Линеарна алгебра 1

пето предавање

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Особине корена реалних полинома

Поље $\mathbb{C}$ је алгебарски затворено, па се сваки реални полином степена $n \geqslant 1$ може представити као производ комплексних линеарних полинома.

Особине корена реалних полинома

Поље $\mathbb{C}$ је алгебарски затворено, па се сваки реални полином степена $n \geqslant 1$ може представити као производ комплексних линеарних полинома.

Теорема

Ако је комплексан број $c = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) корен полинома $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, тада је и $\overline{c} = \alpha - i\beta$ корен полинома $p(x)$.

Особине корена реалних полинома

Поље $\mathbb{C}$ је алгебарски затворено, па се сваки реални полином степена $n \geqslant 1$ може представити као производ комплексних линеарних полинома.

Теорема

Ако је комплексан број $c = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) корен полинома $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, тада је и $\overline{c} = \alpha - i\beta$ корен полинома $p(x)$.

Доказ. Нека је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ и $p(c) = 0$.

Особине корена реалних полинома

Поље $\mathbb{C}$ је алгебарски затворено, па се сваки реални полином степена $n \geqslant 1$ може представити као производ комплексних линеарних полинома.

Теорема

Ако је комплексан број $c = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) корен полинома $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, тада је и $\overline{c} = \alpha - i\beta$ корен полинома $p(x)$.

Доказ. Нека је $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ и $p(c) = 0$. Применом особина операције конјуговања ($\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$) добијамо следеће

$$p(\overline{c}) = a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c}^2 + \cdots + a_n\overline{c}^n$$

$$\begin{aligned} p(\overline{c}) &= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c}^2 + \cdots + a_n\overline{c}^n \\ &= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c^2} + \cdots + a_n\overline{c^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\overline{c}) &= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c}^2 + \cdots + a_n\overline{c}^n \\ &= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c^2} + \cdots + a_n\overline{c^n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1 c} + \overline{a_2}\overline{c^2} + \cdots + \overline{a_n}\overline{c^n} \quad (\overline{a_i} = a_i,\ \text{јер } a_i \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p(\overline{c}) &= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c}^2 + \cdots + a_n\overline{c}^n \\
&= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c^2} + \cdots + a_n\overline{c^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \overline{a_2}\,\overline{c^2} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{c^n} \qquad (\overline{a_i} = a_i,\ \text{јер } a_i \in \mathbb{R}) \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1 c} + \overline{a_2 c^2} + \cdots + \overline{a_n c^n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(\overline{c}) &= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c}^2 + \cdots + a_n\overline{c}^n \\
&= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c^2} + \cdots + a_n\overline{c^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1}\overline{c} + \overline{a_2}\overline{c^2} + \cdots + \overline{a_n}\overline{c^n} \quad (\overline{a_i} = a_i,\ \text{јер } a_i \in \mathbb{R}) \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1 c} + \overline{a_2 c^2} + \cdots + \overline{a_n c^n} \\
&= \overline{a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n} = \overline{p(c)} = \overline{0} = 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(\overline{c}) &= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c}^2 + \cdots + a_n\overline{c}^n \\
&= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c^2} + \cdots + a_n\overline{c^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1}\overline{c} + \overline{a_2}\overline{c^2} + \cdots + \overline{a_n}\overline{c^n} \qquad (\overline{a_i} = a_i,\ \text{јер } a_i \in \mathbb{R}) \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1 c} + \overline{a_2 c^2} + \cdots + \overline{a_n c^n} \\
&= \overline{a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n} = \overline{p(c)} = \overline{0} = 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Напомена. Претходна теорема не важи за комплексне нереалне полиноме, на пример $x^2 - (1+i)x + i \in \mathbb{C}[x]$

$$\begin{aligned}
p(\overline{c}) &= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c}^2 + \cdots + a_n\overline{c}^n \\
&= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c^2} + \cdots + a_n\overline{c^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \overline{a_2}\,\overline{c^2} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{c^n} \qquad (\overline{a_i} = a_i, \text{ јер } a_i \in \mathbb{R}) \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1 c} + \overline{a_2 c^2} + \cdots + \overline{a_n c^n} \\
&= \overline{a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n} = \overline{p(c)} = \overline{0} = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Напомена. Претходна теорема не важи за комплексне нереалне полиноме, на пример $x^2 - (1+i)x + i \in \mathbb{C}[x]$ има корене 1 и i.

$$
\begin{aligned}
p(\overline{c}) &= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c}^2 + \cdots + a_n\overline{c}^n \\
&= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c^2} + \cdots + a_n\overline{c^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1}\overline{c} + \overline{a_2}\overline{c^2} + \cdots + \overline{a_n}\overline{c^n} \qquad (\overline{a_i} = a_i, \text{ јер } a_i \in \mathbb{R}) \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1 c} + \overline{a_2 c^2} + \cdots + \overline{a_n c^n} \\
&= \overline{a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n} = \overline{p(c)} = \overline{0} = 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Напомена. Претходна теорема не важи за комплексне нереалне полиноме, на пример $x^2 - (1+i)x + i \in \mathbb{C}[x]$ има корене 1 и i.

Последица 1. Сваки реални полином непарног степена има бар један корен у $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
p(\overline{c}) &= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c}^2 + \cdots + a_n\overline{c}^n \\
&= a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c^2} + \cdots + a_n\overline{c^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1}\overline{c} + \overline{a_2}\overline{c^2} + \cdots + \overline{a_n}\overline{c^n} \quad (\overline{a_i} = a_i, \text{ jер } a_i \in \mathbb{R}) \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1 c} + \overline{a_2 c^2} + \cdots + \overline{a_n c^n} \\
&= \overline{a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n} = \overline{p(c)} = \overline{0} = 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Напомена. Претходна теорема не важи за комплексне нереалне полиноме, на пример $x^2 - (1+i)x + i \in \mathbb{C}[x]$ има корене 1 и i.

Последица 1. Сваки реални полином непарног степена има бар један корен у $\mathbb{R}$.

Теорема

Једини несводљиви полиноми у $\mathbb{R}[x]$ су линеарни полиноми и квадратни полиноми са негативном дискриминантом.

Доказ. Линеарни полиноми су свакако несводљиви (јер имају само тривијалне делиоце).

Доказ. Линеарни полиноми су свакако несводљиви (јер имају само тривијалне делиоце). Квадратни реални полиноми су несводљиви над $\mathbb{R}$ акко немају корен у $\mathbb{R}$, акко имају негативну дискриминанту.

Доказ. Линеарни полиноми су свакако несводљиви (јер имају само тривијалне делиоце). Квадратни реални полиноми су несводљиви над $\mathbb{R}$ акко немају корен у $\mathbb{R}$, акко имају негативну дискриминанту. Докажимо да су сви остали реални полиноми сводљиви.

Доказ. Линеарни полиноми су свакако несводљиви (јер имају само тривијалне делиоце). Квадратни реални полиноми су несводљиви над $\mathbb{R}$ акко немају корен у $\mathbb{R}$, акко имају негативну дискриминанту. Докажимо да су сви остали реални полиноми сводљиви. Нека је $p(x) \in \mathbb{R}[x], \deg p(x) > 2$.

Доказ. Линеарни полиноми су свакако несводљиви (јер имају само тривијалне делиоце). Квадратни реални полиноми су несводљиви над $\mathbb{R}$ акко немају корен у $\mathbb{R}$, акко имају негативну дискриминанту. Докажимо да су сви остали реални полиноми сводљиви. Нека је $p(x) \in \mathbb{R}[x], \deg p(x) > 2$. Тада $p(c) \in \mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}$ је алгебарски затворено, па постоји корен $c = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ полинома $p(x)$.

Доказ. Линеарни полиноми су свакако несводљиви (јер имају само тривијалне делиоце). Квадратни реални полиноми су несводљиви над $\mathbb{R}$ акко немају корен у $\mathbb{R}$, акко имају негативну дискриминанту. Докажимо да су сви остали реални полиноми сводљиви. Нека је $p(x) \in \mathbb{R}[x], \deg p(x) > 2$. Тада $p(c) \in \mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}$ је алгебарски затворено, па постоји корен $c = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ полинома $p(x)$. Ако је $\beta = 0$, онда је $c = \alpha \in \mathbb{R}$, па је $p(x) = (x - \alpha)q, \ q \in \mathbb{R}[x]$.

Доказ. Линеарни полиноми су свакако несводљиви (јер имају само тривијалне делиоце). Квадратни реални полиноми су несводљиви над $\mathbb{R}$ акко немају корен у $\mathbb{R}$, акко имају негативну дискриминанту. Докажимо да су сви остали реални полиноми сводљиви. Нека је $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg p(x) > 2$. Тада $p(c) \in \mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}$ је алгебарски затворено, па постоји корен $c = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ полинома $p(x)$. Ако је $\beta = 0$, онда је $c = \alpha \in \mathbb{R}$, па је $p(x) = (x - \alpha)q, \ q \in \mathbb{R}[x]$. Дакле, $p(x)$ је сводљив над $\mathbb{R}$.

Доказ. Линеарни полиноми су свакако несводљиви (јер имају само тривијалне делиоце). Квадратни реални полиноми су несводљиви над $\mathbb{R}$ акко немају корен у $\mathbb{R}$, акко имају негативну дискриминанту. Докажимо да су сви остали реални полиноми сводљиви. Нека је $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg p(x) > 2$. Тада $p(c) \in \mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}$ је алгебарски затворено, па постоји корен $c = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ полинома $p(x)$.
Ако је $\beta = 0$, онда је $c = \alpha \in \mathbb{R}$, па је $p(x) = (x - \alpha)q,\ q \in \mathbb{R}[x]$.
Дакле, $p(x)$ је сводљив над $\mathbb{R}$.
Ако је $\beta \neq 0$ онда $c \notin \mathbb{R}$, па је $\overline{c} = \alpha - i\beta$ је такође корен полинома $p(x)$.

Доказ. Линеарни полиноми су свакако несводљиви (јер имају само тривијалне делиоце). Квадратни реални полиноми су несводљиви над $\mathbb{R}$ акко немају корен у $\mathbb{R}$, акко имају негативну дискриминанту.
Докажимо да су сви остали реални полиноми сводљиви. Нека је $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg p(x) > 2$. Тада $p(c) \in \mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}$ је алгебарски затворено, па постоји корен $c = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ полинома $p(x)$.
Ако је $\beta = 0$, онда је $c = \alpha \in \mathbb{R}$, па је $p(x) = (x - \alpha)q,\ q \in \mathbb{R}[x]$.
Дакле, $p(x)$ је сводљив над $\mathbb{R}$.
Ако је $\beta \neq 0$ онда $c \notin \mathbb{R}$, па је $\overline{c} = \alpha - i\beta$ је такође корен полинома $p(x)$. За полином

$$g(x) = (x-c)(x-\overline{c}) = (x-\alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 \in \mathbb{R}[x]$$

имамо да је $D = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) = -4\beta^2 < 0$, па је $g(x)$ несводљив над $\mathbb{R}$.

Доказ. Линеарни полиноми су свакако несводљиви (јер имају само тривијалне делиоце). Квадратни реални полиноми су несводљиви над $\mathbb{R}$ акко немају корен у $\mathbb{R}$, акко имају негативну дискриминанту. Докажимо да су сви остали реални полиноми сводљиви. Нека је $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg p(x) > 2$. Тада $p(c) \in \mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}$ је алгебарски затворено, па постоји корен $c = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ полинома $p(x)$.
Ако је $\beta = 0$, онда је $c = \alpha \in \mathbb{R}$, па је $p(x) = (x - \alpha)q,\ q \in \mathbb{R}[x]$.
Дакле, $p(x)$ је сводљив над $\mathbb{R}$.
Ако је $\beta \neq 0$ онда $c \notin \mathbb{R}$, па је $\overline{c} = \alpha - i\beta$ је такође корен полинома $p(x)$. За полином

$$g(x) = (x-c)(x-\overline{c}) = (x-\alpha)^2+\beta^2 = x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2 \in \mathbb{R}[x]$$

имамо да је $D = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) = -4\beta^2 < 0$, па је $g(x)$ несводљив над $\mathbb{R}$.

Докажимо да се полином $p(x)$ увек може раставити на чиниоце који су степена највише два.

Докажимо да се полином $p(x)$ увек може раставити на чиниоце који су степена највише два. По теореми о дељењу имамо да је

$p(x) = g(x)q(x)+r(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x], r(x) = 0$ или $\deg r(x) < \deg g($

Докажимо да се полином $p(x)$ увек може раставити на чиниоце који су степена највише два. По теореми о дељењу имамо да је

$p(x) = g(x)q(x) + r(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x], r(x) = 0$ или $\deg r(x) < \deg g(x$

- $r(x) = 0 \Rightarrow\ p(x) = g(x)q(x)$, где је $g(x), q(x) \in \mathbb{R}[x],\ \deg g(x) = 2 < \deg p(x)$ $\Rightarrow p(x)$ је сводљив над $\mathbb{R}$.

Докажимо да се полином $p(x)$ увек може раставити на чиниоце који су степена највише два. По теореми о дељењу имамо да је

$$p(x) = g(x)q(x)+r(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x], r(x) = 0 \text{ или } \deg r(x) < \deg g(x$$

- $r(x) = 0 \Rightarrow\ p(x) = g(x)q(x)$, где је $g(x), q(x) \in \mathbb{R}[x],\ \deg g(x) = 2 < \deg p(x)$ $\Rightarrow p(x)$ је сводљив над $\mathbb{R}$.
- $r(x) \neq 0 \Rightarrow\ \deg r(x) = 0$ или $\deg r(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \deg r(x) = 0 \quad & \Rightarrow r(x) \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow 0 = p(c) = g(c)q(c) + r = r. \text{ Контрадикција.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \deg r(x) = 1 \quad & \Rightarrow r(x) = ax + b,\ a \neq 0, \\ & \Rightarrow 0 = p(c) = g(c)q(c) + ac + b \\ & \Rightarrow ac + b = 0 \\ & \Rightarrow c = -a^{-1}b \in \mathbb{R}. \text{ Контрадикција.} \qquad \square \end{aligned}$$

Последица 1. Сваки реални полином $p(x)$ степена $n \geqslant 1$, са водећим коефицијентом a_n, може се на јединствен начин (до редоследа фактора) представити у облику

$$p(x) = a_n(x-c_1)^{k_1} \ldots (x-c_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \ldots (x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

при чему су $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ различити корени полинома $p(x)$ реда $k_1, \ldots, k_r$ (респективно), $p_i, q_i \in \mathbb{R}, \quad p_i^2 - 4q_i < 0 \ \ (i = 1, \ldots t)$ и $k_1 + \cdots + k_r + 2(l_1 + \cdots + l_t) = n$.

Последица 1. Сваки реални полином $p(x)$ степена $n \geqslant 1$, са водећим коефицијентом a_n, може се на јединствен начин (до редоследа фактора) представити у облику

$$p(x) = a_n(x-c_1)^{k_1} \dots (x-c_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

при чему су $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ различити корени полинома $p(x)$ реда $k_1, \dots, k_r$ (респективно), $p_i, q_i \in \mathbb{R}, \quad p_i^2 - 4q_i < 0 \ \ (i = 1, \dots t)$ и $k_1 + \dots + k_r + 2(l_1 + \dots + l_t) = n$.
Дакле, сваки полином $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ степена $n \geqslant 1$ има тачно n корена у $\mathbb{C}$. Како их практично одредити?

Последица 1. Сваки реални полином $p(x)$ степена $n \geqslant 1$, са водећим коефицијентом a_n, може се на јединствен начин (до редоследа фактора) представити у облику

$$p(x) = a_n(x-c_1)^{k_1} \dots (x-c_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

при чему су $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ различити корени полинома $p(x)$ реда $k_1, \dots, k_r$ (респективно), $p_i, q_i \in \mathbb{R}, \quad p_i^2 - 4q_i < 0 \ \ (i = 1, \dots t)$ и $k_1 + \cdots + k_r + 2(l_1 + \cdots + l_t) = n$.

Дакле, сваки полином $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ степена $n \geqslant 1$ има тачно n корена у $\mathbb{C}$. Како их практично одредити?

- Ако је $n = 1$ или $n = 2$ познате су формуле за одређивање корена полинома коначном применом операција сабирања, множења, дељења и корeновања на коефицијенте полинома.

Последица 1. Сваки реални полином $p(x)$ степена $n \geqslant 1$, са водећим коефицијентом a_n, може се на јединствен начин (до редоследа фактора) представити у облику

$$p(x) = a_n(x-c_1)^{k_1} \dots (x-c_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

при чему су $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ различити корени полинома $p(x)$ реда $k_1, \dots, k_r$ (респективно), $p_i, q_i \in \mathbb{R}, \quad p_i^2 - 4q_i < 0 \ \ (i = 1, \dots t)$ и $k_1 + \dots + k_r + 2(l_1 + \dots + l_t) = n$.

Дакле, сваки полином $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ степена $n \geqslant 1$ има тачно n корена у $\mathbb{C}$. Како их практично одредити?

- Ако је $n = 1$ или $n = 2$ познате су формуле за одређивање корена полинома коначном применом операција сабирања, множења, дељења и кореновања на коефицијенте полинома.
- Ако је $n = 3$ или $n = 4$ знамо за Карданове $\text{(Girolamo Cardano, 1501–1576.)}$ и Фераријеве $\text{(Lodovico Ferrari, 1522–1565.)}$ формуле, компликоване и без практичног значаја.

Последица 1. Сваки реални полином $p(x)$ степена $n \geqslant 1$, са водећим коефицијентом a_n, може се на јединствен начин (до редоследа фактора) представити у облику

$$p(x) = a_n(x-c_1)^{k_1} \dots (x-c_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

при чему су $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ различити корени полинома $p(x)$ реда $k_1, \dots, k_r$ (респективно), $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $\quad p_i^2 - 4q_i < 0 \ \ (i = 1, \dots t)$ и $k_1 + \cdots + k_r + 2(l_1 + \cdots + l_t) = n$.

Дакле, сваки полином $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ степена $n \geqslant 1$ има тачно n корена у $\mathbb{C}$. Како их практично одредити?

- Ако је $n = 1$ или $n = 2$ познате су формуле за одређивање корена полинома коначном применом операција сабирања, множења, дељења и кореновања на коефицијенте полинома.
- Ако је $n = 3$ или $n = 4$ знамо за Карданове $\text{(Girolamo Cardano, 1501–1576.)}$ и Фераријеве $\text{(Lodovico Ferrari, 1522–1565.)}$ формуле, компликоване и без практичног значаја.

- Ако је $n \geqslant 5$, Абел $(\text{Niels Henrik Abel } 1802\text{–}1829.)$ и Галоа $(\text{Evariste Galois } 1811\text{–}1832.)$ су доказали да, у општем случају, да такве формуле не постоје, тј. да се сви корени полинома степена већег од 4 не могу добити применом коначног низа операција сабирања, одузимања, множења, дељења и кореновања на коефицијенте полинома.

- Ако је $n \geqslant 5$, Абел $(\text{Niels Henrik Abel } 1802\text{–}1829.)$ и Галоа $(\text{Evariste Galois } 1811\text{–}1832.)$ су доказали да, у општем случају, да такве формуле не постоје, тј. да се сви корени полинома степена већег од 4 не могу добити применом коначног низа операција сабирања, одузимања, множења, дељења и кореновања на коефицијенте полинома.
  Само у неким специјалним случајевима постоје поступци за налажење корена полинома степена већег од 4.

- Ако је $n \geqslant 5$, Абел $(\text{Niels Henrik Abel } 1802–1829.)$ и Галоа $(\text{Evariste Galois } 1811–1832.)$ су доказали да, у општем случају, да такве формуле не постоје, тј. да се сви корени полинома степена већег од 4 не могу добити применом коначног низа операција сабирања, одузимања, множења, дељења и кореновања на коефицијенте полинома.
  Само у неким специјалним случајевима постоје поступци за налажење корена полинома степена већег од 4.

За $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ постоји практични поступак за налажење рационалних нула (ако их полином има).

- Ако је $n \geqslant 5$, Абел $(\text{Niels Henrik Abel } 1802\text{–}1829.)$ и Галоа $(\text{Evariste Galois } 1811\text{–}1832.)$ су доказали да, у општем случају, да такве формуле не постоје, тј. да се сви корени полинома степена већег од 4 не могу добити применом коначног низа операција сабирања, одузимања, множења, дељења и кореновања на коефицијенте полинома.
  Само у неким специјалним случајевима постоје поступци за налажење корена полинома степена већег од 4.

За $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ постоји практични поступак за налажење рационалних нула (ако их полином има).

Теорема

Ако је $\dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$ *и* $\mathrm{NZD}(p,q) = 1$) *корен полинома* $z(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ ($a_n \neq 0, a_0 \neq 0$), *тада* $p \mid a_0$ *и* $q \mid a_n$.

Доказ. Из чињенице да је $z(\frac{p}{q}) = 0$ следи

$$a_0 + a_1 \frac{p}{q} + a_2 \frac{p^2}{q^2} + \cdots + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_n \frac{p^n}{q^n} = 0$$

Доказ. Из чињенице да је $z(\frac{p}{q}) = 0$ следи

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\frac{p^2}{q^2} + \cdots + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0 / \cdot q^{n-1} / \cdot \frac{q^n}{p},\ p \neq 0,$$

па је

$$\underbrace{a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + \cdots + a_{n-1} p^{n-1}}_{\in \mathbb{Z}} + a_n \frac{p^n}{q} = 0,$$

Доказ. Из чињенице да је $z(\frac{p}{q}) = 0$ следи

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\frac{p^2}{q^2} + \cdots + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0 / \cdot q^{n-1} / \cdot \frac{q^n}{p},\ p \neq 0,$$

па је

$$\underbrace{a_0q^{n-1} + a_1pq^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}}_{\in\mathbb{Z}} + a_n\frac{p^n}{q} = 0,$$

односно, добијамо да је $\dfrac{a_np^n}{q} \in \mathbb{Z}$.

Доказ. Из чињенице да је $z(\frac{p}{q}) = 0$ следи

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\frac{p^2}{q^2} + \cdots + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0 / \cdot q^{n-1} / \cdot \frac{q^n}{p},\ p \neq 0,$$

па је

$$\underbrace{a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + \cdots + a_{n-1} p^{n-1}}_{\in \mathbb{Z}} + a_n \frac{p^n}{q} = 0,$$

односно, добијамо да је $\dfrac{a_n p^n}{q} \in \mathbb{Z}$. Како је $\mathrm{NZD}(p, q) = 1$, то је и $\mathrm{NZD}(p^n, q) = 1$, па $q \mid a_n$.

Доказ. Из чињенице да је $z(\frac{p}{q}) = 0$ следи

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\frac{p^2}{q^2} + \cdots + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0 / \cdot q^{n-1} / \cdot \frac{q^n}{p},\ p \neq 0,$$

па је

$$\underbrace{a_0q^{n-1} + a_1pq^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}}_{\in\mathbb{Z}} + a_n\frac{p^n}{q} = 0,$$

односно, добијамо да је $\dfrac{a_np^n}{q} \in \mathbb{Z}$. Како је $\mathrm{NZD}(p,q) = 1$, то је и $\mathrm{NZD}(p^n,q) = 1$, па $q \mid a_n$. Из

$$\frac{a_0q^n}{p} + \underbrace{a_1q^{n-1} + \ldots a_{n-1}p^{n-2}q + a_np^{n-1}}_{\in\mathbb{Z}} = 0,$$

Доказ. Из чињенице да је $z(\frac{p}{q}) = 0$ следи

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\frac{p^2}{q^2} + \dots + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0 / \cdot q^{n-1} / \cdot \frac{q^n}{p}, \ p \neq 0,$$

па је

$$\underbrace{a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + \dots + a_{n-1} p^{n-1}}_{\in \mathbb{Z}} + a_n \frac{p^n}{q} = 0,$$

односно, добијамо да је $\dfrac{a_n p^n}{q} \in \mathbb{Z}$. Како је $\mathrm{NZD}(p,q) = 1$, то је и $\mathrm{NZD}(p^n, q) = 1$, па $q \mid a_n$. Из

$$\frac{a_0 q^n}{p} + \underbrace{a_1 q^{n-1} + \dots a_{n-1} p^{n-2} q + a_n p^{n-1}}_{\in \mathbb{Z}} = 0,$$

налазимо да је $\dfrac{a_0 q^n}{p} \in \mathbb{Z}$.

Доказ. Из чињенице да је $z(\frac{p}{q}) = 0$ следи

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\frac{p^2}{q^2} + \cdots + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0 / \cdot q^{n-1} / \cdot \frac{q^n}{p},\ p \neq 0,$$

па је

$$\underbrace{a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}}_{\in\mathbb{Z}} + a_n\frac{p^n}{q} = 0,$$

односно, добијамо да је $\dfrac{a_n p^n}{q} \in \mathbb{Z}$. Како је $\mathrm{NZD}(p,q) = 1$, то је и $\mathrm{NZD}(p^n, q) = 1$, па $q \mid a_n$. Из

$$\frac{a_0 q^n}{p} + \underbrace{a_1 q^{n-1} + \ldots a_{n-1}p^{n-2}q + a_n p^{n-1}}_{\in\mathbb{Z}} = 0,$$

налазимо да је $\dfrac{a_0 q^n}{p} \in \mathbb{Z}$. Како је $\mathrm{NZD}(p,q) = 1$, следи да $\mathrm{NZD}(q^n, p) = 1$, па $p \mid a_0$. $\square$

Последица 1. Ако је цели број $c \in \mathbb{Z}$ корен полинома са целим коефицијентима $z(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0 a_n \neq 0$, онда $c \mid a_0$.

Последица 1. Ако је цели број $c \in \mathbb{Z}$ корен полинома са целим коефицијентима $z(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0 a_n \neq 0$, онда $c \mid a_0$.

Пример

Ако је $z(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x - 6$, $z(\frac{p}{q}) = 0$
($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N},\ \mathrm{NZD}(p,q) = 1$*) онда*

Последица 1. Ако је цели број $c \in \mathbb{Z}$ корен полинома са целим коефицијентима $z(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0 a_n \neq 0$, онда $c \mid a_0$.

Пример

Ако је $z(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x - 6$, $z(\frac{p}{q}) = 0$ *(*$p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N},\ \mathrm{NZD}(p,q) = 1$*) онда*

$$\begin{aligned} p \mid (-6),\ p \in \mathbb{Z} \quad &\Rightarrow \quad p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \\ q \mid 2,\ q \in \mathbb{N} \quad &\Rightarrow \quad q \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Последица 1. Ако је цели број $c \in \mathbb{Z}$ корен полинома са целим коефицијентима $z(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0 a_n \neq 0$, онда $c \mid a_0$.

Пример

Ако је $z(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x - 6$, $z(\frac{p}{q}) = 0$ *(*$p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N},\ \mathrm{NZD}(p,q) = 1$*) онда*

$$\begin{aligned} p \mid (-6),\ p \in \mathbb{Z} \quad &\Rightarrow \quad p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \\ q \mid 2,\ q \in \mathbb{N} \quad &\Rightarrow \quad q \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2} \right\}.$$

Последица 1. Ако је цели број $c \in \mathbb{Z}$ корен полинома са целим коефицијентима $z(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0a_n \neq 0$, онда $c \mid a_0$.

Пример

Ако је $z(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x - 6$, $z(\frac{p}{q}) = 0$ *(*$p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N},\ \mathrm{NZD}(p,q) = 1$*) онда*

$$\begin{aligned} p \mid (-6),\ p \in \mathbb{Z} \quad &\Rightarrow \quad p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \\ q \mid 2,\ q \in \mathbb{N} \quad &\Rightarrow \quad q \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\}.$$

Провером налазимо да је $z(-2) = 0$, $z(\frac{3}{2}) = 0$, *па су* $c_1 = -2$ *и* $c_2 = \frac{3}{2}$ *корени.*

Пример

Тада је

$$z(x) = (x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)q(x), q(x) = 2x^2+2x+2,$$

па су преостала два корена корени полинома $q(x)$:

$$c_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad c_4 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Пример

Тада је

$$z(x) = (x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right) q(x), q(x) = 2x^2 + 2x + 2,$$

па су преостала два корена корени полинома $q(x)$:

$$c_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad c_4 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Пример

Факторисати полином $z(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x + 8$
(а) над пољем $\mathbb{R}$,
(б) над пољем $\mathbb{C}$.

Пример

Из $p(c) = 0, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ c \mid 8 \ \Rightarrow c \in \{-8, -4, -2, 2, 4, 8\}$
("кандидати" за целобројне корене).

Пример

Из $p(c) = 0, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ c \mid 8 \ \Rightarrow c \in \{-8, -4, -2, 2, 4, 8\}$ *("кандидати" за целобројне корене).*
Провером (Хорнеровом шемом или преко изводног полинома) добијамо да је број 2 *двоструки, а број* -2 *прост корен полинома* $z(x)$*, па је*

$$z(x) = (x-2)^2(x+2)(x^2+x+1).$$

Пример

Из $p(c) = 0, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ c \mid 8 \ \Rightarrow c \in \{-8, -4, -2, 2, 4, 8\}$
("кандидати" за целобројне корене).
Провером (Хорнеровом шемом или преко изводног полинома) добијамо да је број 2 *двоструки, а број* -2 *прост корен полинома* $z(x)$*, па је*

$$z(x) = (x-2)^2(x+2)(x^2+x+1).$$

Дакле, имамо да је
(a) $z(x) = (x-2)^2(x+2)(x^2+x+1)$,

Пример

Из $p(c) = 0, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ c \mid 8 \ \Rightarrow c \in \{-8, -4, -2, 2, 4, 8\}$
("кандидати" за целобројне корене).
Провером (Хорнеровом шемом или преко изводног полинома) добијамо да је број 2 *двоструки, а број* -2 *прост корен полинома* $z(x)$*, па је*

$$z(x) = (x-2)^2(x+2)(x^2+x+1).$$

Дакле, имамо да је
(а) $z(x) = (x-2)^2(x+2)(x^2+x+1)$,
(б) $z(x) = (x-2)^2(x+2)(x+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}))(x+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}))$.

Теорема

Ако је $a + b\sqrt{n}$ *(*$a, b \in \mathbb{Q}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *није потпун квадрат) корен полинома* $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, *онда је и* $a - b\sqrt{n}$ *корен полинома* $p(x)$.

Теорема

Ако је $a + b\sqrt{n}$ *(*$a, b \in \mathbb{Q}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *није потпун квадрат) корен полинома* $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$*, онда је и* $a - b\sqrt{n}$ *корен полинома* $p(x)$*.*

Доказ. За $\mathbb{Q}(\sqrt{n}) = \{a + b\sqrt{n} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ лако се проверава да је $(\mathbb{Q}(\sqrt{n}), +, \cdot)$ потпоље поља реалних бројева.

Теорема

Ако је $a+b\sqrt{n}$ *(*$a,b\in\mathbb{Q}$ *и* $n\in\mathbb{N}$ *није потпун квадрат) корен полинома* $p(x)\in\mathbb{Q}[x]$*, онда је и* $a-b\sqrt{n}$ *корен полинома* $p(x)$*.*

Доказ. За $\mathbb{Q}(\sqrt{n})=\{a+b\sqrt{n}|a,b\in\mathbb{Q}\}$ лако се проверава да је $(\mathbb{Q}(\sqrt{n}),+,\cdot)$ потпоље поља реалних бројева. За бројеве $c=a+b\sqrt{n}$ и $\overline{c}=a-b\sqrt{n}$ кажемо да су конјуговани. Конјуговање има особине (проверити):

Теорема

Ако је $a + b\sqrt{n}$ *(*$a, b \in \mathbb{Q}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *није потпун квадрат) корен полинома* $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$*, онда је и* $a - b\sqrt{n}$ *корен полинома* $p(x)$*.*

Доказ. За $\mathbb{Q}(\sqrt{n}) = \{a + b\sqrt{n} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ лако се проверава да је $(\mathbb{Q}(\sqrt{n}), +, \cdot)$ потпоље поља реалних бројева. За бројеве $c = a + b\sqrt{n}$ и $\overline{c} = a - b\sqrt{n}$ кажемо да су конјуговани. Конјуговање има особине (проверити):

- $\overline{c + d} = \overline{c} + \overline{d}$,

Теорема

Ако је $a + b\sqrt{n}$ *(*$a, b \in \mathbb{Q}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *није потпун квадрат) корен полинома* $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$*, онда је и* $a - b\sqrt{n}$ *корен полинома* $p(x)$*.*

Доказ. За $\mathbb{Q}(\sqrt{n}) = \{a + b\sqrt{n} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ лако се проверава да је $(\mathbb{Q}(\sqrt{n}), +, \cdot)$ потпоље поља реалних бројева. За бројеве $c = a + b\sqrt{n}$ и $\overline{c} = a - b\sqrt{n}$ кажемо да су конјуговани. Конјуговање има особине (проверити):

- $\overline{c + d} = \overline{c} + \overline{d}$,
- $\overline{c \cdot d} = \overline{c} \cdot \overline{d}$,

Теорема

Ако је $a + b\sqrt{n}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$ није потпун квадрат) корен полинома $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, онда је и $a - b\sqrt{n}$ корен полинома $p(x)$.

Доказ. За $\mathbb{Q}(\sqrt{n}) = \{a + b\sqrt{n} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ лако се проверава да је $(\mathbb{Q}(\sqrt{n}), +, \cdot)$ потпоље поља реалних бројева. За бројеве $c = a + b\sqrt{n}$ и $\overline{c} = a - b\sqrt{n}$ кажемо да су конјуговани. Конјуговање има особине (проверити):

- $\overline{c + d} = \overline{c} + \overline{d}$,
- $\overline{c \cdot d} = \overline{c} \cdot \overline{d}$,
- $c = \overline{c} \Leftrightarrow c \in \mathbb{Q}$.

Теорема

Ако је $a + b\sqrt{n}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$ није потпун квадрат) корен полинома $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, онда је и $a - b\sqrt{n}$ корен полинома $p(x)$.

Доказ. За $\mathbb{Q}(\sqrt{n}) = \{a + b\sqrt{n} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ лако се проверава да је $(\mathbb{Q}(\sqrt{n}), +, \cdot)$ потпоље поља реалних бројева. За бројеве $c = a + b\sqrt{n}$ и $\overline{c} = a - b\sqrt{n}$ кажемо да су конјуговани. Конјуговање има особине (проверити):

- $\overline{c + d} = \overline{c} + \overline{d}$,
- $\overline{c \cdot d} = \overline{c} \cdot \overline{d}$,
- $c = \overline{c} \Leftrightarrow c \in \mathbb{Q}$.

Ако је $c = a + b\sqrt{n}$ корен полинома $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Q}[x]$ онда

$$p(\overline{c}) = \overline{p(c)} = \overline{0} = 0,$$

тј. $\overline{c}$ је такође корен полинома $p(x)$. $\square$

Теорема

Ако је $a + b\sqrt{n}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$ није потпун квадрат) корен полинома $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, онда је и $a - b\sqrt{n}$ корен полинома $p(x)$.

Доказ. За $\mathbb{Q}(\sqrt{n}) = \{a + b\sqrt{n} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ лако се проверава да је $(\mathbb{Q}(\sqrt{n}), +, \cdot)$ потпоље поља реалних бројева. За бројеве $c = a + b\sqrt{n}$ и $\overline{c} = a - b\sqrt{n}$ кажемо да су конјуговани. Конјуговање има особине (проверити):

- $\overline{c + d} = \overline{c} + \overline{d}$,
- $\overline{c \cdot d} = \overline{c} \cdot \overline{d}$,
- $c = \overline{c} \Leftrightarrow c \in \mathbb{Q}$.

Ако је $c = a + b\sqrt{n}$ корен полинома $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Q}[x]$ онда

$$p(\overline{c}) = \overline{p(c)} = \overline{0} = 0,$$

тј. $\overline{c}$ је такође корен полинома $p(x)$. $\square$

Дефиниција векторског простора

Дефиниција

- $V = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots\}$ *непразан скуп,*

Дефиниција векторског простора

Дефиниција

- $V = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots\}$ *непразан скуп,* $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ *и* $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ *поље,*

Дефиниција векторског простора

Дефиниција

- $V=\{x,y,z,x_1,y_1,z_1,\dots\}$ *непразан скуп*, $F=\{\alpha,\beta,\gamma,\dots\}$ *и* $(F,\oplus,\odot,0,1)$ *поље*, $+:V\times V\to V,\ (x,y)\mapsto x+y,$

Дефиниција векторског простора

Дефиниција

- $V = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots\}$ *непразан скуп*, $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ *и* $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ *поље*, $+ : V \times V \to V,\ (x, y) \mapsto x + y$, $\cdot : F \times V \to V,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$.

Дефиниција векторског простора

Дефиниција

- $V = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots\}$ *непразан скуп*, $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ *и* $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ *поље*, $+ : V \times V \to V,\ (x, y) \mapsto x + y$, $\cdot : F \times V \to V,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$.

Уређена четворка $(V, +, \cdot, F)$ *је векторски простор ако за свако* $x, y \in V$ *и свако* $\alpha, \beta \in F$ *важи:*

(V_1) $(V, +)$ *је Абелова група,*

Дефиниција векторског простора

Дефиниција

- $V = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots\}$ *непразан скуп,* $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ *и* $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ *поље,* $+ : V \times V \to V,\ (x, y) \mapsto x + y$, $\cdot : F \times V \to V,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$.

Уређена четворка $(V, +, \cdot, F)$ *је векторски простор ако за свако* $x, y \in V$ *и свако* $\alpha, \beta \in F$ *важи:*

(V_1) $(V, +)$ *је Абелова група,*

(V_2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

Дефиниција векторског простора

Дефиниција

- $V = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots\}$ *непразан скуп*, $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ *и* $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ *поље*, $+ : V \times V \to V,\ (x, y) \mapsto x + y$, $\cdot : F \times V \to V,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$.

Уређена четворка $(V, +, \cdot, F)$ *је векторски простор ако за свако* $x, y \in V$ *и свако* $\alpha, \beta \in F$ *важи:*

(V_1) $(V, +)$ *је Абелова група,*

(V_2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

(V_3) $(\alpha \oplus \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

Дефиниција векторског простора

Дефиниција

- $V = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots\}$ *непразан скуп,* $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ *и* $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ *поље,* $+ : V \times V \to V,\ (x, y) \mapsto x + y,$ $\cdot : F \times V \to V,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x.$

Уређена четворка $(V, +, \cdot, F)$ *је векторски простор ако за свако* $x, y \in V$ *и свако* $\alpha, \beta \in F$ *важи:*

(V_1) $(V, +)$ *је Абелова група,*

(V_2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$

(V_3) $(\alpha \oplus \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$

(V_4) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \odot \beta) \cdot x,$

Дефиниција векторског простора

Дефиниција

- $V = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots\}$ *непразан скуп*, $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ *и* $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ *поље*, $+ : V \times V \to V,\ (x, y) \mapsto x + y$, $\cdot : F \times V \to V,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$.

Уређена четворка $(V, +, \cdot, F)$ *је векторски простор ако за свако* $x, y \in V$ *и свако* $\alpha, \beta \in F$ *важи:*

(V_1) $(V, +)$ *је Абелова група,*

(V_2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

(V_3) $(\alpha \oplus \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

(V_4) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \odot \beta) \cdot x$,

(V_5) $1 \cdot x = x$.

Дефиниција векторског простора

Дефиниција

- $V = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots\}$ *непразан скуп,* $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ *и* $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ *поље,* $+ : V \times V \to V,\ (x, y) \mapsto x + y,$ $\cdot : F \times V \to V,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x.$

Уређена четворка $(V, +, \cdot, F)$ *је векторски простор ако за свако* $x, y \in V$ *и свако* $\alpha, \beta \in F$ *важи:*

(V_1) $(V, +)$ *је Абелова група,*

(V_2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$

(V_3) $(\alpha \oplus \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$

(V_4) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \odot \beta) \cdot x,$

(V_5) $1 \cdot x = x.$

У складу са претходном дефиницијом, издвајамо следеће појмове.

- Елементи скупа V се зову вектори.

У складу са претходном дефиницијом, издвајамо следеће појмове.

- Елементи скупа V се зову вектори.
- Елементи поља F се зову скалари.

У складу са претходном дефиницијом, издвајамо следеће појмове.

- Елементи скупа V се зову вектори.
- Елементи поља F се зову скалари.
- $+$ је сабирање вектора, а $\cdot$ множење вектора скаларом.

У складу са претходном дефиницијом, издвајамо следеће појмове.

- Елементи скупа V се зову вектори.
- Елементи поља F се зову скалари.
- $+$ је сабирање вектора, а $\cdot$ множење вектора скаларом.
- Неутрални у групи $(V, +)$ означавамо са 0_V или само 0 и зовемо нула вектор.

У складу са претходном дефиницијом, издвајамо следеће појмове.

- Елементи скупа V се зову вектори.
- Елементи поља F се зову скалари.
- $+$ је сабирање вектора, а $\cdot$ множење вектора скаларом.
- Неутрални у групи $(V, +)$ означавамо са 0_V или само 0 и зовемо нула вектор.
- Инверзни од x у групи $(V, +)$ означавамо са $-x$ и зовемо супротан вектор од x.

У складу са претходном дефиницијом, издвајамо следеће појмове.

- Елементи скупа V се зову вектори.
- Елементи поља F се зову скалари.
- $+$ је сабирање вектора, а $\cdot$ множење вектора скаларом.
- Неутрални у групи $(V,+)$ означавамо са 0_V или само 0 и зовемо нула вектор.
- Инверзни од x у групи $(V,+)$ означавамо са $-x$ и зовемо супротан вектор од x.
- $\cdot$ обично изостављамо (уместо $\alpha \cdot x$ пишемо αx).

У складу са претходном дефиницијом, издвајамо следеће појмове.

- Елементи скупа V се зову вектори.
- Елементи поља F се зову скалари.
- $+$ је сабирање вектора, а $\cdot$ множење вектора скаларом.
- Неутрални у групи $(V, +)$ означавамо са 0_V или само 0 и зовемо нула вектор.
- Инверзни од x у групи $(V, +)$ означавамо са $-x$ и зовемо супротан вектор од x.
- $\cdot$ обично изостављамо (уместо $\alpha \cdot x$ пишемо αx).
- Када год то не изазива забуну уместо ознака $\oplus$ и $\odot$ (операције у пољу F) користићемо $+$ и $\cdot$.

У складу са претходном дефиницијом, издвајамо следеће појмове.

- Елементи скупа V се зову вектори.
- Елементи поља F се зову скалари.
- $+$ је сабирање вектора, а $\cdot$ множење вектора скаларом.
- Неутрални у групи $(V, +)$ означавамо са 0_V или само 0 и зовемо нула вектор.
- Инверзни од x у групи $(V, +)$ означавамо са $-x$ и зовемо супротан вектор од x.
- $\cdot$ обично изостављамо (уместо $\alpha \cdot x$ пишемо αx).
- Када год то не изазива забуну уместо ознака $\oplus$ и $\odot$ (операције у пољу F) користићемо $+$ и $\cdot$.
- За нула вектор и нула скалар користићемо исту ознаку 0, кад год је из контекста јасно да ли се ради о вектору или скалару.

У складу са претходном дефиницијом, издвајамо следеће појмове.

- Елементи скупа V се зову вектори.
- Елементи поља F се зову скалари.
- $+$ је сабирање вектора, а $\cdot$ множење вектора скаларом.
- Неутрални у групи $(V, +)$ означавамо са 0_V или само 0 и зовемо нула вектор.
- Инверзни од x у групи $(V, +)$ означавамо са $-x$ и зовемо супротан вектор од x.
- $\cdot$ обично изостављамо (уместо $\alpha \cdot x$ пишемо αx).
- Када год то не изазива забуну уместо ознака $\oplus$ и $\odot$ (операције у пољу F) користићемо $+$ и $\cdot$.
- За нула вектор и нула скалар користићемо исту ознаку 0, кад год је из контекста јасно да ли се ради о вектору или скалару.

Пример

$(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ *је реални векторски простор,* $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$ *комплексни векторски простор.*

Пример

$(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ *је реални векторски простор,* $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$ *комплексни векторски простор.*

Скуп аксиома (V_1)-(V_5) је независан (ниједна од њих није последица осталих).

Пример

$(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ *је реални векторски простор,* $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$ *комплексни векторски простор.*

Скуп аксиома (V_1)-(V_5) је независан (ниједна од њих није последица осталих).
Из тог разлога уочимо следећи пример.

Пример

$(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ *је реални векторски простор,* $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$ *комплексни векторски простор.*

Скуп аксиома (V_1)-(V_5) је независан (ниједна од њих није последица осталих).
Из тог разлога уочимо следећи пример.

Пример

Нека је $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$*,*

Пример

$(V,+,\cdot,\mathbb{R})$ је реални векторски простор, $(V,+,\cdot,\mathbb{C})$ комплексни векторски простор.

Скуп аксиома (V_1)-(V_5) је независан (ниједна од њих није последица осталих).
Из тог разлога уочимо следећи пример.

Пример

Нека је $(\mathbb{C},+,\cdot,\mathbb{C})$, $x+y \stackrel{\text{def}}{=} y$,

Пример

$(V,+,\cdot,\mathbb{R})$ је реални векторски простор, $(V,+,\cdot,\mathbb{C})$ комплексни векторски простор.

Скуп аксиома (V_1)-(V_5) је независан (ниједна од њих није последица осталих).
Из тог разлога уочимо следећи пример.

Пример

Нека је $(\mathbb{C},+,\cdot,\mathbb{C})$, $x+y\overset{\text{def}}{=}y, \alpha\cdot x\overset{\text{def}}{=}x$

Пример

$(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ *је реални векторски простор,* $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$ *комплексни векторски простор.*

Скуп аксиома (V_1)-(V_5) је независан (ниједна од њих није последица осталих).
Из тог разлога уочимо следећи пример.

Пример

Нека је $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$, $x + y \stackrel{\text{def}}{=} y, \alpha \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} x (\alpha, x, y \in \mathbb{C})$.
Аксиоме (V_2)-(V_5) *важе у посматраној структури.*

Пример

$(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ *је реални векторски простор,* $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$ *комплексни векторски простор.*

Скуп аксиома (V_1)-(V_5) је независан (ниједна од њих није последица осталих).
Из тог разлога уочимо следећи пример.

Пример

Нека је $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$, $x + y \stackrel{\text{def}}{=} y, \alpha \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} x (\alpha, x, y \in \mathbb{C})$.
Аксиоме (V_2)-(V_5) *важе у посматраној структури. нпр.* (V_2)
$\alpha \cdot (x + y) = x + y = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

Пример

$(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ *је реални векторски простор,* $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$ *комплексни векторски простор.*

Скуп аксиома (V_1)-(V_5) је независан (ниједна од њих није последица осталих).
Из тог разлога уочимо следећи пример.

Пример

Нека је $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$, $x + y \stackrel{\text{def}}{=} y, \alpha \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} x (\alpha, x, y \in \mathbb{C})$.
Аксиоме (V_2)*-*(V_5) *важе у посматраној структури. нпр.* (V_2)
$\alpha \cdot (x + y) = x + y = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$*, али* V_1 *не важи,*

Пример

$(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ *је реални векторски простор,* $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$ *комплексни векторски простор.*

Скуп аксиома (V_1)-(V_5) је независан (ниједна од њих није последица осталих).
Из тог разлога уочимо следећи пример.

Пример

Нека је $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$, $x + y \overset{\text{def}}{=} y, \alpha \cdot x \overset{\text{def}}{=} x(\alpha, x, y \in \mathbb{C})$.
Аксиоме (V_2)-(V_5) *важе у посматраној структури. нпр.* (V_2)
$\alpha \cdot (x + y) = x + y = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, *али* V_1 *не важи, јер*
$x + y \neq y + x$, *за* $x \neq y$ *(нпр.* $1 + 2 = 2, 2 + 1 = 1$*).*

Пример

$(V,+,\cdot,\mathbb{R})$ је реални векторски простор, $(V,+,\cdot,\mathbb{C})$ комплексни векторски простор.

Скуп аксиома (V_1)-(V_5) је независан (ниједна од њих није последица осталих).
Из тог разлога уочимо следећи пример.

Пример

*Нека је $(\mathbb{C},+,\cdot,\mathbb{C})$, $x+y \overset{\text{def}}{=} y, \alpha\cdot x \overset{\text{def}}{=} x (\alpha, x, y \in \mathbb{C})$.
Аксиоме (V_2)-(V_5) важе у посматраној структури. нпр. (V_2)
$\alpha\cdot(x+y) = x+y = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y$, али V_1 не важи, јер
$x+y \neq y+x$, за $x\neq y$ (нпр. $1+2=2, 2+1=1$).
Дакле, можемо закључити да је (V_2)-(V_5) $\not\models$ (V_1).*

Теорема

У векторском простору $(V, +, \cdot, F)$ *важи:*

(1) $\alpha \cdot 0_V = 0_V, \alpha \in F$,

(2) $0_F \cdot x = 0_V, x \in V$,

(3) $\alpha \cdot x = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0_F \vee x = 0_V, x \in V, \alpha \in F$,

(4) $\alpha(-x) = -(\alpha x) = (-\alpha)x, x \in V, \alpha \in F$

(5) $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \cdot x = \alpha_1 \cdot x + \cdots + \alpha_n \cdot x,$
$\alpha \cdot (x_1 + \cdots + x_n) = \alpha \cdot x_1 + \cdots + \alpha \cdot x_n,$
$n \in \mathbb{N}, \quad x, x_1, \ldots, x_n \in V, \quad \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n \in F.$

Теорема

У векторском простору $(V, +, \cdot, F)$ *важи:*

(1) $\alpha \cdot 0_V = 0_V, \alpha \in F$,

(2) $0_F \cdot x = 0_V, x \in V$,

(3) $\alpha \cdot x = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0_F \vee x = 0_V, x \in V, \alpha \in F$,

(4) $\alpha(-x) = -(\alpha x) = (-\alpha)x, x \in V, \alpha \in F$

(5) $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \cdot x = \alpha_1 \cdot x + \cdots + \alpha_n \cdot x$,
$\alpha \cdot (x_1 + \cdots + x_n) = \alpha \cdot x_1 + \cdots + \alpha \cdot x_n$,
$n \in \mathbb{N}, \quad x, x_1, \ldots, x_n \in V, \quad \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n \in F$.

Доказ.

(1) Заиста, важи да је

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (0_V + 0_V) &= \alpha \cdot 0_V \\
\alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V &= \alpha \cdot 0_V \; / - (\alpha \cdot 0_V) \\
(\alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V) - (\alpha \cdot 0_V) &= \alpha \cdot 0_V - (\alpha \cdot 0_V) \\
\alpha \cdot 0_V + (\alpha \cdot 0_V - (\alpha \cdot 0_V)) &= 0_V \\
\alpha \cdot 0_V + 0_V &= 0_V \\
\alpha \cdot 0_V &= 0_V.
\end{aligned}$$

(1) Заиста, важи да је

$$\begin{array}{rcl} \alpha\cdot(0_V+0_V) & = & \alpha\cdot 0_V \\ \alpha\cdot 0_V+\alpha\cdot 0_V & = & \alpha\cdot 0_V \ / -(\alpha\cdot 0_V) \\ (\alpha\cdot 0_V+\alpha\cdot 0_V)-(\alpha\cdot 0_V) & = & \alpha\cdot 0_V-(\alpha\cdot 0_V) \\ \alpha\cdot 0_V+(\alpha\cdot 0_V-(\alpha\cdot 0_V)) & = & 0_V \\ \alpha\cdot 0_V+0_V & = & 0_V \\ \alpha\cdot 0_V & = & 0_V. \end{array}.$$

(2) Слично као и претходно.

(1) Заиста, важи да је

$$\begin{aligned} \alpha\cdot(0_V+0_V) &= \alpha\cdot 0_V \\ \alpha\cdot 0_V+\alpha\cdot 0_V &= \alpha\cdot 0_V \;/-(\alpha\cdot 0_V) \\ (\alpha\cdot 0_V+\alpha\cdot 0_V)-(\alpha\cdot 0_V) &= \alpha\cdot 0_V-(\alpha\cdot 0_V) \\ \alpha\cdot 0_V+(\alpha\cdot 0_V-(\alpha\cdot 0_V)) &= 0_V \\ \alpha\cdot 0_V+0_V &= 0_V \\ \alpha\cdot 0_V &= 0_V. \end{aligned}$$

(2) Слично као и претходно.

(3) Докажимо $\alpha\cdot x=0_V \Leftrightarrow \alpha=0_F \vee x=0_V$.

(1) Заиста, важи да је

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha \cdot (0_V + 0_V) & = & \alpha \cdot 0_V \\
\alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V & = & \alpha \cdot 0_V \;/ - (\alpha \cdot 0_V) \\
(\alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V) - (\alpha \cdot 0_V) & = & \alpha \cdot 0_V - (\alpha \cdot 0_V) \\
\alpha \cdot 0_V + (\alpha \cdot 0_V - (\alpha \cdot 0_V)) & = & 0_V \\
\alpha \cdot 0_V + 0_V & = & 0_V \\
\alpha \cdot 0_V & = & 0_V.
\end{array}
$$

(2) Слично као и претходно.

(3) Докажимо $\alpha \cdot x = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0_F \vee x = 0_V$. Нека је

$$
\begin{array}{ll}
 & \alpha \cdot x = 0_V, \quad \alpha \neq 0_F \\
\rightarrow & (\exists \alpha^{-1} \in F)\, \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot 0_V \\
\rightarrow & (\alpha^{-1}\alpha) \cdot x = 0_V \quad (\text{применом (1) и } (V_4)) \\
\rightarrow & 1 \cdot x = 0_V \\
\rightarrow & x = 0_V \quad (\text{из } V_5).
\end{array}
$$

(1) Заиста, важи да је

$$\begin{array}{rcl} \alpha\cdot(0_V+0_V) & = & \alpha\cdot 0_V \\ \alpha\cdot 0_V+\alpha\cdot 0_V & = & \alpha\cdot 0_V \;/-(\alpha\cdot 0_V) \\ (\alpha\cdot 0_V+\alpha\cdot 0_V)-(\alpha\cdot 0_V) & = & \alpha\cdot 0_V-(\alpha\cdot 0_V) \\ \alpha\cdot 0_V+(\alpha\cdot 0_V-(\alpha\cdot 0_V)) & = & 0_V \\ \alpha\cdot 0_V+0_V & = & 0_V \\ \alpha\cdot 0_V & = & 0_V. \end{array}$$

(2) Слично као и претходно.

(3) Докажимо $\alpha\cdot x=0_V \Leftrightarrow \alpha=0_F \vee x=0_V$. Нека је

$$\begin{array}{rl} & \alpha\cdot x=0_V,\quad \alpha\neq 0_F \\ \to & (\exists\alpha^{-1}\in F)\ \alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot x)=\alpha^{-1}\cdot 0_V \\ \to & (\alpha^{-1}\alpha)\cdot x=0_V \quad (\text{применом } (1) \text{ и } (V_4)) \\ \to & 1\cdot x=0_V \\ \to & x=0_V \quad (\text{из } V_5). \end{array}$$

Обратно, директно следи из (1) и (2).

(4) Имамо да је

$$
\begin{aligned}
(-\alpha)\cdot x &= (-\alpha)\cdot x + 0_V \\
&= (-\alpha)\cdot x + (\alpha\cdot x + (-(\alpha\cdot x))) \\
&= ((-\alpha)\cdot x + \alpha\cdot x) + (-(\alpha x)) \\
&= (-\alpha+\alpha)\cdot x + (-(\alpha x)) \\
&= 0_F\cdot x + (-(\alpha\cdot x)) \\
&= 0_V + (-(\alpha\cdot x)) \\
&= -(\alpha\cdot x).
\end{aligned}
$$

(4) Имамо да је

$$\begin{aligned}
(-\alpha)\cdot x &= (-\alpha)\cdot x + 0_V \\
&= (-\alpha)\cdot x + (\alpha\cdot x + (-(\alpha\cdot x))) \\
&= ((-\alpha)\cdot x + \alpha\cdot x) + (-(\alpha x)) \\
&= (-\alpha+\alpha)\cdot x + (-(\alpha x)) \\
&= 0_F\cdot x + (-(\alpha\cdot x)) \\
&= 0_V + (-(\alpha\cdot x)) \\
&= -(\alpha\cdot x).
\end{aligned}$$

(5) Једноставно, индукцијом по n.

Пример

(1) $V =$ *"скуп геометријских вектора (оријентисаних дужи) у равни", где је* $+$ *сабирање вектора,* $\cdot$ *множење вектора реалним бројем, је векторски простор над пољем реалних бројева.*

Пример

(1) $V =$ *"скуп геометријских вектора (оријентисаних дужи) у равни", где је $+$ сабирање вектора, $\cdot$ множење вектора реалним бројем, је векторски простор над пољем реалних бројева.*

(2) $(F, +, \cdot, F)$, *где су $+$ и $\cdot$ сабирање и множење у пољу F,је векторски простор поља F.*

Пример

(1) $V =$ "скуп геометријских вектора (оријентисаних дужи) у равни", где је $+$ сабирање вектора, $\cdot$ множење вектора реалним бројем, је векторски простор над пољем реалних бројева.

(2) $(F, +, \cdot, F)$, где су $+$ и $\cdot$ сабирање и множење у пољу F,је векторски простор поља F.

(3) Ако је H потпоље поља F, $+$ и $\cdot$ операције из поља F, онда $F_H = (F, +, \cdot, H)$ је векторски простор потпоља.
(a) $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{Q})$;

Пример

(1) $V =$ *"скуп геометријских вектора (оријентисаних дужи) у равни", где је $+$ сабирање вектора, $\cdot$ множење вектора реалним бројем, је векторски простор над пољем реалних бројева.*

(2) $(F, +, \cdot, F)$, *где су $+$ и $\cdot$ сабирање и множење у пољу F,је векторски простор поља F.*

(3) *Ако је H потпоље поља F, $+$ и $\cdot$ операције из поља F, онда $F_H = (F, +, \cdot, H)$ је векторски простор потпоља.*
(а) $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{Q})$;
(б) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = (\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Пример

(4) $(F^n, +, \cdot, F)$, где су + и $\cdot$ дефинисани са

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),$$

за $(x_1, \dots x_n), (y_1, \dots, y_n) \in F^n, \alpha \in F$, је векторски простор уређених $n-$торки из поља F.
Посебно, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$, $(\mathbb{C}^n, +, \cdot, \mathbb{C})$ су простори уређених $n-$торки реалних, односно, комплексних бројева.

Пример

(5) $(F^{\mathbb{N}}, +, \cdot, F)$, $F^{\mathbb{N}}$-*скуп свих низова елемената поља* F, $+$ *и* $\cdot$ *су дефинисани са*

$$(x_n) + (y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot (x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x_n),$$

за $\alpha \in F$, $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$, $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ *је векторски простор низова елемената из* F.
$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot, \mathbb{R})$, $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \cdot, \mathbb{C})$ *су векторски простори низова реалних, односно, комплексних бројева.*

Пример

(6) $(F^S, +, \cdot, F)$, F^S *скуп свих функција које сликају* S *у* F, $+$ *и* $\cdot$ *су дефинисани са*

$$f+g : S \to F, (f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)+g(x),\ (x \in S),$$

$$(\alpha f) : S \to F, (\alpha f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f(x), (x \in S)$$

за $f, g \in F^S$ *и* $\alpha \in F$, *је векторски простор функција из* S *у* F.
Напомена. *Стављајући* $S = \mathbb{N}$, *као специјални случај примера (6) добијамо пример (5).*

Пример

(7) $(F_n[x], +, \cdot, F)$, $F_n[x]$ *скуп полинома по* x *степена* $\leqslant n$ *са коефицијентима из поља* F,

$$(a_0+\cdots+a_nx^n)+(b_0+\cdots+b_nx^n) \stackrel{\text{def}}{=} (a_0+b_0)+\cdots+(a_n+b_n)x^n$$

$$\alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \ldots (\alpha a_n)x^n$$

(*за* $\alpha \in F,\ a_0 + \cdots + a_nx^n \in F_n[x],\ b_0 + \cdots + b_nx^n \in F_n[x]$) *је векторски простор полинома по* x *степена* $\leqslant n$ *са коефицијентима из* F.
Посебно, $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot, \mathbb{R})$*-простор реалних полинома степена највише* n. $(\mathbb{C}_n[x], +, \cdot, \mathbb{C})$ *простор комплексних полинома степена највише* n.

Пример

(8) *Ако је* V *скуп полинома фиксираног степена* n, + *и* $\cdot$ *дефинисани као у* $F_n[x]$), *тада* V *није векторски простор. Нпр.*
$p(x) = x^n - 1 \in V$, $q(x) = -x^n + x \in V$,
$(p+q)(x) = x - 1 \notin V$.

Векторски потпростори

Дефиниција

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ *векторски простор и* U *непразан подскуп од* V. *Уколико је* U *и сам векторски простор у односу на рестрикције операције* $+$ *и функције* $\cdot$, *онда кажемо да је* U *векторски потпростор простора* V *и пишемо* $U \preceq V$.

Векторски потпростори

Дефиниција

Нека је $(V,+,\cdot,F)$ векторски простор и U непразан подскуп од V. Уколико је U и сам векторски простор у односу на рестрикције операције $+$ и функције $\cdot$, онда кажемо да је U векторски потпростор простора V и пишемо $U \preceq V$.

Теорема

Нека је $(V,+,\cdot,F)$ векторски простор и $\emptyset \neq U \subseteq V$. Тада $U \preceq V$ акко важе услови:

(1) $x \in U \wedge \alpha \in F \Rightarrow \alpha \cdot x \in U$ *(тј. U је затворен за множење скаларом);*

(2) $x \in U \wedge y \in U \Rightarrow x + y \in U$ *(тј. U је затворен за сабирање вектора).*

Векторски потпростори

Дефиниција

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ *векторски простор и* U *непразан подскуп од* V*. Уколико је* U *и сам векторски простор у односу на рестрикције операције* $+$ *и функције* $\cdot$*, онда кажемо да је* U *векторски потпростор простора* V *и пишемо* $U \preceq V$*.*

Теорема

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ *векторски простор и* $\emptyset \neq U \subseteq V$*. Тада* $U \preceq V$ *акко важе услови:*

(1) $x \in U \land \alpha \in F \Rightarrow \alpha \cdot x \in U$ *(тј.* U *је затворен за множење скаларом);*

(2) $x \in U \land y \in U \Rightarrow x + y \in U$ *(тј.* U *је затворен за сабирање вектора).*

Доказ. Ако $U \preceq V$ онда је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор, па је скуп U затворен за сабирање вектора, као и за множење вектора скаларом.

Доказ. Ако $U \preceq V$ онда је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор, па је скуп U затворен за сабирање вектора, као и за множење вектора скаларом.

Обратно, нека је $U \neq \emptyset$ и нека важе особине (1) и (2).

Доказ. Ако $U \preceq V$ онда је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор, па је скуп U затворен за сабирање вектора, као и за множење вектора скаларом.
Обратно, нека је $U \neq \emptyset$ и нека важе особине (1) и (2). Покажимо да је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор.

Доказ. Ако $U \preceq V$ онда је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор, па је скуп U затворен за сабирање вектора, као и за множење вектора скаларом.

Обратно, нека је $U \neq \emptyset$ и нека важе особине (1) и (2). Покажимо да је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор.

Особина (V_1) важи на основу следећег.

- Операција $+$ је комутативна и асоцијативна на V, па је таква и на његовом подскупу U.
- Из $U \neq \emptyset$ следи да постоји елемент $x \in U$. Тада $-1 \in F, x \in U \overset{(1)}{\Rightarrow} (-1) \cdot x \in U \Rightarrow -x \in U$.
- $x \in U, -x \in U \overset{(2)}{\Rightarrow} x + (-x) \in U \Rightarrow 0_V \in U$.

Доказ. Ако $U \preceq V$ онда је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор, па је скуп U затворен за сабирање вектора, као и за множење вектора скаларом.
Обратно, нека је $U \neq \emptyset$ и нека важе особине (1) и (2). Покажимо да је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор.
Особина (V_1) важи на основу следећег.

- Операција $+$ је комутативна и асоцијативна на V, па је таква и на његовом подскупу U.
- Из $U \neq \emptyset$ следи да постоји елемент $x \in U$. Тада $-1 \in F, x \in U \overset{(1)}{\Rightarrow} (-1) \cdot x \in U \Rightarrow -x \in U$.
- $x \in U, -x \in U \overset{(2)}{\Rightarrow} x + (-x) \in U \Rightarrow 0_V \in U$.

Дакле, показали смо да је $(U, +)$ Абелова група.

Доказ. Ако $U \preceq V$ онда је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор, па је скуп U затворен за сабирање вектора, као и за множење вектора скаларом.
Обратно, нека је $U \neq \emptyset$ и нека важе особине (1) и (2). Покажимо да је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор.
Особина (V_1) важи на основу следећег.

- Операција $+$ је комутативна и асоцијативна на V, па је таква и на његовом подскупу U.
- Из $U \neq \emptyset$ следи да постоји елемент $x \in U$. Тада $-1 \in F, x \in U \overset{(1)}{\Rightarrow} (-1) \cdot x \in U \Rightarrow -x \in U$.
- $x \in U, -x \in U \overset{(2)}{\Rightarrow} x + (-x) \in U \Rightarrow 0_V \in U$.

Дакле, показали смо да је $(U, +)$ Абелова група. Аксиоме (V_2)--(V_5) важе, јер важе на целом скупу V. $\square$

Доказ. Ако $U \preceq V$ онда је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор, па је скуп U затворен за сабирање вектора, као и за множење вектора скаларом.
Обратно, нека је $U \neq \emptyset$ и нека важе особине (1) и (2). Покажимо да је $(U, +, \cdot, F)$ векторски простор.
Особина (V_1) важи на основу следећег.

- Операција $+$ је комутативна и асоцијативна на V, па је таква и на његовом подскупу U.
- Из $U \neq \emptyset$ следи да постоји елемент $x \in U$. Тада $-1 \in F, x \in U \overset{(1)}{\Rightarrow} (-1) \cdot x \in U \Rightarrow -x \in U$.
- $x \in U, -x \in U \overset{(2)}{\Rightarrow} x + (-x) \in U \Rightarrow 0_V \in U$.

Дакле, показали смо да је $(U, +)$ Абелова група. Аксиоме (V_2)--(V_5) важе, јер важе на целом скупу V. $\square$
Услови (1) и (2) су еквивалентни услову

$$(1') \quad x, y \in U \wedge \alpha, \beta \in F \;\Rightarrow\; \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in U.$$

Теорема

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ *векторски простор и* $U_1, U_2 \preceq V$. *Тада је* $U_1 \cap U_2 \preceq V$.

Теорема

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор и $U_1, U_2 \preceq V$. Тада је $U_1 \cap U_2 \preceq V$.

Доказ. Из $0 \in U_1$ и $0 \in U_2$ следи $0 \in U_1 \cap U_2$, па је $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Теорема

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ *векторски простор и* $U_1, U_2 \preceq V$. *Тада је* $U_1 \cap U_2 \preceq V$.

Доказ. Из $0 \in U_1$ и $0 \in U_2$ следи $0 \in U_1 \cap U_2$, па је $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
Проверимо услове (1) и (2).

Теорема

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ *векторски простор и* $U_1, U_2 \preceq V$. *Тада је* $U_1 \cap U_2 \preceq V$.

Доказ. Из $0 \in U_1$ и $0 \in U_2$ следи $0 \in U_1 \cap U_2$, па је $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
Проверимо услове (1) и (2).
(1)

$$\left.\begin{array}{c} x \in U_1 \cap U_2 \\ \alpha \in F \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{cc} x \in U_1, & \alpha \in F \\ x \in U_2, & \alpha \in F \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha \cdot x \in U_1 \\ \alpha \cdot x \in U_2 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \alpha \cdot x \in U_1$$

Теорема

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ *векторски простор и* $U_1, U_2 \preceq V$*. Тада је* $U_1 \cap U_2 \preceq V$*.*

Доказ. Из $0 \in U_1$ и $0 \in U_2$ следи $0 \in U_1 \cap U_2$, па је $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Проверимо услове (1) и (2).

(1)

$$\left.\begin{array}{c} x \in U_1 \cap U_2 \\ \alpha \in F \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{cc} x \in U_1, & \alpha \in F \\ x \in U_2, & \alpha \in F \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha \cdot x \in U_1 \\ \alpha \cdot x \in U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot x \in U_1$$

(2)

$$x, y \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x, y \in U_1 \\ x, y \in U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y \in U_1 \\ x + y \in U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x + y \in U_1 \cap U_2.$$

□

Теорема

(a) *Пресек произвољне фамилије векторских потпростора* $\{U_i \mid i \in I\}$ *простора* $(V, +, \cdot, F)$ *је такође потпростор простора* V.

Теорема

(а) *Пресек произвољне фамилије векторских потпростора* $\{U_i \mid i \in I\}$ *простора* $(V, +, \cdot, F)$ *је такође потпростор простора* V.

(б) *Ако је* $U_1 \preceq V$ *и* $U_2 \preceq V$, *тада*

$$U_1 \cup U_2 \preceq V \text{ акко } U_1 \subseteq U_2 \text{ или } U_2 \subseteq U_1.$$

Теорема

(а) *Пресек произвољне фамилије векторских потпростора* $\{U_i \mid i \in I\}$ *простора* $(V, +, \cdot, F)$ *је такође потпростор простора* V.

(б) *Ако је* $U_1 \preceq V$ *и* $U_2 \preceq V$, *тада*

$$U_1 \cup U_2 \preceq V \text{ акко } U_1 \subseteq U_2 \text{ или } U_2 \subseteq U_1.$$

Пример

1. $\{0\}$ *и* V *су тривијални потпростори простора* V.

Пример

1. $\{0\}$ *и* V *су тривијални потпростори простора* V.
2. $U_1 = \{(x, 3x) | x \in \mathbb{R}\} \preceq \mathbb{R}^2$ *(скуп свих тачака на правој* $y = 3x$ *је потпростор од* $\mathbb{R}^2$*). Провера:*
   - $U_1 \neq \emptyset$ *јер* $(0, 0) \in U_1$;
   - *(1)* $(a, 3a) \in U_1 \wedge (b, 3b) \in U_1 \Rightarrow (a, 3a) + (b, 3b) = (a + b, 3(a + b)) \in U_1$;
   - *(2)* $\alpha \in \mathbb{R},\ (a, 3a) \in U_1 \Rightarrow \alpha \cdot (a, 3a) = (\alpha a, 3(\alpha a)) \in U_1$.

Пример

1. $\{0\}$ *и* V *су тривијални потпростори простора* V.
2. $U_1 = \{(x, 3x) | x \in \mathbb{R}\} \preceq \mathbb{R}^2$ *(скуп свих тачака на правој* $y = 3x$ *је потпростор од* $\mathbb{R}^2$*). Провера:*
   - $U_1 \neq \emptyset$ *јер* $(0, 0) \in U_1$*;*
   - *(1)* $(a, 3a) \in U_1 \wedge (b, 3b) \in U_1 \Rightarrow (a, 3a) + (b, 3b) = (a + b, 3(a + b)) \in U_1$*;*
   - *(2)* $\alpha \in \mathbb{R},\ (a, 3a) \in U_1 \Rightarrow \alpha \cdot (a, 3a) = (\alpha a, 3(\alpha a)) \in U_1$.

   $U_2 = \{(x, 3x + 2) | x \in \mathbb{R}\}$ *није потпростор од* $\mathbb{R}^2$ *(не садржи нула вектор (0,0)).*

Пример

1. $\{0\}$ *и* V *су тривијални потпростори простора* V.
2. $U_1 = \{(x, 3x) | x \in \mathbb{R}\} \preceq \mathbb{R}^2$ *(скуп свих тачака на правој* $y = 3x$ *је потпростор од* $\mathbb{R}^2$*). Провера:*
   - $U_1 \neq \emptyset$ *јер* $(0, 0) \in U_1$;
   - *(1)* $(a, 3a) \in U_1 \wedge (b, 3b) \in U_1 \Rightarrow (a, 3a) + (b, 3b) = (a + b, 3(a + b)) \in U_1$;
   - *(2)* $\alpha \in \mathbb{R},\ (a, 3a) \in U_1 \Rightarrow \alpha \cdot (a, 3a) = (\alpha a, 3(\alpha a)) \in U_1$.

   $U_2 = \{(x, 3x + 2) | x \in \mathbb{R}\}$ *није потпростор од* $\mathbb{R}^2$ *(не садржи нула вектор (0,0)).*

   $U = \{(x, y) | ax + by + c = 0\} \preceq \mathbb{R}^2$ *акко* $c = 0$
   тј. тачке неке праве у $\mathbb{R}^2$ *чине потпростор акко та права пролази кроз (0,0).*

Пример

- *Да ли је* $\mathbb{R}^2 \preceq \mathbb{R}^3$*? Не,* $\mathbb{R}^2 \not\subseteq \mathbb{R}^3$.

Пример

- *Да ли је* $\mathbb{R}^2 \preceq \mathbb{R}^3$*? Не,* $\mathbb{R}^2 \not\subseteq \mathbb{R}^3$.
- *Да ли је* $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ *потпростор од* $\mathbb{R}^3$*? Да.*

Пример

- *Да ли је* $\mathbb{R}^2 \preceq \mathbb{R}^3$*? Не,* $\mathbb{R}^2 \not\subseteq \mathbb{R}^3$.
- *Да ли је* $U = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ *потпростор од* $\mathbb{R}^3$*? Да.*
- *Да ли је* $U' = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ *потпростор од* $\mathbb{R}^3$*? Не, није затворен за множење скаларом, нпр.*
  $(1,1,0) \in U',\ \sqrt{2} \in \mathbb{R},\ \sqrt{2} \cdot (1,1,0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \notin U'$.

Пример

- *Да ли је* $\mathbb{R}^2 \preceq \mathbb{R}^3$*? Не,* $\mathbb{R}^2 \not\preceq \mathbb{R}^3$.
- *Да ли је* $U = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ *потпростор од* $\mathbb{R}^3$*? Да.*
- *Да ли је* $U' = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ *потпростор од* $\mathbb{R}^3$*? Не, није затворен за множење скаларом, нпр.* $(1,1,0) \in U',\ \sqrt{2} \in \mathbb{R},\ \sqrt{2} \cdot (1,1,0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \notin U'$.

Дефиниција

Ако су U_1 *и* U_2 *потпростори векторског простора* V*, тада*

$$U_1 + U_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$$

зовемо збир (сума) потпростора U_1 *и* U_2.

Теорема

Ако $U_1 \preceq V$ *и* $U_2 \preceq V$ *онда и* $U_1 + U_2 \preceq V$.

Теорема

Ако $U_1 \preceq V$ и $U_2 \preceq V$ онда и $U_1 + U_2 \preceq V$.

Доказ. Заиста,

- $0 = \underbrace{0}_{\in U_1} + \underbrace{0}_{\in U_2} \Rightarrow 0 \in U_1 + U_2 \Rightarrow U_1 + U_2 \neq \emptyset.$

Теорема

Ако $U_1 \preceq V$ *и* $U_2 \preceq V$ *онда и* $U_1 + U_2 \preceq V$.

Доказ. Заиста,

- $0 = \underbrace{0}_{\in U_1} + \underbrace{0}_{\in U_2} \Rightarrow 0 \in U_1 + U_2 \Rightarrow U_1 + U_2 \neq \emptyset.$
- $x, y \in U_1 + U_2 \Rightarrow (\exists x_1, y_1 \in U_1)(\exists x_2, y_2 \in U_2)\ (x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2)$
  - (1) $\alpha \cdot x = \alpha(x_1 + x_2) = \underbrace{\alpha x_1}_{\in U_1} + \underbrace{\alpha x_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$

Теорема

Ако $U_1 \preceq V$ *и* $U_2 \preceq V$ *онда и* $U_1 + U_2 \preceq V$.

Доказ. Заиста,

- $0 = \underbrace{0}_{\in U_1} + \underbrace{0}_{\in U_2} \Rightarrow 0 \in U_1 + U_2 \Rightarrow U_1 + U_2 \neq \emptyset$.
- $x, y \in U_1 + U_2 \Rightarrow (\exists x_1, y_1 \in U_1)(\exists x_2, y_2 \in U_2)\ (x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2)$

  (1) $\alpha \cdot x = \alpha(x_1 + x_2) = \underbrace{\alpha x_1}_{\in U_1} + \underbrace{\alpha x_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$

  (2) $$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \\ &= \underbrace{(x_1 + y_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(x_2 + y_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2. \end{aligned}$$ □

Напомена. Разлагање $x = y + z,\ y \in U_1,\ z \in U_2$ вектора x, у општем случају, није јединствено.

Напомена. Разлагање $x = y + z,\ y \in U_1,\ z \in U_2$ вектора x, у општем случају, није јединствено.
Показаћемо да је ово разлагање јединствено, за сваки $x \in V$, акко $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Напомена. Разлагање $x = y + z,\ y \in U_1,\ z \in U_2$ вектора x, у општем случају, није јединствено.
Показаћемо да је ово разлагање јединствено, за сваки $x \in V$, акко $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Дефиниција

Збир $U_1 + U_2$ је директан ако је $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Обележава се са $U_1 \oplus U_2$.

Напомена. Разлагање $x = y + z,\ y \in U_1,\ z \in U_2$ вектора x, у општем случају, није јединствено.
Показаћемо да је ово разлагање јединствено, за сваки $x \in V$, акко $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Дефиниција

Збир $U_1 + U_2$ је директан ако је $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Обележава се са $U_1 \oplus U_2$.

Теорема

(Спектрална теорема) Нека $U_1 \preceq V$ и $U_2 \preceq V$. Тада $V = U_1 \oplus U_2$ акко се сваки вектор $x \in V$ може на јединствен начин представити у облику $x = y + z$, где $y \in U_1$ и $z \in U_2$, тј.

$$V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow (\forall x \in V)(\exists_1 y \in U_1)(\exists_1 z \in U_2)\ x = y + z.$$

Доказ. ($\rightarrow$) Нека je $V = U_1 \oplus U_2$, тј. $V = U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Доказ. $(\rightarrow)$ Нека је $V = U_1 \oplus U_2$, тј. $V = U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

- Егзистенција разлагања:
  $V \subseteq U_1 + U_2 \;\Rightarrow\; (\forall x \in V)(\exists y \in U_1)(\exists z \in U_2)\; x = y + z.$

Доказ. ($\rightarrow$) Нека је $V = U_1 \oplus U_2$, тј. $V = U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

- Егзистенција разлагања: $V \subseteq U_1 + U_2 \;\Rightarrow\; (\forall x \in V)(\exists y \in U_1)(\exists z \in U_2)\, x = y + z$.
- Јединственост: претпоставимо супротно, тј. да постоји вектор x који се на два начина може разложити преко вектора из U_1 и U_2.

Доказ. ($\rightarrow$) Нека је $V = U_1 \oplus U_2$, тј. $V = U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

- Егзистенција разлагања:
  $V \subseteq U_1 + U_2 \;\Rightarrow\; (\forall x \in V)(\exists y \in U_1)(\exists z \in U_2)\; x = y + z.$
- Јединственост: претпоставимо супротно, тј. да постоји вектор x који се на два начина може разложити преко вектора из U_1 и U_2. То значи

$$
\begin{aligned}
x = y + z & \qquad x = y' + z', \quad y, y' \in U_1, z, z' \in U_2 \\
y + z &= y' + z' \\
\underbrace{y + (-y')}_{\in U_1} &= \underbrace{-z + z'}_{\in U_2} \in U_1 \cap U_2 \\
y + (-y') = 0 & \qquad -z + z' = 0 \quad \text{јер } U_1 \cap U_2 = \{0\}. \\
y = y' & \qquad z = z'
\end{aligned}
$$

$(\leftarrow)$ Претпоставимо да сваки вектор $x \in V$ има јединствено разлагање

$$x = y + z, \quad y \in U_1, z \in U_2.$$

$(\leftarrow)$ Претпоставимо да сваки вектор $x \in V$ има јединствено разлагање

$$x = y + z, \quad y \in U_1, z \in U_2.$$

- Докажимо најпре $V = U_1 + U_2$.

$(\leftarrow)$ Претпоставимо да сваки вектор $x \in V$ има јединствено разлагање

$$x = y + z, \quad y \in U_1, z \in U_2.$$

- Докажимо најпре $V = U_1 + U_2$.

$$\begin{aligned} &(\forall x \in V)\ x \in U_1 + U_2 \quad \text{(јер сваки вектор има разлагање)} \\ &\Rightarrow V \subseteq U_1 + U_2 \\ &\Rightarrow V = U_1 + U_2. \end{aligned}$$

$(\longleftarrow)$ Претпоставимо да сваки вектор $x \in V$ има јединствено разлагање

$$x = y + z, \quad y \in U_1, z \in U_2.$$

- Докажимо најпре $V = U_1 + U_2$.

$$\begin{aligned} &(\forall x \in V)\ x \in U_1 + U_2 \quad \text{(јер сваки вектор има разлагање)} \\ &\Rightarrow V \subseteq U_1 + U_2 \\ &\Rightarrow V = U_1 + U_2. \end{aligned}$$

- Покажимо још да је $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

$$\begin{aligned} &x \in U_1 \cap U_2 \\ &\Rightarrow x = \underbrace{x}_{\in U_1} + \underbrace{0}_{\in U_2}, \quad x = \underbrace{0}_{\in U_1} + \underbrace{x}_{\in U_2} \\ &\Rightarrow \qquad x = 0 \quad \text{(због јединствености разлагања)} \\ &\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}. \qquad \square \end{aligned}$$

Пример

Докажимо $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$*, где је*

$$U_1 = \{(a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\},\ U_2 = \{(a,b,c) \mid a+b+c=0\}.$$

Пример

Докажимо $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, *где је*

$$U_1 = \{(a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\},\ U_2 = \{(a,b,c) \mid a+b+c=0\}.$$

Лако се проверава да $U_1 \preceq \mathbb{R}^3, \quad U_2 \preceq \mathbb{R}^3$. *За* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *одредимо* $(a,a,a) \in U_1$ *и* $(a',b',c') \in U_2$ *тако да*

$$(x,y,z) = (a,a,a) + (a',b',c'),$$

тј.

$$(x,y,z) = (a+a', a+b', a+c').$$

Пример

Докажимо $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, *где је*

$$U_1 = \{(a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\},\ U_2 = \{(a,b,c) \mid a+b+c=0\}.$$

Лако се проверава да $U_1 \preceq \mathbb{R}^3, \quad U_2 \preceq \mathbb{R}^3$. *За* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *одредимо* $(a,a,a) \in U_1$ *и* $(a',b',c') \in U_2$ *тако да*

$$(x,y,z) = (a,a,a) + (a',b',c'),$$

тј.

$$(x,y,z) = (a+a', a+b', a+c').$$

Из

$$\begin{array}{rcl} x & = & a+a' \\ y & = & a+b' \\ z & = & a+c' \\ a'+b'+c' & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} a & = & \frac{x+y+z}{3} \\ a' & = & \frac{2x-y-z}{3} \\ b' & = & \frac{2y-x-z}{3} \\ c' & = & \frac{2z-x-y}{3} \end{array}$$

Пример

следи да вектор (x, y, z) *има јединствено разлагање*

$$(x,y,z)=\underbrace{\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)}_{\in U_1}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{2x-y-z}{3},\frac{2y-x-z}{3},\frac{2z-x-y}{3}\right)}_{\in U_2}.$$

Дефиниција

Нека $U_i \preceq V$, $1 \leq i \leq n$.

$$U_1 + \cdots + U_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1 + \cdots + x_n \mid x_i \in U_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

је збир потпростора $U_1, \ldots, U_n$.
Збир је директан, у ознаци $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, *ако*

$$U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1}) = \{0\}, \quad i = 2, \ldots, n.$$