интегралне формуле, израчунати интеграл

$$\int_{|z-1|=1} \frac{z}{(z^2-1)^2(z-1)} dz.$$

2. **(5 поена)** Нека је $a \neq 2$ позитивна константа и C_a кружница полупречника a са центром у координатном почетку, оријентисана позитивно. Израчунати интеграл $\int_{C_a} \frac{z^2 + e^z}{z^2(z-2)} dz$.

3. **(5 поена)** Израчунати интеграл

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{(1-2a \cos x + a^2)(1-2b \cos x + b^2)} dx,$$

при чему је $0 < |a| < 1 < |b|$, $ab \neq 1$.

Напомена. Студенти који слушају предмет **Комплексна анализа** (по старом програму) могу освојити на првом колоквијуму највише **15 поена** а на другом колоквијуму највише **16 поена** (поени ће им бити скалирани).