Линеарна алгебра 1

трећe предавање

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Особине релације дељивости полинома

Дефиниција

За полином $s(x)$ *који задовољава једнакост*

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x),$$

кажемо да је количник при дељењу полинома $p(x)$ *полиномом* $q(x)$*, а за одговарајући полином* $r(x)$ *да је остатак при том дељењу. Ако је остатак нула полином, кажемо да је* $p(x)$ *дељиво са* $q(x)$ *и полином* $q(x)$ *зовемо делилац полинома* $p(x)$*.*

Особине релације дељивости полинома

Дефиниција

За полином $s(x)$ који задовољава једнакост

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x),$$

кажемо да је количник при дељењу полинома $p(x)$ полиномом $q(x)$, а за одговарајући полином $r(x)$ да је остатак при том дељењу. Ако је остатак нула полином, кажемо да је $p(x)$ дељиво са $q(x)$ и полином $q(x)$ зовемо делилац полинома $p(x)$.

Односно, имамо да

$$q(x) \mid p(x) \Leftrightarrow (\exists s(x) \in \mathbb{F}[x])p(x) = s(x) \cdot q(x).$$

Теорема

За произвољне полиноме $p(x), q(x), t(x) \in \mathbb{F}[x]$ *важе тврђења:*

Теорема

За произвољне полиноме $p(x), q(x), t(x) \in \mathbb{F}[x]$ *важе тврђења:*

(a) $p(x) \mid p(x)$;

Теорема

За произвољне полиноме $p(x), q(x), t(x) \in \mathbb{F}[x]$ *важе тврђења:*

(а) $p(x) \mid p(x)$;

(б) $c \mid p(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

Теорема

За произвољне полиноме $p(x), q(x), t(x) \in \mathbb{F}[x]$ *важе тврђења:*

(а) $p(x) \mid p(x)$;

(б) $c \mid p(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(в) $p(x) \mid q(x) \Leftrightarrow p(x) \mid c \cdot q(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

Теорема

За произвољне полиноме $p(x), q(x), t(x) \in \mathbb{F}[x]$ *важе тврђења:*

(а) $p(x) \mid p(x)$;

(б) $c \mid p(x)$ за свако $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(в) $p(x) \mid q(x) \Leftrightarrow p(x) \mid c \cdot q(x)$ за свако $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(г) $p(x) \mid q(x) \Leftrightarrow c \cdot p(x) \mid q(x)$ за свако $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

Теорема

За произвољне полиноме $p(x), q(x), t(x) \in \mathbb{F}[x]$ *важе тврђења:*

(а) $p(x) \mid p(x)$;

(б) $c \mid p(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(в) $p(x) \mid q(x) \Leftrightarrow p(x) \mid c \cdot q(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(г) $p(x) \mid q(x) \Leftrightarrow c \cdot p(x) \mid q(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(д) *Ако* $q(x) \mid p(x)$ *и* $p(x) \mid q(x)$, *тада је* $p(x) = c \cdot q(x)$ *за неко* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

Теорема

За произвољне полиноме $p(x), q(x), t(x) \in \mathbb{F}[x]$ важе тврђења:

(а) $p(x) \mid p(x)$;

(б) $c \mid p(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(в) $p(x) \mid q(x) \Leftrightarrow p(x) \mid c \cdot q(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(г) $p(x) \mid q(x) \Leftrightarrow c \cdot p(x) \mid q(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(д) *Ако* $q(x) \mid p(x)$ *и* $p(x) \mid q(x)$*, тада је* $p(x) = c \cdot q(x)$ *за неко* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(ђ) *Ако* $t(x) \mid q(x)$ *и* $q(x) \mid p(x)$*, тада* $t(x) \mid p(x)$;

Теорема

За произвољне полиноме $p(x), q(x), t(x) \in \mathbb{F}[x]$ *важе тврђења:*

(а) $p(x) \mid p(x)$;

(б) $c \mid p(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(в) $p(x) \mid q(x) \Leftrightarrow p(x) \mid c \cdot q(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(г) $p(x) \mid q(x) \Leftrightarrow c \cdot p(x) \mid q(x)$ *за свако* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(д) *Ако* $q(x) \mid p(x)$ *и* $p(x) \mid q(x)$, *тада је* $p(x) = c \cdot q(x)$ *за неко* $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(ђ) *Ако* $t(x) \mid q(x)$ *и* $q(x) \mid p(x)$, *тада* $t(x) \mid p(x)$;

(е) *Ако* $t(x) \mid p(x)$ *и* $t(x) \mid q(x)$, *тада* $t(x) \mid u(x) \cdot p(x) + v(x) \cdot q(x)$ *за свако* $u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Доказ. (а) Тврђење очигледно важи,

Доказ. (а) Тврђење очигледно важи, јер постоји $1 \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $p(x) = 1 \cdot p(x)$.

Доказ. (а) Тврђење очигледно важи, јер постоји $1 \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $p(x) = 1 \cdot p(x)$.

(б) Како је $p(x) = (\frac{1}{c}p(x)) \cdot c$

Доказ. (а) Тврђење очигледно важи, јер постоји $1 \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $p(x) = 1 \cdot p(x)$.

(б) Како је $p(x) = (\frac{1}{c}p(x)) \cdot c$ и при томе важи да $\frac{1}{c}p(x) \in \mathbb{F}[x]$,

Доказ. (а) Тврђење очигледно важи, јер постоји $1 \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $p(x) = 1 \cdot p(x)$.

(б) Како је $p(x) = (\frac{1}{c}p(x)) \cdot c$ и при томе важи да $\frac{1}{c}p(x) \in \mathbb{F}[x]$, закључујемо да $c \mid p(x)$.

Доказ. (а) Тврђење очигледно важи, јер постоји $1 \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $p(x) = 1 \cdot p(x)$.

(б) Како је $p(x) = (\frac{1}{c}p(x)) \cdot c$ и при томе важи да $\frac{1}{c}p(x) \in \mathbb{F}[x]$, закључујемо да $c \mid p(x)$.

(в) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$.

Доказ. (а) Тврђење очигледно важи, јер постоји $1 \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $p(x) = 1 \cdot p(x)$.

(б) Како је $p(x) = (\frac{1}{c}p(x)) \cdot c$ и при томе важи да $\frac{1}{c}p(x) \in \mathbb{F}[x]$, закључујемо да $c \mid p(x)$.

(в) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $c \cdot q(x) = c \cdot (s(x) \cdot p(x)) = (c \cdot s(x)) \cdot p(x)$, то закључујемо да $p(x) \mid c \cdot q(x)$.

Доказ. (а) Тврђење очигледно важи, јер постоји $1 \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $p(x) = 1 \cdot p(x)$.

(б) Како је $p(x) = (\frac{1}{c}p(x)) \cdot c$ и при томе важи да $\frac{1}{c}p(x) \in \mathbb{F}[x]$, закључујемо да $c \mid p(x)$.

(в) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $c \cdot q(x) = c \cdot (s(x) \cdot p(x)) = (c \cdot s(x)) \cdot p(x)$, то закључујемо да $p(x) \mid c \cdot q(x)$.

Обратно, нека $p(x) \mid c \cdot q(x)$,

Доказ. (а) Тврђење очигледно важи, јер постоји $1 \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $p(x) = 1 \cdot p(x)$.

(б) Како је $p(x) = (\frac{1}{c}p(x)) \cdot c$ и при томе важи да $\frac{1}{c}p(x) \in \mathbb{F}[x]$, закључујемо да $c \mid p(x)$.

(в) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $c \cdot q(x) = c \cdot (s(x) \cdot p(x)) = (c \cdot s(x)) \cdot p(x)$, то закључујемо да $p(x) \mid c \cdot q(x)$.

Обратно, нека $p(x) \mid c \cdot q(x)$, а то значи да постоји $s_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $c \cdot q(x) = s_1(x) \cdot p(x)$.

Доказ. (а) Тврђење очигледно важи, јер постоји $1 \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $p(x) = 1 \cdot p(x)$.

(б) Како је $p(x) = (\frac{1}{c}p(x)) \cdot c$ и при томе важи да $\frac{1}{c}p(x) \in \mathbb{F}[x]$, закључујемо да $c \mid p(x)$.

(в) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $c \cdot q(x) = c \cdot (s(x) \cdot p(x)) = (c \cdot s(x)) \cdot p(x)$, то закључујемо да $p(x) \mid c \cdot q(x)$.

Обратно, нека $p(x) \mid c \cdot q(x)$, а то значи да постоји $s_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $c \cdot q(x) = s_1(x) \cdot p(x)$. Имамо да је $q(x) = (\frac{1}{c} \cdot s_1(x)) \cdot p(x)$, па закључујемо да $p(x) \mid q(x)$.

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$,

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$.

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $q(x) = (\frac{1}{c}s(x)) \cdot (cp(x))$,

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $q(x) = (\frac{1}{c}s(x)) \cdot (cp(x))$, то закључујемо да $c \cdot p(x) \mid q(x)$.

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $q(x) = (\frac{1}{c}s(x)) \cdot (cp(x))$, то закључујемо да $c \cdot p(x) \mid q(x)$.

Обратно, нека $c \cdot p(x) \mid q(x)$,

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $q(x) = (\frac{1}{c}s(x)) \cdot (cp(x))$, то закључујемо да $c \cdot p(x) \mid q(x)$.

Обратно, нека $c \cdot p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s_1(x) \cdot cp(x)$.

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $q(x) = (\frac{1}{c}s(x)) \cdot (cp(x))$, то закључујемо да $c \cdot p(x) \mid q(x)$.

Обратно, нека $c \cdot p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s_1(x) \cdot cp(x)$. Имамо да је $q(x) = (cs_1(x)) \cdot p(x)$,

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $q(x) = (\frac{1}{c}s(x)) \cdot (cp(x))$, то закључујемо да $c \cdot p(x) \mid q(x)$.

Обратно, нека $c \cdot p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s_1(x) \cdot cp(x)$. Имамо да је $q(x) = (cs_1(x)) \cdot p(x)$, па закључујемо да $p(x) \mid q(x)$.

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $q(x) = (\frac{1}{c}s(x)) \cdot (cp(x))$, то закључујемо да $c \cdot p(x) \mid q(x)$.

Обратно, нека $c \cdot p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s_1(x) \cdot cp(x)$. Имамо да је $q(x) = (cs_1(x)) \cdot p(x)$, па закључујемо да $p(x) \mid q(x)$.

(д) Нека $q(x) \mid p(x)$ и $p(x) \mid q(x)$.

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $q(x) = (\frac{1}{c}s(x)) \cdot (cp(x))$, то закључујемо да $c \cdot p(x) \mid q(x)$.

Обратно, нека $c \cdot p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s_1(x) \cdot cp(x)$. Имамо да је $q(x) = (cs_1(x)) \cdot p(x)$, па закључујемо да $p(x) \mid q(x)$.

(д) Нека $q(x) \mid p(x)$ и $p(x) \mid q(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot p(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$.

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $q(x) = (\frac{1}{c}s(x)) \cdot (cp(x))$, то закључујемо да $c \cdot p(x) \mid q(x)$.

Обратно, нека $c \cdot p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s_1(x) \cdot cp(x)$. Имамо да је $q(x) = (cs_1(x)) \cdot p(x)$, па закључујемо да $p(x) \mid q(x)$.

(д) Нека $q(x) \mid p(x)$ и $p(x) \mid q(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot p(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$. Дакле, важи да је $s_1(x) \cdot s_2(x) = 1$,

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $q(x) = (\frac{1}{c}s(x)) \cdot (cp(x))$, то закључујемо да $c \cdot p(x) \mid q(x)$.

Обратно, нека $c \cdot p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s_1(x) \cdot cp(x)$. Имамо да је $q(x) = (cs_1(x)) \cdot p(x)$, па закључујемо да $p(x) \mid q(x)$.

(д) Нека $q(x) \mid p(x)$ и $p(x) \mid q(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot p(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$. Дакле, важи да је $s_1(x) \cdot s_2(x) = 1$, односно имамо да је $\deg s_1(x) = \deg s_2(x) = 0$, јер су међусобно инверзни.

(г) Нека $p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s(x) \cdot p(x)$. Како је $q(x) = (\frac{1}{c}s(x)) \cdot (cp(x))$, то закључујемо да $c \cdot p(x) \mid q(x)$.

Обратно, нека $c \cdot p(x) \mid q(x)$, а то значи да постоји $s_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $q(x) = s_1(x) \cdot cp(x)$. Имамо да је $q(x) = (cs_1(x)) \cdot p(x)$, па закључујемо да $p(x) \mid q(x)$.

(д) Нека $q(x) \mid p(x)$ и $p(x) \mid q(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot p(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$. Дакле, важи да је $s_1(x) \cdot s_2(x) = 1$, односно имамо да је $\deg s_1(x) = \deg s_2(x) = 0$, јер су међусобно инверзни. Дакле, важи да је $s_2(x) = c$, па је $p(x) = cq(x)$.

(ђ) Нека $t(x) \mid q(x)$ и $q(x) \mid p(x)$.

(ђ) Нека $t(x) \mid q(x)$ и $q(x) \mid p(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot t(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$.

(ђ) Нека $t(x) \mid q(x)$ и $q(x) \mid p(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot t(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$. Дакле, имамо да је $p(x) = s_2(x) \cdot s_1(x) \cdot t(x)$, (ђ) Нека $t(x) \mid q(x)$ и $q(x) \mid p(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot t(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$. Дакле, имамо да је $p(x) = s_2(x) \cdot s_1(x) \cdot t(x)$, односно $p(x) = s(x) \cdot t(x)$ где је $s_2(x) \cdot s_1(x) = s(x)$.

(ђ) Нека $t(x) \mid q(x)$ и $q(x) \mid p(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot t(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$. Дакле, имамо да је $p(x) = s_2(x) \cdot s_1(x) \cdot t(x)$, односно $p(x) = s(x) \cdot t(x)$ где је $s_2(x) \cdot s_1(x) = s(x)$. Коначно закључујемо да $t(x) \mid p(x)$.

(ђ) Нека $t(x) \mid q(x)$ и $q(x) \mid p(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot t(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$. Дакле, имамо да је $p(x) = s_2(x) \cdot s_1(x) \cdot t(x)$, односно $p(x) = s(x) \cdot t(x)$ где је $s_2(x) \cdot s_1(x) = s(x)$. Коначно закључујемо да $t(x) \mid p(x)$.

(е) Нека $t(x) \mid p(x)$ и $t(x) \mid q(x)$.

(ђ) Нека $t(x) \mid q(x)$ и $q(x) \mid p(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot t(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$. Дакле, имамо да је $p(x) = s_2(x) \cdot s_1(x) \cdot t(x)$, односно $p(x) = s(x) \cdot t(x)$ где је $s_2(x) \cdot s_1(x) = s(x)$. Коначно закључујемо да $t(x) \mid p(x)$.

(е) Нека $t(x) \mid p(x)$ и $t(x) \mid q(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $p(x) = s_1(x) \cdot t(x)$ и $q(x) = s_2(x) \cdot t(x)$.

(ђ) Нека $t(x) \mid q(x)$ и $q(x) \mid p(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot t(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$. Дакле, имамо да је $p(x) = s_2(x) \cdot s_1(x) \cdot t(x)$, односно $p(x) = s(x) \cdot t(x)$ где је $s_2(x) \cdot s_1(x) = s(x)$. Коначно закључујемо да $t(x) \mid p(x)$.

(е) Нека $t(x) \mid p(x)$ и $t(x) \mid q(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $p(x) = s_1(x) \cdot t(x)$ и $q(x) = s_2(x) \cdot t(x)$. За све $u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$ важи да је

$$u(x) \cdot p(x) + v(x) \cdot q(x) = (u(x) \cdot s_1(x) + v(x) \cdot s_2(x)) \cdot t(x).$$

(ђ) Нека $t(x) \mid q(x)$ и $q(x) \mid p(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $q(x) = s_1(x) \cdot t(x)$ и $p(x) = s_2(x) \cdot q(x)$. Дакле, имамо да је $p(x) = s_2(x) \cdot s_1(x) \cdot t(x)$, односно $p(x) = s(x) \cdot t(x)$ где је $s_2(x) \cdot s_1(x) = s(x)$. Коначно закључујемо да $t(x) \mid p(x)$.

(е) Нека $t(x) \mid p(x)$ и $t(x) \mid q(x)$. Тада постоје $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ такво да је $p(x) = s_1(x) \cdot t(x)$ и $q(x) = s_2(x) \cdot t(x)$. За све $u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$ важи да је

$$u(x) \cdot p(x) + v(x) \cdot q(x) = (u(x) \cdot s_1(x) + v(x) \cdot s_2(x)) \cdot t(x).$$

Дакле, важи да $t(x) \mid u(x) \cdot p(x) + v(x) \cdot q(x)$. $\square$

Безуов став

Нека je $a \in \mathbb{F}$ и $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Тада je

$$p(a) = a_0 + a_1 a + \cdots + a_n a^n$$

један елемент у пољу $\mathbb{F}$.

Безуов став

Нека је $a \in \mathbb{F}$ и $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Тада је

$$p(a) = a_0 + a_1 a + \cdots + a_n a^n$$

један елемент у пољу $\mathbb{F}$. За $p(a)$ кажемо да је вредност полинома у тачки $x = a$.

Безуов став

Нека је $a \in \mathbb{F}$ и $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Тада је

$$p(a) = a_0 + a_1 a + \cdots + a_n a^n$$

један елемент у пољу $\mathbb{F}$. За $p(a)$ кажемо да је вредност полинома у тачки $x = a$.

За елемент $a \in \mathbb{F}$ кажемо да је нула полинома $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ ако је вредност полинома у тој тачки једнака нули, тј. $p(a) = 0$.

Безуов став

Нека је $a \in \mathbb{F}$ и $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Тада је

$$p(a) = a_0 + a_1 a + \cdots + a_n a^n$$

један елемент у пољу $\mathbb{F}$. За $p(a)$ кажемо да је вредност полинома у тачки $x = a$.

За елемент $a \in \mathbb{F}$ кажемо да је нула полинома $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ ако је вредност полинома у тој тачки једнака нули, тј. $p(a) = 0$.
У том случају, за полином првог степена $x - a$ кажемо да је линеарни фактор.

Теорема

Ако је a нула полинома $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, тада је $p(x)$ дељив линеарним фактором $x - a$.

Теорема

Ако је a нула полинома $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, тада је $p(x)$ дељив линеарним фактором $x - a$.

Доказ. Како је

$$x^k - a^k = (x^{k-1} + x^{k-2}a + \cdots + xa^{k-2} + a^{k-1})(x - a),$$

Теорема

Ако је a нула полинома $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, тада је $p(x)$ дељив линеарним фактором $x - a$.

Доказ. Како је

$$x^k - a^k = (x^{k-1} + x^{k-2}a + \cdots + xa^{k-2} + a^{k-1})(x - a),$$

имамо

$$p(x) - p(a) = a_1(x - a) + a_2(x^2 - a^2) + \cdots + a_n(x^n - a^n)$$

Теорема

Ако је a нула полинома $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, тада је $p(x)$ дељив линеарним фактором $x - a$.

Доказ. Како је

$$x^k - a^k = (x^{k-1} + x^{k-2}a + \cdots + xa^{k-2} + a^{k-1})(x - a),$$

имамо

$$p(x) - p(a) = a_1(x - a) + a_2(x^2 - a^2) + \cdots + a_n(x^n - a^n)$$

Теорема

Ако је a нула полинома $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, тада је $p(x)$ дељив линеарним фактором $x - a$.

Доказ. Како је

$$x^k - a^k = (x^{k-1} + x^{k-2}a + \cdots + xa^{k-2} + a^{k-1})(x - a),$$

имамо

$$\begin{aligned} p(x) - p(a) = & a_1(x - a) + a_2(x^2 - a^2) + \cdots + a_n(x^n - a^n) \\ = & [a_1 + a_2(x + a) + \cdots + a_n(x^{n-1} + \cdots + a^{n-1})](x - a) \\ = & q(x)(x - a), \end{aligned}$$

где је $q(x)$ полином степена $n - 1$.

Теорема

Ако је a нула полинома $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, тада је $p(x)$ дељив линеарним фактором $x - a$.

Доказ. Како је

$$x^k - a^k = (x^{k-1} + x^{k-2}a + \cdots + xa^{k-2} + a^{k-1})(x - a),$$

имамо

$$\begin{aligned} p(x) - p(a) = & a_1(x - a) + a_2(x^2 - a^2) + \cdots + a_n(x^n - a^n) \\ = & [a_1 + a_2(x + a) + \cdots + a_n(x^{n-1} + \cdots + a^{n-1})](x - a) \\ = & q(x)(x - a), \end{aligned}$$

где је $q(x)$ полином степена $n - 1$. С друге стране, по претпоставци је $p(a) = 0$, па имамо да је $p(x) = q(x)(x - a)$,

Теорема

Ако је a нула полинома $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, тада је $p(x)$ дељив линеарним фактором $x - a$.

Доказ. Како је

$$x^k - a^k = (x^{k-1} + x^{k-2}a + \cdots + xa^{k-2} + a^{k-1})(x - a),$$

имамо

$$\begin{aligned} p(x) - p(a) =& a_1(x - a) + a_2(x^2 - a^2) + \cdots + a_n(x^n - a^n) \\ =& [a_1 + a_2(x + a) + \cdots + a_n(x^{n-1} + \cdots + a^{n-1})](x - a) \\ =& q(x)(x - a), \end{aligned}$$

где је $q(x)$ полином степена $n - 1$. С друге стране, по претпоставци је $p(a) = 0$, па имамо да је $p(x) = q(x)(x - a)$, што значи да је полином $p(x)$ дељив линеарним фактором $x - a$. $\square$

Следеће тврђење је познато као Безуов став:

Теорема

Остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x - a$ једнак је вредности полинома $p(a)$.

Следеће тврђење је познато као Безуов став:

Теорема

Остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x - a$ једнак је вредности полинома $p(a)$.

Доказ. Како је $q(x) = x - a$ полином првог степена то постоји јединствени полином $s(x)$ и константа r (полином степена нула) тако да је
$$p(x) = s(x)(x - a) + r.$$

Следеће тврђење је познато као Безуов став:

Теорема

Остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x-a$ једнак је вредности полинома $p(a)$.

Доказ. Како је $q(x)=x-a$ полином првог степена то постоји јединствени полином $s(x)$ и константа r (полином степена нула) тако да је

$$p(x)=s(x)(x-a)+r.$$

Стављајући $x=a$ добијамо да је $r=p(a)$. $\square$

Следеће тврђење је познато као Безуов став:

Теорема

Остатак при дељењу полинома $p(x)$ *са* $x - a$ *једнак је вредности полинома* $p(a)$.

Доказ. Како је $q(x) = x - a$ полином првог степена то постоји јединствени полином $s(x)$ и константа r (полином степена нула) тако да је

$$p(x) = s(x)(x - a) + r.$$

Стављајући $x = a$ добијамо да је $r = p(a)$. $\square$

Коришћењем претходне теореме, сваки полином $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ степена n можемо на јединствен начин представити (разложити) по степенима од $x - a$,

Следеће тврђење је познато као Безуов став:

Теорема

Остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x - a$ једнак је вредности полинома $p(a)$.

Доказ. Како је $q(x) = x - a$ полином првог степена то постоји јединствени полином $s(x)$ и константа r (полином степена нула) тако да је

$$p(x) = s(x)(x - a) + r.$$

Стављајући $x = a$ добијамо да је $r = p(a)$. □

Коришћењем претходне теореме, сваки полином $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ степена n можемо на јединствен начин представити (разложити) по степенима од $x - a$, тј.

$$p(x) = A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + \cdots + A_n(x - a)^n,$$

где су A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ елементи поља $\mathbb{F}$.

Заиста, на основу претходне теореме имамо

$$p(x) = A_0 + p_1(x)(x - a),$$

где смо ставили $A_0 = r = p(a)$ и $p_1(x) = s(x)$.

Заиста, на основу претходне теореме имамо

$$p(x) = A_0 + p_1(x)(x - a),$$

где смо ставили $A_0 = r = p(a)$ и $p_1(x) = s(x)$. Ако је $p_1(x)$ полином нултог степена тражени развој је добијен.

Заиста, на основу претходне теореме имамо

$$p(x) = A_0 + p_1(x)(x - a),$$

где смо ставили $A_0 = r = p(a)$ и $p_1(x) = s(x)$. Ако је $p_1(x)$ полином нултог степена тражени развој је добијен. У противном случају, делимо полином $p_1(x)$ са $x - a$, добијајући притом да је

$$p_1(x) = A_1 + p_2(x)(x - a),$$

Заиста, на основу претходне теореме имамо

$$p(x) = A_0 + p_1(x)(x - a),$$

где смо ставили $A_0 = r = p(a)$ и $p_1(x) = s(x)$. Ако је $p_1(x)$ полином нултог степена тражени развој је добијен. У противном случају, делимо полином $p_1(x)$ са $x - a$, добијајући притом да је

$$p_1(x) = A_1 + p_2(x)(x - a),$$

где је $A_1 = p_1(a)$.

Заиста, на основу претходне теореме имамо

$$p(x) = A_0 + p_1(x)(x - a),$$

где смо ставили $A_0 = r = p(a)$ и $p_1(x) = s(x)$. Ако је $p_1(x)$ полином нултог степена тражени развој је добијен. У противном случају, делимо полином $p_1(x)$ са $x - a$, добијајући притом да је

$$p_1(x) = A_1 + p_2(x)(x - a),$$

где је $A_1 = p_1(a)$. На овај начин, добијамо да је

$$p(x) = A_0 + A_1(x - a) + p_2(x)(x - a)^2.$$

Заиста, на основу претходне теореме имамо

$$p(x) = A_0 + p_1(x)(x-a),$$

где смо ставили $A_0 = r = p(a)$ и $p_1(x) = s(x)$. Ако је $p_1(x)$ полином нултог степена тражени развој је добијен. У противном случају, делимо полином $p_1(x)$ са $x-a$, добијајући притом да је

$$p_1(x) = A_1 + p_2(x)(x-a),$$

где је $A_1 = p_1(a)$. На овај начин, добијамо да је

$$p(x) = A_0 + A_1(x-a) + p_2(x)(x-a)^2.$$

Настављајући овај поступак добићемо развој

$$p(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + A_n(x-a)^n.$$

Последица 1. Ако је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ и ако су $c_1, c_2, \ldots, c_n$ различити корени полинома $p(x)$, тада је

$$p(x) = a_n(x - c_1) \ldots (x - c_n) \quad \text{(факторизација полинома).}$$

Последица 1. Ако је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0, n \geq 1$ и ако су $c_1, c_2, \ldots, c_n$ различити корени полинома $p(x)$, тада је

$$p(x) = a_n(x - c_1)\ldots(x - c_n) \quad \text{(факторизација полинома).}$$

Доказ. Доказ индукцијом по степену n полинома $p(x)$.

Последица 1. Ако је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ и ако су $c_1, c_2, \ldots, c_n$ различити корени полинома $p(x)$, тада је

$$p(x) = a_n(x - c_1) \ldots (x - c_n) \quad \text{(факторизација полинома).}$$

Доказ. Доказ индукцијом по степену n полинома $p(x)$.

Покажимо да тврђење важи за $n = 1$.

Последица 1. Ако је $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ и ако су $c_1, c_2, \ldots, c_n$ различити корени полинома $p(x)$, тада је

$$p(x) = a_n(x - c_1)\ldots(x - c_n) \quad \text{(факторизација полинома).}$$

Доказ. Доказ индукцијом по степену n полинома $p(x)$.

Покажимо да тврђење важи за $n = 1$. Нека је c_1 корен полинома $p(x) = a_0 + a_1x$.

Последица 1. Ако је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ и ако су $c_1, c_2, \ldots, c_n$ различити корени полинома $p(x)$, тада је

$$p(x) = a_n(x - c_1)\ldots(x - c_n) \quad \text{(факторизација полинома).}$$

Доказ. Доказ индукцијом по степену n полинома $p(x)$.

Покажимо да тврђење важи за $n = 1$. Нека је c_1 корен полинома $p(x) = a_0 + a_1 x$. Тада $a_0 + a_1 c_1 = 0$, па је $a_0 = -a_1 c_1$,

Последица 1. Ако је $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ и ако су $c_1, c_2, \ldots, c_n$ различити корени полинома $p(x)$, тада је

$$p(x) = a_n(x - c_1)\ldots(x - c_n) \quad \text{(факторизација полинома).}$$

Доказ. Доказ индукцијом по степену n полинома $p(x)$.

Покажимо да тврђење важи за $n = 1$. Нека је c_1 корен полинома $p(x) = a_0 + a_1x$. Тада $a_0 + a_1c_1 = 0$, па је $a_0 = -a_1c_1$, одакле следи $p(x) = -a_1c_1 + a_1x = a_1(x - c_1)$.

Последица 1. Ако је $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ и ако су $c_1, c_2, \dots, c_n$ различити корени полинома $p(x)$, тада је

$$p(x) = a_n(x - c_1)\dots(x - c_n) \quad \text{(факторизација полинома).}$$

Доказ. Доказ индукцијом по степену n полинома $p(x)$.

Покажимо да тврђење важи за $n = 1$. Нека је c_1 корен полинома $p(x) = a_0 + a_1x$. Тада $a_0 + a_1c_1 = 0$, па је $a_0 = -a_1c_1$, одакле следи $p(x) = -a_1c_1 + a_1x = a_1(x - c_1)$.

Претпоставимо да је тврђење тачно за све полиноме степена мањег од n, где је $n > 1$.

Пошто је c_1 корен полинома $p(x)$ који је степена n, важи да је $x - c_1 \mid p(x)$,

Пошто је c_1 корен полинома $p(x)$ који је степена n, важи да је $x - c_1 \mid p(x)$, па постоји полином $q \in \mathbb{F}[x]$, тако да $p(x) = q(x)(x - c_1)$.

Пошто је c_1 корен полинома $p(x)$ који је степена n, важи да је $x - c_1 \mid p(x)$, па постоји полином $q \in \mathbb{F}[x]$, тако да $p(x) = q(x)(x - c_1)$.
Степен полинома $q(x)$ је $n - 1$, а водећи коефицијент a_n.

Пошто је c_1 корен полинома $p(x)$ који је степена n, важи да је $x - c_1 \mid p(x)$, па постоји полином $q \in \mathbb{F}[x]$, тако да $p(x) = q(x)(x - c_1)$.
Степен полинома $q(x)$ је $n - 1$, а водећи коефицијент a_n. Тада важи и да је $0 = p(c_j) = (c_j - c_1)q(c_j)$ ($j = 2, \ldots, n$),

Пошто је c_1 корен полинома $p(x)$ који је степена n, важи да је $x - c_1 \mid p(x)$, па постоји полином $q \in \mathbb{F}[x]$, тако да $p(x) = q(x)(x - c_1)$.
Степен полинома $q(x)$ је $n - 1$, а водећи коефицијент a_n. Тада важи и да је $0 = p(c_j) = (c_j - c_1)q(c_j)$ ($j = 2, \dots, n$), а како је $c_j - c_1 \neq 0$, за $j \neq 1$,

Пошто је c_1 корен полинома $p(x)$ који је степена n, важи да је $x - c_1 \mid p(x)$, па постоји полином $q \in \mathbb{F}[x]$, тако да $p(x) = q(x)(x - c_1)$.
Степен полинома $q(x)$ је $n - 1$, а водећи коефицијент a_n. Тада важи и да је $0 = p(c_j) = (c_j - c_1)q(c_j)$ ($j = 2, \ldots, n$), а како је $c_j - c_1 \neq 0$, за $j \neq 1$, следи да је $q(c_j) = 0$ за сваки $j = 2, \ldots, n$.

Пошто је c_1 корен полинома $p(x)$ који је степена n, важи да је $x - c_1 \mid p(x)$, па постоји полином $q \in \mathbb{F}[x]$, тако да $p(x) = q(x)(x - c_1)$.
Степен полинома $q(x)$ је $n - 1$, а водећи коефицијент a_n. Тада важи и да је $0 = p(c_j) = (c_j - c_1)q(c_j)$ ($j = 2, \ldots, n$), а како је $c_j - c_1 \neq 0$, за $j \neq 1$, следи да је $q(c_j) = 0$ за сваки $j = 2, \ldots, n$.
Дакле, $q(x)$ има $n - 1$ различитих корена $c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$.

Пошто је c_1 корен полинома $p(x)$ који је степена n, важи да је $x - c_1 \mid p(x)$, па постоји полином $q \in \mathbb{F}[x]$, тако да $p(x) = q(x)(x - c_1)$.
Степен полинома $q(x)$ је $n - 1$, а водећи коефицијент a_n. Тада важи и да је $0 = p(c_j) = (c_j - c_1)q(c_j)$ ($j = 2, \ldots, n$), а како је $c_j - c_1 \neq 0$, за $j \neq 1$, следи да је $q(c_j) = 0$ за сваки $j = 2, \ldots, n$.
Дакле, $q(x)$ има $n - 1$ различитих корена $c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$.
Према индукцијској хипотези следи $q(x) = a_n(x - c_2) \ldots (x - c_n)$.

Пошто је c_1 корен полинома $p(x)$ који је степена n, важи да је $x - c_1 \mid p(x)$, па постоји полином $q \in \mathbb{F}[x]$, тако да $p(x) = q(x)(x - c_1)$.
Степен полинома $q(x)$ је $n - 1$, а водећи коефицијент a_n. Тада важи и да је $0 = p(c_j) = (c_j - c_1)q(c_j)$ ($j = 2, \dots, n$), а како је $c_j - c_1 \neq 0$, за $j \neq 1$, следи да је $q(c_j) = 0$ за сваки $j = 2, \dots, n$.
Дакле, $q(x)$ има $n - 1$ различитих корена $c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}$.
Према индукцијској хипотези следи $q(x) = a_n(x - c_2) \dots (x - c_n)$.
Заменом у $p(x) = q(x)(x - c_1)$

Пошто је c_1 корен полинома $p(x)$ који је степена n, важи да је $x - c_1 \mid p(x)$, па постоји полином $q \in \mathbb{F}[x]$, тако да $p(x) = q(x)(x - c_1)$.
Степен полинома $q(x)$ је $n - 1$, а водећи коефицијент a_n. Тада важи и да је $0 = p(c_j) = (c_j - c_1)q(c_j)$ ($j = 2, \dots, n$), а како је $c_j - c_1 \neq 0$, за $j \neq 1$, следи да је $q(c_j) = 0$ за сваки $j = 2, \dots, n$.
Дакле, $q(x)$ има $n - 1$ различитих корена $c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}$.
Према индукцијској хипотези следи $q(x) = a_n(x - c_2) \dots (x - c_n)$.
Заменом у $p(x) = q(x)(x - c_1)$ добијамо

$$p(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n),$$

што је и требало показати. $\square$

Последица 2. Полином $p(x)$ степена $n \geq 1$ не може имати више од n различитих корена.

Последица 2. Полином $p(x)$ степена $n \geq 1$ не може имати више од n различитих корена.

Доказ. Претпоставимо супротно,

Последица 2. Полином $p(x)$ степена $n \geq 1$ не може имати више од n различитих корена.

Доказ. Претпоставимо супротно, да полином $p(x)$ са водећим коефицијентом $a_n \neq 0$, има $n+1$ различитих корена $c_1, \ldots, c_n, c$.

Последица 2. Полином $p(x)$ степена $n \geq 1$ не може имати више од n различитих корена.

Доказ. Претпоставимо супротно, да полином $p(x)$ са водећим коефицијентом $a_n \neq 0$, има $n+1$ различитих корена $c_1, \ldots, c_n, c$. Тада је, по последици 1,

$$p(x) = a_n(x - c_1)\ldots(x - c_n),$$

Последица 2. Полином $p(x)$ степена $n \geq 1$ не може имати више од n различитих корена.

Доказ. Претпоставимо супротно, да полином $p(x)$ са водећим коефицијентом $a_n \neq 0$, има $n+1$ различитих корена $c_1, \dots, c_n, c$. Тада је, по последици 1,

$$p(x) = a_n(x - c_1)\dots(x - c_n),$$

па је

$$0 = p(c) = \underbrace{a_n}_{\neq 0}\underbrace{(c - c_1)}_{\neq 0}\underbrace{(c - c_2)}_{\neq 0}\dots\underbrace{(c - c_n)}_{\neq 0},$$

Последица 2. Полином $p(x)$ степена $n \geq 1$ не може имати више од n различитих корена.

Доказ. Претпоставимо супротно, да полином $p(x)$ са водећим коефицијентом $a_n \neq 0$, има $n+1$ различитих корена $c_1, \dots, c_n, c$. Тада је, по последици 1,

$$p(x) = a_n(x - c_1)\dots(x - c_n),$$

па је

$$0 = p(c) = \underbrace{a_n}_{\neq 0}\underbrace{(c - c_1)}_{\neq 0}\underbrace{(c - c_2)}_{\neq 0}\dots\underbrace{(c - c_n)}_{\neq 0},$$

што је контрадикција. □

Последица 3. Ако су $p(x), q(x)$ полиноми степена $\leq n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ различити елементи поља $\mathbb{F}$ такви да $p(c_i) = q(c_i),\ i = 1, 2, \ldots n + 1$, онда је $p(x) = q(x)$.

Последица 3. Ако су $p(x), q(x)$ полиноми степена $\leq n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ различити елементи поља $\mathbb{F}$ такви да $p(c_i) = q(c_i),\ i = 1, 2, \ldots n + 1$, онда је $p(x) = q(x)$.

Доказ. Ставимо да је $h(x) = p(x) - q(x)$ и претпоставимо да је $h(x) \neq 0$.

Последица 3. Ако су $p(x), q(x)$ полиноми степена $\leq n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ различити елементи поља $\mathbb{F}$ такви да $p(c_i) = q(c_i),\ i = 1, 2, \ldots n + 1$, онда је $p(x) = q(x)$.

Доказ. Ставимо да је $h(x) = p(x) - q(x)$ и претпоставимо да је $h(x) \neq 0$. Имамо да је $\deg h(x) \leq \max\{\deg p(x), \deg q(x)\} \leq n$

Последица 3. Ако су $p(x), q(x)$ полиноми степена $\leq n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ различити елементи поља $\mathbb{F}$ такви да $p(c_i) = q(c_i),\ i = 1, 2, \ldots n + 1$, онда је $p(x) = q(x)$.

Доказ. Ставимо да је $h(x) = p(x) - q(x)$ и претпоставимо да је $h(x) \neq 0$. Имамо да је $\deg h(x) \leq \max\{\deg p(x), \deg q(x)\} \leq n$ и $h(c_i) = p(c_i) - q(c_i) = 0$, за свако $i = 1, \ldots, n + 1$.

Последица 3. Ако су $p(x), q(x)$ полиноми степена $\leq n$ и $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ различити елементи поља $\mathbb{F}$ такви да $p(c_i) = q(c_i),\ i = 1, 2, \dots n+1$, онда је $p(x) = q(x)$.

Доказ. Ставимо да је $h(x) = p(x) - q(x)$ и претпоставимо да је $h(x) \neq 0$. Имамо да је $\deg h(x) \leq \max\{\deg p(x), \deg q(x)\} \leq n$ и $h(c_i) = p(c_i) - q(c_i) = 0$, за свако $i = 1, \dots, n+1$.

Дакле, $h(x)$ има $n+1$ различитих корена у $\mathbb{F}$,

Последица 3. Ако су $p(x), q(x)$ полиноми степена $\leq n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ различити елементи поља $\mathbb{F}$ такви да $p(c_i) = q(c_i),\ i = 1, 2, \ldots n+1$, онда је $p(x) = q(x)$.

Доказ. Ставимо да је $h(x) = p(x) - q(x)$ и претпоставимо да је $h(x) \neq 0$. Имамо да је $\deg h(x) \leq \max\{\deg p(x), \deg q(x)\} \leq n$ и $h(c_i) = p(c_i) - q(c_i) = 0$, за свако $i = 1, \ldots, n+1$.

Дакле, $h(x)$ има $n+1$ различитих корена у $\mathbb{F}$, што је контрадикција са последицом 2.

Последица 3. Ако су $p(x), q(x)$ полиноми степена $\leq n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ различити елементи поља $\mathbb{F}$ такви да $p(c_i) = q(c_i),\ i = 1, 2, \ldots n+1$, онда је $p(x) = q(x)$.

Доказ. Ставимо да је $h(x) = p(x) - q(x)$ и претпоставимо да је $h(x) \neq 0$. Имамо да је $\deg h(x) \leq \max\{\deg p(x), \deg q(x)\} \leq n$ и $h(c_i) = p(c_i) - q(c_i) = 0$, за свако $i = 1, \ldots, n+1$.

Дакле, $h(x)$ има $n+1$ различитих корена у $\mathbb{F}$, што је контрадикција са последицом 2.
Дакле, $h(x) = 0$, тј. $p(x) = q(x)$. $\square$

Последица 4. Ако су $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ различити, а $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ произвољни елементи поља $\mathbb{F}$, тада постоји тачно један полином $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ степена $\leq n$ тако да $p(c_i) = b_i$ за $i = 1, \ldots, n+1$.

Последица 4. Ако су $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ различити, а $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ произвољни елементи поља $\mathbb{F}$, тада постоји тачно један полином $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ степена $\leq n$ тако да $p(c_i) = b_i$ за $i = 1, \ldots, n+1$.

Доказ. Егзистенција полинома $p(x)$.

Последица 4. Ако су $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ различити, а $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ произвољни елементи поља $\mathbb{F}$, тада постоји тачно један полином $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ степена $\leq n$ тако да $p(c_i) = b_i$ за $i = 1, \ldots, n+1$.

Доказ. Егзистенција полинома $p(x)$. Посматрајмо Лагранжов интерполациони полином, тј. полином облика:

Последица 4. Ако су $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ различити, а $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ произвољни елементи поља $\mathbb{F}$, тада постоји тачно један полином $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ степена $\leq n$ тако да $p(c_i) = b_i$ за $i = 1, \ldots, n+1$.

Доказ. Егзистенција полинома $p(x)$. Посматрајмо Лагранжов интерполациони полином, тј. полином облика:

$$
\begin{aligned}
p(x) = \quad & b_1 \cdot \frac{(x-c_2)(x-c_3)\cdots(x-c_{n+1})}{(c_1-c_2)(c_1-c_3)\ldots(c_1-c_{n+1})} \\
& + b_2 \cdot \frac{(x-c_1)(x-c_3)\cdots(x-c_{n+1})}{(c_2-c_1)(c_2-c_3)\ldots(c_2-c_{n+1})} \\
& + \cdots + b_{n+1} \cdot \frac{(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)}{(c_{n+1}-c_1)(c_{n+1}-c_2)\ldots(c_{n+1}-c_n)}.
\end{aligned}
$$

Полином $p(x)$ испуњава услове $p(c_i) = b_i,\ i = 1, \dots, n + 1$

Полином $p(x)$ испуњава услове $p(c_i) = b_i,\ i = 1, \ldots, n+1$ и $\deg p(x) \leq n$.

Полином $p(x)$ испуњава услове $p(c_i) = b_i,\ i = 1, \ldots, n+1$ и $\mathrm{deg} p(x) \leq n$.

Јединственост.

Полином $p(x)$ испуњава услове $p(c_i) = b_i,\ i = 1, \ldots, n+1$ и $\deg p(x) \leq n$.

Јединственост. Ако је $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $\deg q(x) \leq n$ и $q(c_i) = b_i$ ($i = 1, \ldots, n+1$),

Полином $p(x)$ испуњава услове $p(c_i) = b_i,\ i = 1, \ldots, n+1$ и $\deg p(x) \leq n$.

Јединственост. Ако је $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $\deg q(x) \leq n$ и $q(c_i) = b_i$ ($i = 1, \ldots, n+1$), према претходној последици следи $q(x) = p(x)$. $\square$

Полином $p(x)$ испуњава услове $p(c_i) = b_i,\ i = 1, \ldots, n+1$ и $\deg p(x) \leq n$.

Јединственост. Ако је $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $\deg q(x) \leq n$ и $q(c_i) = b_i$ ($i = 1, \ldots, n+1$), према претходној последици следи $q(x) = p(x)$. $\square$

Дакле, на основу претходне последице можемо закључити да је линеарни полином $p(x)$ одређен својим вредностима $p(c_0),\ p(c_1)$ у двема различитим тачкама $c_0 \neq c_1$.

Полином $p(x)$ испуњава услове $p(c_i) = b_i,\ i = 1, \dots, n+1$ и $\deg p(x) \leq n$.

Јединственост. Ако је $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $\deg q(x) \leq n$ и $q(c_i) = b_i$ ($i = 1, \dots, n+1$), према претходној последици следи $q(x) = p(x)$. $\square$

Дакле, на основу претходне последице можемо закључити да је линеарни полином $p(x)$ одређен својим вредностима $p(c_0),\ p(c_1)$ у двема различитим тачкама $c_0 \neq c_1$.

Квадратни полином је одређен својим вредностима у трима различитим тачкама.

Хорнерова шема и Виетове формуле

Дефиниција

Ако је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *произвољан полином из* $\mathbb{F}[x]$, *тада за полином*

$$p'(x) =$$

Хорнерова шема и Виетове формуле

Дефиниција

Ако је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *произвољан полином из* $\mathbb{F}[x]$, *тада за полином*

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} \in \mathbb{F}[x]$$

кажемо да је (први) извод полинома $p(x)$.

Хорнерова шема и Виетове формуле

Дефиниција

Ако је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *произвољан полином из* $\mathbb{F}[x]$, *тада за полином*

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} \in \mathbb{F}[x]$$

кажемо да је (први) извод полинома $p(x)$. *За пресликавање* $p(x) \mapsto p'(x)$ *кажемо да је диференцирање у прстену* $\mathbb{F}[x]$.

Хорнерова шема и Виетове формуле

Дефиниција

Ако је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *произвољан полином из* $\mathbb{F}[x]$, *тада за полином*

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} \in \mathbb{F}[x]$$

кажемо да је (први) извод полинома $p(x)$. *За пресликавање* $p(x) \mapsto p'(x)$ *кажемо да је диференцирање у прстену* $\mathbb{F}[x]$.

Виши изводи $p^{(k)}(x)$ дефинишу се рекурзивно;

Хорнерова шема и Виетове формуле

Дефиниција

Ако је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *произвољан полином из* $\mathbb{F}[x]$*, тада за полином*

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} \in \mathbb{F}[x]$$

кажемо да је (први) извод полинома $p(x)$*. За пресликавање* $p(x) \mapsto p'(x)$ *кажемо да је диференцирање у прстену* $\mathbb{F}[x]$*.*

Виши изводи $p^{(k)}(x)$ дефинишу се рекурзивно; на пример, извод полинома $p'(x)$ назива се други извод полинома $p(x)$, итд.

Хорнерова шема и Виетове формуле

Дефиниција

Ако је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *произвољан полином из* $\mathbb{F}[x]$*, тада за полином*

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} \in \mathbb{F}[x]$$

кажемо да је (први) извод полинома $p(x)$*. За пресликавање* $p(x) \mapsto p'(x)$ *кажемо да је диференцирање у прстену* $\mathbb{F}[x]$*.*

Виши изводи $p^{(k)}(x)$ дефинишу се рекурзивно; на пример, извод полинома $p'(x)$ назива се други извод полинома $p(x)$, итд.
По дефиницији, $p^{(0)}(x) = p(x)$.

Хорнерова шема и Виетове формуле

Дефиниција

Ако је $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ *произвољан полином из* $\mathbb{F}[x]$*, тада за полином*

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} \in \mathbb{F}[x]$$

кажемо да је (први) извод полинома $p(x)$*. За пресликавање* $p(x) \mapsto p'(x)$ *кажемо да је диференцирање у прстену* $\mathbb{F}[x]$*.*

Виши изводи $p^{(k)}(x)$ дефинишу се рекурзивно; на пример, извод полинома $p'(x)$ назива се други извод полинома $p(x)$, итд.
По дефиницији, $p^{(0)}(x) = p(x)$.
Напоменимо да је $\deg p'(x) = \deg p(x) - 1$.

Хорнерова шема и Виетове формуле

Дефиниција

Ако је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *произвољан полином из* $\mathbb{F}[x]$, *тада за полином*

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} \in \mathbb{F}[x]$$

кажемо да је (први) извод полинома $p(x)$. *За пресликавање* $p(x) \mapsto p'(x)$ *кажемо да је диференцирање у прстену* $\mathbb{F}[x]$.

Виши изводи $p^{(k)}(x)$ дефинишу се рекурзивно; на пример, извод полинома $p'(x)$ назива се други извод полинома $p(x)$, итд.
По дефиницији, $p^{(0)}(x) = p(x)$.
Напоменимо да је $\deg p'(x) = \deg p(x) - 1$. Такође, за свако $k > n = \deg p(x)$ имамо да је $p^{(k)}(x)$ нула полином.

Један елементаран, али важан проблем је израчунавање вредности полинома за дато $x = a$.

Један елементаран, али важан проблем је израчунавање вредности полинома за дато $x = a$. Представимо полином по опадајућим степенима

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

Један елементаран, али важан проблем је израчунавање вредности полинома за дато $x = a$. Представимо полином по опадајућим степенима

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Ако бисмо израчунавали вредност полинома $p(a)$, на основу претходног израза, било би потребно $2n-1$ множења и n сабирања.

Један елементаран, али важан проблем је израчунавање вредности полинома за дато $x = a$. Представимо полином по опадајућим степенима

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

Ако бисмо израчунавали вредност полинома $p(a)$, на основу претходног израза, било би потребно $2n - 1$ множења и n сабирања.

Међутим, уколико $p(x)$ представимо у облику

$$p(x) = (\cdots((a_0 x + a_1)x + a_2)x + \cdots + a_{n-1})x + a_n$$

Један елементаран, али важан проблем је израчунавање вредности полинома за дато $x = a$. Представимо полином по опадајућим степенима

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Ако бисмо израчунавали вредност полинома $p(a)$, на основу претходног израза, било би потребно $2n - 1$ множења и n сабирања.

Међутим, уколико $p(x)$ представимо у облику

$$p(x) = (\cdots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \cdots + a_{n-1})x + a_n$$

потребно је само n множења и n сабирања.

Са $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ означимо коефицијенте полинома $s(x)$ из Безуовог става и ставимо $b_n = r$.

Са $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ означимо коефицијенте полинома $s(x)$ из Безуовог става и ставимо $b_n = r$. Тада имамо

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n =$$

$$= (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1})(x-a) + b_n,$$

Са $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ означимо коефицијенте полинома $s(x)$ из Безуовог става и ставимо $b_n = r$. Тада имамо

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n =$$

$$= (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1})(x - a) + b_n,$$

одакле, упоређивањем коефицијената уз одговарајуће степене на левој и десној страни претходне једнакости, добијамо

$$a_0 = b_0, \quad a_k = b_k - b_{k-1}a \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Са $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ означимо коефицијенте полинома $s(x)$ из Безуовог става и ставимо $b_n = r$. Тада имамо

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n =$$

$$= (b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1})(x - a) + b_n,$$

одакле, упоређивањем коефицијената уз одговарајуће степене на левој и десној страни претходне једнакости, добијамо

$$a_0 = b_0, \quad a_k = b_k - b_{k-1} a \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

На основу ових једнакости може се формирати рекурзивни поступак за израчунавање вредности полинома за $x = a$:

$$b_0 = a_0,$$

Са $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ означимо коефицијенте полинома $s(x)$ из Безуовог става и ставимо $b_n = r$. Тада имамо

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n =$$

$$= (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1})(x-a) + b_n,$$

одакле, упоређивањем коефицијената уз одговарајуће степене на левој и десној страни претходне једнакости, добијамо

$$a_0 = b_0, \quad a_k = b_k - b_{k-1}a \qquad (k = 1, \dots, n).$$

На основу ових једнакости може се формирати рекурзивни поступак за израчунавање вредности полинома за $x = a$:

$$b_0 = a_0, \quad b_k = a_k + b_{k-1}a \qquad (k = 1, \dots, n),$$

Са $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ означимо коефицијенте полинома $s(x)$ из Безуовог става и ставимо $b_n = r$. Тада имамо

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n =$$

$$= (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1})(x-a) + b_n,$$

одакле, упоређивањем коефицијената уз одговарајуће степене на левој и десној страни претходне једнакости, добијамо

$$a_0 = b_0, \quad a_k = b_k - b_{k-1}a \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

На основу ових једнакости може се формирати рекурзивни поступак за израчунавање вредности полинома за $x = a$:

$$b_0 = a_0, \quad b_k = a_k + b_{k-1}a \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

који после n корака даје вредност полинома, тј. $p(a) = b_n$.

Изложени поступак познат је као Хорнерова шема и може се интерпретирати кроз следећу шему:

Изложени поступак познат је као Хорнерова шема и може се интерпретирати кроз следећу шему:

a	a_0	a_1 b_0a	a_2 b_1a	a_3 b_2a	$\cdots$	a_{n-1} $b_{n-2}a$	a_n $b_{n-1}a$
	b_0	b_1	b_2	b_3		b_{n-1}	$b_n = p(a)$

Изложени поступак познат је као Хорнерова шема и може се интерпретирати кроз следећу шему:

a	a_0	a_1 $b_0 a$	a_2 $b_1 a$	a_3 $b_2 a$	$\cdots$	a_{n-1} $b_{n-2} a$	a_n $b_{n-1} a$
	b_0	b_1	b_2	b_3		b_{n-1}	$b_n = p(a)$

Пример

Нека је $p(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12 \in \mathbb{R}[x]$. *Применом Хорнерове шеме одредићемо вредност* $p(2)$.

Изложени поступак познат је као Хорнерова шема и може се интерпретирати кроз следећу шему:

a	a_0	a_1 b_0a	a_2 b_1a	a_3 b_2a	$\cdots$	a_{n-1} $b_{n-2}a$	a_n $b_{n-1}a$
	b_0	b_1	b_2	b_3		b_{n-1}	$b_n = p(a)$

Пример

Нека је $p(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12 \in \mathbb{R}[x]$. *Применом Хорнерове шеме одредићемо вредност* $p(2)$.

2	4	-4 8	13 8	-16 42	-12 52
	4	4	21	26	40

Пример

Дакле, $p(2) = 40.$

Пример

Дакле, $p(2) = 40$. *Количник при дељењу полинома* $p(x)$ *са* $x - 2$ *је полином* $s(x) = 4x^3 + 4x^2 + 21x + 26$,

Пример

Дакле, $p(2) = 40$. *Количник при дељењу полинома* $p(x)$ *са* $x - 2$ *је полином* $s(x) = 4x^3 + 4x^2 + 21x + 26$, *а остатак дељења је* $r = p(2) = 40$.

Пример

Дакле, $p(2) = 40$. *Количник при дељењу полинома* $p(x)$ *са* $x - 2$ *је полином* $s(x) = 4x^3 + 4x^2 + 21x + 26$, *а остатак дељења је* $r = p(2) = 40$.

Наведена шема се може упростити изостављањем друге врсте.

Пример

Дакле, $p(2) = 40$. *Количник при дељењу полинома* $p(x)$ *са* $x - 2$ *је полином* $s(x) = 4x^3 + 4x^2 + 21x + 26$, *а остатак дељења је* $r = p(2) = 40$.

Наведена шема се може упростити изостављањем друге врсте. На пример, за $a = -\frac{1}{2}$ *имамо*

$-\frac{1}{2}$	4	-4	13	-16	-12
	4	-6	16	-24	0

Пример

Дакле, $p(2) = 40$. *Количник при дељењу полинома* $p(x)$ *са* $x - 2$ *је полином* $s(x) = 4x^3 + 4x^2 + 21x + 26$, *а остатак дељења је* $r = p(2) = 40$.

Наведена шема се може упростити изостављањем друге врсте. На пример, за $a = -\frac{1}{2}$ *имамо*

$-\frac{1}{2}$	4	-4	13	-16	-12
	4	-6	16	-24	0

одакле закључујемо да је $a = -\frac{1}{2}$ *нула полинома* $p(x)$.

Пример

Применимо сада поступак сукцесивног дељења у циљу добијања разлагања полинома $p(x)$ *по степенима од* $x - 2$

Пример

Применимо сада поступак сукцесивног дељења у циљу добијања разлагања полинома $p(x)$ по степенима од $x-2$ и израчунавања извода полинома у тачки $x=2$.

Пример

Применимо сада поступак сукцесивног дељења у циљу добијања разлагања полинома $p(x)$ *по степенима од* $x-2$ *и израчунавања извода полинома у тачки* $x=2$.
Поступак је приказан у следећој табели:

Пример

Применимо сада поступак сукцесивног дељења у циљу добијања разлагања полинома $p(x)$ по степенима од $x-2$ и израчунавања извода полинома у тачки $x=2$.
Поступак је приказан у следећој табели:

2	4	-4	13	-16	-12
	4	4	21	26	40
	4	12	45	116	
	4	20	85		
	4	28			
	4				

Пример

Применимо сада поступак сукцесивног дељења у циљу добијања разлагања полинома $p(x)$ *по степенима од* $x-2$ *и израчунавања извода полинома у тачки* $x=2$.
Поступак је приказан у следећој табели:

2	4	−4	13	−16	−12
	4	4	21	26	40
	4	12	45	116	
	4	20	85		
	4	28			
	4				

Према томе,

$$p(x) = 40 + 116(x-2) + 85(x-2)^2 + 28(x-2)^3 + 4(x-2)^4.$$

Посматрајмо полином $p(x)$ са комплексним коефицијентима степена n.

Посматрајмо полином $p(x)$ са комплексним коефицијентима степена n. Нека су његове нуле редом $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Посматрајмо полином $p(x)$ са комплексним коефицијентима степена n. Нека су његове нуле редом $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Важе тзв. Виетове формуле

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Посматрајмо полином $p(x)$ са комплексним коефицијентима степена n. Нека су његове нуле редом $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Важе тзв. Виетове формуле

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}
\end{aligned}
$$

Посматрајмо полином $p(x)$ са комплексним коефицијентима степена n. Нека су његове нуле редом $x_1, x_2, \dots, x_n$. Важе тзв. Виетове формуле

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \end{aligned}$$

Посматрајмо полином $p(x)$ са комплексним коефицијентима степена n. Нека су његове нуле редом $x_1, x_2, \dots, x_n$. Важе тзв. Виетове формуле

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Посматрајмо полином $p(x)$ са комплексним коефицијентима степена n. Нека су његове нуле редом $x_1, x_2, \dots, x_n$. Важе тзв. Виетове формуле

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
&\vdots \\
x_1x_2\dots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

За $n = 2$ имамо да је $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_2 \neq 0$,

За $n = 2$ имамо да је $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_2 \neq 0$, па важе формуле

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{a_1}{a_2} \\ x_1x_2 &= \frac{a_0}{a_2}. \end{aligned}$$

За $n = 2$ имамо да је $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_2 \neq 0$, па важе формуле

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{a_1}{a_2} \\ x_1x_2 &= \frac{a_0}{a_2}. \end{aligned}$$

За $n = 3$ имамо да је $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$

За $n = 2$ имамо да је $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_2 \neq 0$, па важе формуле

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{a_1}{a_2} \\ x_1x_2 &= \frac{a_0}{a_2}. \end{aligned}$$

За $n = 3$ имамо да је $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$ па важе формуле

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned}$$

Доказ за $n = 3$.

Доказ за $n = 3$.

Како је $p(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$
$a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a_3x_1x_2x_3$.

Доказ за $n = 3$.

Како је $p(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$
$a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a_3x_1x_2x_3$.

Са друге стране имамо да је $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Доказ за $n = 3$.

Како је $p(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$
$a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a_3x_1x_2x_3$.

Са друге стране имамо да је $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Дакле, важи

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

Доказ за $n = 3$.

Како је $p(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$
$a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a_3x_1x_2x_3$.

Са друге стране имамо да је $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Дакле, важи

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{a_1}{a_3} \end{aligned}$$

Доказ за $n = 3$.

Како je $p(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$
$a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a_3x_1x_2x_3$.

Са друге стране имамо да je $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Дакле, важи

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned}$$