Линеарна алгебра 1

осмо предавање

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Основни став линеарне алгебре

Дефиниција

Пресликавање $f: V \to U$ *је линеарно пресликавање (хомоморфизам) векторског простора* $(V, +_V, \cdot_V, F)$ *у векторски простор* $(U, +_U, \cdot_U, F)$ *ако важи:*

1. $f(x +_V y) = f(x) +_U f(y) \quad (x, y \in V)$ *- адитивност*
2. $f(\alpha \cdot_V x) = \alpha \cdot_U f(x) \quad (x \in V, \alpha \in F)$ *- хомогеност.*

Основни став линеарне алгебре

Дефиниција

Пресликавање $f : V \to U$ *је линеарно пресликавање (хомоморфизам) векторског простора* $(V, +_V, \cdot_V, F)$ *у векторски простор* $(U, +_U, \cdot_U, F)$ *ако важи:*

1. $f(x +_V y) = f(x) +_U f(y) \quad (x, y \in V)$ *- адитивност*
2. $f(\alpha \cdot_V x) = \alpha \cdot_U f(x) \quad (x \in V, \alpha \in F)$ *- хомогеност.*

Услови 1. и 2. су еквивалентни услову

$1'. \quad f(\alpha \cdot_V x +_V \beta \cdot_V y) = \alpha \cdot_U f(x) +_U \beta \cdot_U f(y) \quad (x, y \in V, \alpha, \beta \in F)$

- линеарност

Докажимо да је свако линеарно пресликавање коначнодимензионог векторског простора потпуно одређено сликама базних вектора.

Теорема

(Основни став линеарне алгебре) Ако је $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ база векторског простора V_1 и $y_1, \dots, y_n$ произвољни вектори простора V_2, тада постоји тачно једно линеарно пресликавање $f : V_1 \to V_2$ тако да је $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$.

Докажимо да је свако линеарно пресликавање коначнодимензионог векторског простора потпуно одређено сликама базних вектора.

Теорема

(Основни став линеарне алгебре) Ако је $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ база векторског простора V_1 и $y_1, \dots, y_n$ произвољни вектори простора V_2, тада постоји тачно једно линеарно пресликавање $f : V_1 \to V_2$ тако да је $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$.

Доказ. **Егзистенција**:
$(\forall x \in V_1)(\exists_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n)\ x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ (јер је B база за V_1).

Докажимо да је свако линеарно пресликавање коначнодимензионог векторског простора потпуно одређено сликама базних вектора.

Теорема

(Основни став линеарне алгебре) Ако је $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ база векторског простора V_1 и $y_1, \dots, y_n$ произвољни вектори простора V_2, тада постоји тачно једно линеарно пресликавање $f : V_1 \to V_2$ тако да је $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$.

Доказ. **Егзистенција**:
$(\forall x \in V_1)(\exists_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n)\ x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ (јер је B база за V_1).
Дефинишимо $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 \cdot y_1 + \cdots + \alpha_n \cdot y_n$.

- f је добро дефинисано, јер је $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ једнозначно одређено.

- f је добро дефинисано, јер је $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ једнозначно одређено.
- Проверимо да је f линеарно.

- f је добро дефинисано, јер је $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ једнозначно одређено.
- Проверимо да је f линеарно.

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n, \lambda, \mu \in F$$
$$\Rightarrow \lambda x + \mu y = \lambda(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + \mu(\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n)$$
$$= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) x_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) x_n$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(\lambda x + \mu y) &= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) y_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) y_n,\\ &= \lambda(\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n) + \mu(\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_n y_n)\\ &= \lambda f(x) + \mu f(y).\end{aligned}$$

- f је добро дефинисано, јер је $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ једнозначно одређено.
- Проверимо да је f линеарно.

$$\begin{aligned} & x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n, \lambda, \mu \in F \\ & \Rightarrow \lambda x + \mu y = \lambda(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) + \mu(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n) \\ & \qquad = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)x_1 + \dots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)x_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\lambda x + \mu y) &= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)y_1 + \dots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)y_n, \\ &= \lambda(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n) + \mu(\beta_1 y_1 + \dots + \beta_n y_n) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

- Проверимо да важи $f(x_i) = y_i$, за свако $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} f(x_i) &= f(0 \cdot x_1 + \dots + 1 \cdot x_i + \dots + 0 \cdot x_n) \\ &= 0 \cdot y_1 + \dots + 1 \cdot y_i + \dots + 0 \cdot y_n \\ &= y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Следи да је f тражено пресликавање.

Јединственост:

Јединственост:

Нека је $g : V_1 \to V_2$ линеарно пресликавање такво да је $g(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$

Јединственост:

Нека је $g : V_1 \to V_2$ линеарно пресликавање такво да је
$g(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$
Тада, за произвољно $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in V_1$ важи

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \\ &= \alpha_1 g(x_1) + \cdots + \alpha_n g(x_n) \\ &= \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n = f(x), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; g = f. \quad \square$$

Пример

Одредити линеарно пресликавање $f : R^2 \to R^3$ *такво да важи* $f(1,0) = (2,-1,0)$, $f(1,1) = (3,-1,-2)$.

$$
\begin{aligned}
& B = \{(1,0),(1,1)\} \text{ је база простора } R^2 \\
\Leftrightarrow\ & (\forall (x,y) \in R^2)(\exists_1 (\alpha,\beta) \in R^2)\ (x,y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1) \\
\Leftrightarrow\ & (x,y) = (\alpha+\beta,\beta) \\
\Leftrightarrow\ & x = \alpha+\beta,\ y = \beta \quad (\text{систем једначина по } \alpha \text{ и } \beta) \\
\Leftrightarrow\ & \beta = y, \alpha = x - y \\
\Leftrightarrow\ & (x,y) = (x-y)\cdot(1,0) + y\cdot(1,1) \\
\Rightarrow\ & f(x,y) = f((x-y)\cdot(1,0) + y\cdot(1,1)) \\
& \qquad = (x-y)\cdot f(1,0) + y\cdot f(1,1) \\
& \qquad = (x-y)\cdot(2,-1,0) + y\cdot(3,-1,-2) \\
& \qquad = (2x-2y,-x+y,0) + (3y,-y,-2y) \\
& \qquad = (2x+y,-x,-2y).
\end{aligned}
$$

Теорема

Нека је $f : V_1 \to V_2$ линеарно пресликавање. Тада:

(1) *Ако је $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V_1$ линеарно зависан скуп вектора, онда је и $\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ линеарно зависан (у V_2).*

(2) *f је мономорфизам акко сваки линеарно независни скуп вектора у V_1 слика у линеарно независни скуп вектора у V_2.*

(3) *f је епиморфизам акко сваки генераторни скуп вектора простора V_1 слика у генераторни скуп вектора простора V_2.*

(4) *f је изоморфизам акко f чува базу.*

Доказ.

(1)

$$
\begin{aligned}
&\{x_1,\ldots,x_n\} \text{ је линеарно зависан у } V_1\\
&\Rightarrow (\exists i\in\{1,\ldots,n\})\; x_i\in\mathcal{L}\{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\}\\
&\Rightarrow x_i=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{i-1}x_{i-1}+\alpha_{i+1}x_{i+1}+\cdots+\alpha_nx_n,\;\; \alpha_i\in F\\
&\Rightarrow f(x_i)=\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_{i-1}f(x_{i-1})\\
&+\alpha_{i+1}f(x_{i+1})+\cdots+\alpha_nf(x_n))\\
&\Rightarrow\; f(x_i)\in\mathcal{L}\{f(x_1),\ldots,f(x_{i-1}),f(x_{i+1}),\ldots,f(x_n)\}\\
&\Rightarrow \{f(x_1),\ldots,f(x_n)\} \text{ је линеарно зависан скуп у } V_2
\end{aligned}
$$

(2) ($\rightarrow$) Нека је f линеарно 1-1 пресликавање и $\{x_1, \ldots, x_n\}$ линеарно независан скуп вектора у V_1. Покажимо да је и $\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ линеарно независан.

$$\alpha_1 \cdot f(x_1) + \cdots + \alpha_n \cdot f(x_n) = 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$$
$$\Rightarrow f(\alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n) = 0 = f(0) \quad \text{(јер је } f \text{ линеарно)}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = 0 \quad \text{(јер је } f \text{ 1-1)}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \quad \text{(јер је } \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ лин. независан).}$$

(2) ($\rightarrow$) Нека је f линеарно 1-1 пресликавање и $\{x_1, \dots, x_n\}$ линеарно независан скуп вектора у V_1. Покажимо да је и $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ линеарно независан.

$$\alpha_1 \cdot f(x_1) + \cdots + \alpha_n \cdot f(x_n) = 0,\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$$
$$\Rightarrow f(\alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n) = 0 = f(0) \quad \text{(јер је } f \text{ линеарно)}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = 0 \quad \text{(јер је } f \text{ 1-1)}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \quad \text{(јер је } \{x_1, \dots, x_n\} \text{ лин. независан).}$$

($\leftarrow$) Нека линеарно пресликавање f сваки линеарно независни скуп вектора слика у линеарно независан скуп вектора. Докажимо да је f 1-1.

$$\begin{aligned} x_1 \neq x_2 \quad &\Rightarrow \quad \{x_1 - x_2\} \text{ је лин. независан (јер } x_1 - x_2 \neq 0) \\ &\Rightarrow \quad \{f(x_1 - x_2)\} \text{ је лин. независан (следи из претп.)} \\ &\Rightarrow \quad f(x_1 - x_2) \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad f(x_1) - f(x_2) \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2). \end{aligned}$$

(3) $(\rightarrow)$ Нека је f епиморфизам и $V_1 = \mathcal{L}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Покажимо да $\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ генерише простор V_2.

$$\begin{aligned} f \text{ је "на"} \quad & \Rightarrow (\forall y \in V_2)(\exists x \in V_1)\; y = f(x) \\ & \Rightarrow y = f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \\ & \qquad = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \\ & \Rightarrow y \in \mathcal{L}\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\} \\ & \Rightarrow V_2 \subseteq \mathcal{L}\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\} \end{aligned}$$

Свакако је $\mathcal{L}\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\} \subseteq V_2$, па важи $V_2 = \mathcal{L}\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$.

($\leftarrow$) Нека линеарно пресликавања $f : V_1 \to V_2$ сваки скуп генератора простора V_1 слика у скуп генератора простора V_2 и нека $\{x_1, \ldots, x_n\}$ генерише простор V_1. Тада

$$
\begin{aligned}
& V_1 = \mathcal{L}\{x_1, \ldots, x_n\} \\
& \Rightarrow V_2 = \mathcal{L}\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\} \text{ (по претпоставци)} \\
& \Rightarrow (\forall y \in V_2)(\exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in F)\ y = \beta_1 f(x_1) + \cdots + \beta_n f(x_n) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = f(\underbrace{\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n}_{=x \in V_1}) \\
& \Rightarrow (\forall y \in V_2)(\exists x \overset{\text{def}}{=} \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n \in V_1)\ y = f(x) \\
& \Rightarrow f \text{ је "на".}
\end{aligned}
$$

($\leftarrow$) Нека линеарно пресликавања $f : V_1 \to V_2$ сваки скуп генератора простора V_1 слика у скуп генератора простора V_2 и нека $\{x_1, \ldots, x_n\}$ генерише простор V_1. Тада

$$
\begin{aligned}
& V_1 = \mathcal{L}\{x_1, \ldots, x_n\} \\
& \Rightarrow V_2 = \mathcal{L}\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\} \text{ (по претпоставци)} \\
& \Rightarrow (\forall y \in V_2)(\exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in F)\ y = \beta_1 f(x_1) + \cdots + \beta_n f(x_n) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = f(\underbrace{\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n}_{=x \in V_1}) \\
& \Rightarrow (\forall y \in V_2)(\exists x \overset{\text{def}}{=} \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n \in V_1)\ y = f(x) \\
& \Rightarrow f \text{ је "на".}
\end{aligned}
$$

(4) следи из (2) и (3). $\square$

Теорема

Ако су V_1 и V_2 коначно димензиони векторски простори над истим пољем F, тада

$$V_1 \cong V_2 \Longleftrightarrow dimV_1 = dimV_2.$$

Теорема

Ако су V_1 и V_2 коначно димензиони векторски простори над истим пољем F, тада

$$V_1 \cong V_2 \Longleftrightarrow dim V_1 = dim V_2.$$

Доказ. ($\rightarrow$)

$f : V_1 \cong V_2$ и $\{x_1, \ldots, x_n\}$ база за V_1

$\Rightarrow \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ је база за V_2 (Теорема 3.20.(4))

$\Rightarrow dim V_2 = n = dim V_1.$

Теорема

Ако су V_1 и V_2 коначно димензиони векторски простори над истим пољем F, тада

$$V_1 \cong V_2 \Longleftrightarrow dimV_1 = dimV_2.$$

Доказ. ($\rightarrow$)

$f : V_1 \cong V_2$ и $\{x_1, \ldots, x_n\}$ база за V_1

$\Rightarrow \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ је база за V_2 (Теорема 3.20.(4))

$\Rightarrow dimV_2 = n = dimV_1.$

($\leftarrow$) Нека је $dimV_1 = dimV_2 = n$,

$B_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $B_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ базе, редом, за V_1 и V_2

$\Rightarrow$ постоји јединствено линеарно пресликавање $f : V_1 \rightarrow V_2$, тако да је $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$ (из Основног става линеарне алгебре)

$\Rightarrow f$ је изоморфизам (Теорема 3.20. (4))

$\Rightarrow V_1 \cong V_2$. $\square$

Слика и језгро линеарног пресликавања

Дефиниција

Нека је $f : V_1 \to V_2$ *линеарно пресликавање. Тада*

- $ker f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V_1 | f(x) = 0\}$ *се зове језгро хомоморфизма* f
- $Im f \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) | x \in V_1\}$ *се зове слика хомоморфизма* f.

Неке особине језгра и слике линеарног пресликавања су дате следећом теоремом.

Теорема

Нека је $f : V_1 \to V_2$ линеарно пресликавање. Тада

(1) $Imf \preceq V_2$.

(2) f *је "на" акко* $Imf = V_2$.

(3) $ker f \preceq V_1$.

(4) f *је 1-1 акко* $ker f = \{0\}$.

(5) $f : V_1 \cong V_2$ *акко* $ker f = \{0\}$ *и* $Imf = V_2$.

(6) *Ако је* V_1 *коначно димензиони векторски простор, тада су* $ker f$ *и* Imf *коначне димензије и важи*
$dimV_1 = dim(ker f) + dim(Imf)$.

Доказ.

(1)

- $0 = f(0) \Rightarrow 0 \in Imf \Rightarrow \emptyset \neq Imf \subseteq V_2$
- $$y_1, y_2 \in Imf, \alpha, \beta \in F \Rightarrow (\exists x_1, x_2 \in V_1)\; y_1 = f(x_1),\; y_2 = f(x_2)$$
  $$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in Imf$$

Доказ.

(1)
- $0 = f(0) \Rightarrow 0 \in Imf \Rightarrow \emptyset \neq Imf \subseteq V_2$
- $$y_1, y_2 \in Imf, \alpha, \beta \in F \Rightarrow (\exists x_1, x_2 \in V_1)\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$$
  $$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in Imf$$

(2) следи из дефиниције "на" функције и Imf.

Доказ.

(1)
- $0 = f(0) \Rightarrow 0 \in Imf \Rightarrow \emptyset \neq Imf \subseteq V_2$
- $$\begin{aligned} & y_1, y_2 \in Imf, \alpha, \beta \in F \Rightarrow \ (\exists x_1, x_2 \in V_1)\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2) \\ & \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in Imf \end{aligned}$$

(2) следи из дефиниције "на" функције и Imf.

(3)
- $f(0) = 0 \Rightarrow 0 \in kerf \Rightarrow \emptyset \neq kerf \subseteq V_1$
- $$\begin{aligned} x_1, x_2 \in kerf, \alpha, \beta \in F \quad & \Rightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \\ & \qquad\qquad\qquad\quad = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \\ & \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in kerf \end{aligned}$$

Доказ.

(4) $(\rightarrow)$ Нека je f "1-1". Тада

$$x \in ker f \Rightarrow f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow x = 0$$
$$\Rightarrow ker f = \{0\}.$$

$(\leftarrow)$ Нека je $ker f = \{0\}$. Тада

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad & \Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \\ & \Rightarrow f(x - y) = 0 \\ & \Rightarrow x - y \in ker f \qquad \Rightarrow f \text{ je "1-1"} \\ & \Rightarrow x - y = 0 \\ & \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Доказ.

(4) ($\rightarrow$) Нека је f "1-1". Тада

$$x \in ker f \Rightarrow f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow x = 0$$
$$\Rightarrow ker f = \{0\}.$$

($\leftarrow$) Нека је $ker f = \{0\}$. Тада

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad & \Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \\ & \Rightarrow f(x - y) = 0 \\ & \Rightarrow x - y \in ker f \qquad \Rightarrow f \text{ је "1-1"} \\ & \Rightarrow x - y = 0 \\ & \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

(5) следи из (2) и (4).

(6) V_1 коначне димензије, $kerf \preceq V_1 \Rightarrow kerf$ је коначне димензије и $0 \leq dim(kerf) \leq dimV_1$. Могући су следећи случајеви:

- $dim(kerf) = 0 \Rightarrow kerf = \{0\} \Rightarrow f : V_1 \rightarrow Imf$ је изоморфизам $\Rightarrow dim(Imf) = dimV_1$ $\Rightarrow \; dimV_1 = dim(kerf) + dim(Imf)$.
- $dim(kerf) = dimV_1 \Rightarrow kerf = V_1 \Rightarrow Imf = \{0\} \Rightarrow dim(Imf) = 0 \;\Rightarrow\; dimV_1 = dim(kerf) + dim(Imf)$.
- $0 < dim(kerf) < dimV_1$ и $\{x_1, \dots, x_k\}$ нека је база за $kerf$. Проширимо је до базе $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ простора V_1. Покажимо да је $B = \{f(x_{k+1}), \dots, f(x_n)\}$ база простора Imf.

(B_1)

$$
\begin{aligned}
y \in Imf \quad &\Rightarrow \quad (\exists x \in V_1) y = f(x) \\
&\Rightarrow \quad y = f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \alpha_n x_n) \\
& \quad = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) + \cdots + \alpha_n f \\
& \quad = \alpha_1 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \\
& \quad = \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \\
&\Rightarrow \quad y \in \mathcal{L}(B)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow Imf = \mathcal{L}(B)$.

(B_2) линеарна независност

$$\lambda_{k+1} f(x_{k+1}) + \cdots + \lambda_n f(x_n) = 0,\ \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in F$$
$$\Rightarrow f(\lambda_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n \in kerf$$
$$\Rightarrow \lambda_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$$
$$\Rightarrow (-\alpha_1) x_1 + \cdots + (-\alpha_k) x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$
$$\Rightarrow -\alpha_1 = \cdots = -\alpha_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

(јер $\{x_1, \ldots, x_n\}$ база за V_1)

$\Rightarrow B = \{f(x_{k+1}), \ldots, f(x_n)\}$ је линеарно независан скуп вектора.

B је база за

$imf \Rightarrow dim(Imf) = |B| = n - k = dimV_1 - dim(kerf)$

$\Rightarrow dimV_1 = dim(kerf) + dim(Imf)$ $\square$

Дефиниција

Ако је $f : V_1 \to V_2$ *линеарно пресликавање, онда*

- $r(f) \stackrel{\text{def}}{=} dim(Imf)$ *се зове ранг хомоморфизма* f
- $d(f) \stackrel{\text{def}}{=} dim(kerf)$ *се зове дефект хомоморфизма* f.

Пример

За дата линеарна пресликавања одредити $Ker f$ и $Im f$:

(i) $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$

(ii) $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $D(p) = p'$

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, 0, y - z)$

(iv) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, u) = (x + y, y - z, x + u)$

За свако од датих пресликавања одредити да ли је инјективно и да ли је сирјективно.