Линеарна алгебра 1

једанаесто предавање

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Минори и кофактори

- Вредност детерминанти другог и трећег реда се лако одређује по дефиницији.
- То није случај са детерминантама вишег реда, потребно је израчунати $n!$ производа.
- Зато излажемо поступак којим се израчунавање детерминанте матрице реда n своди на израчунавање n детерминанaта матрица реда $n-1$.

Дефиниција

Нека је $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$.

- *Са* M_{ij} *означимо матрицу реда* $n-1$ *добијену из* A *изостављањем* i*-те врсте и* j*-те колоне,*
- $det M_{ij}$ *ћемо звати минор елемента* a_{ij}*,*
- $A_{ij} = (-1)^{i+j} det M_{ij}$ *кофактор елемента* a_{ij}*, тј.*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ a_{i1} - & -- & a_{ij} - & -- & a_{in} - \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Придруживање знака $(-1)^{i+j}$ минору M_{ij} можемо приказати

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 6 - 0 \cdot 2) = -6$$

Теорема

Ако је $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$, *тада*

(1) $detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, \ldots, n)$
(развој детерминанте по i*-тој врсти)*

(2) $detA = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, \ldots, n)$
(развој детерминанте по j*-тој колони).*

Теорема

Ако је $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ *тада*

(1) $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$, *за* $i \neq j$

(2) $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0$, *за* $i \neq j$.

Напомена. Обједињујући претходне две теореме добијамо

- $$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} detA, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$
- $$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} detA, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

По којој врсти (колони) развити детерминанту?

- најмање рачунања изискује развој детерминанте по оној врсти или колони која има највећи број нула
- најоптималније је развити детерминанту по врсти или колони која има само један ненула елемент (израчунавање детерминанте реда n се своди на израчунавање само једне детерминанте реда $n-1$)
- таква врста (колона) се увек може добити (применом Последице Теореме 4.)

Пример

Доказати да је детерминанта горње троугаоне матрице једнака производу елемената на главној дијагонали.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \cdots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}
\end{aligned}$$

Инверзна матрица

Дефиниција

Нека је $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ *и* $A_{ij} = (-1)^{i+j} det M_{ij}$ *кофактор елемента* a_{ij}. *Тада се матрица* $adj\,A \overset{\text{def}}{=} [A_{ij}]^T$ *зове адјунгована матрица матрице* A.

Теорема

За $A \in M_n(F)$ *важи*

$$A \cdot adj\,A = adj\,A \cdot A = det\,A \cdot I_n.$$

Доказ.

$$A \cdot adj A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{nk} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{2k}A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k}A_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{nk}A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk}A_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} detA & & \dots & 0 \\ 0 & detA & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & detA \end{bmatrix} = detA \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = detA \cdot I_n.$$

Слично се доказује и друга једнакост. $\square$

Последица. Квадратна матрица $A \in M_n(F)$ је регуларна акко $detA \neq 0$.
У том случају важи

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA.$$

Доказ. ($\rightarrow$) Нека је A регуларна
$\Rightarrow$ постоји A^{-1} и важи $A \cdot A^{-1} = I_n$
$\Rightarrow detA \cdot det(A^{-1}) = det(A \cdot A^{-1}) = detI_n = 1$
$\Rightarrow detA \neq 0.$

($\leftarrow$) Нека је $detA \neq 0$. Тада, применом особина множења матрица скаларом и претходне теореме добијамо

$$\begin{array}{c} A \cdot \left(\frac{1}{detA} adjA\right) = \frac{1}{detA}(A \cdot adjA) = \frac{1}{detA} \cdot detA \cdot I_n = I_n \\ \left(\frac{1}{detA} adjA\right) \cdot A = \frac{1}{detA}(adjA \cdot A) = I_n \end{array},$$

$$\Rightarrow \quad A \text{ је регуларна}, \quad A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA. \square$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \; detA = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \quad A \textit{ je регуларна.}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -7 & 14 & -9 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} & 3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрице

Нека је:

- $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(F)$,
- $v_i^A = [a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}]$ - i-та врста матрице A $(i = 1, 2, \ldots, m)$
- $V(A) = \mathcal{L}\{v_1^A, v_2^A, \ldots, v_m^A\}$ - векторски простор врста матрице A
- $k_j^A = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = [a_{1j}\ a_{2j} \ldots a_{mj}]^T$ - j-та колона матрице A $(j = 1, \ldots, n)$
- $K(A) = \mathcal{L}\{k_1^A, \ldots, k_n^A\}$ - векторски простор колона матрице A.

Очигледно важи

$$V(A) \preceq M_{1\times n}(F) \cong F^n, \quad K(A) \preceq M_{m\times 1}(F) \cong F^m.$$

Теорема

Ако $A \sim_v B$, *тада* $V(A) = V(B)$

(тј. v-еквивалентне матрице имају исти простор врста).

Пример

Одредити једну базу и димензију простора

$$U = \mathcal{L}\{(1,2,3,-4,5),(-2,0,3,1,4),(-1,2,6,-3,-1),(0,4,9,-7,-6)\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

$$dimU = dim(V(A)), \quad \text{где је } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & -7 & -6 \end{bmatrix}.$$

Пример

Матрицу A *елементарним* v*-операцијама сводимо на* v*-степенасту матрицу чије ненула врсте чине базу простора* $V(A)$*:*

$$A \overset{v_{21}^{2},v_{31}^{1}}{\underset{v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & 9 & -7 & -6 \\ 0 & 4 & 9 & -7 & -6 \\ 0 & 4 & 9 & -7 & -6 \end{bmatrix} \overset{v_{32}^{-1},v_{42}^{-1}}{\underset{v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & 9 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V(A) = \mathcal{L}\big\{[1\ 2\ 3\ -4\ -5], [0\ 4\ 9\ -7\ -6]\big\}$$

$$\Rightarrow U = \mathcal{L}\big\{(1,2,3,-4,-5),(0,4,9,-7,-6)\big\}, \quad dimU = 2.$$

Теорема

За свако $A \in M_{m\times n}(F)$ *важи*

$$dimV(A) = dimK(A).$$

Дефиниција

(1) *ранг0=0 (ранг нула матрице једнак је нула).*

(2) *Ако је* $A \neq 0$ *онда је* $rang(A) \overset{\text{def}}{=} dimV(A) = dimK(A).$

Из дефиниције следи да

$$rang : M_{m\times n}(F) \to \{0, 1, \dots, min\{m, n\}\}.$$

Теорема

За $A, B \in M_{m\times n}(F)$ *важи* $A \sim B$ *акко* $rangA = rangB.$

Пример

Одредити ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 5 & a & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 10 \end{bmatrix}$ *у зависности од параметра* $a \in \mathbb{R}$.

$$A \overset{v_{21}^{-2}, v_{31}^{-1}}{\sim}_v \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & a+2 & -1-2a \\ 0 & -1 & -5 & 10-a \end{bmatrix} \overset{v_{32}^{1}}{\sim}_v \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & a+2 & -1-2a \\ 0 & 0 & a-3 & 9-3a \end{bmatrix}$$

па је

$$\begin{array}{ll} (1) & rangA = 2, \quad \text{за } a = 3 \\ (2) & rangA = 3, \quad \text{за } a \neq 3 \end{array}.$$

Теорема

За $A \in M_n(F)$ *важи*

$$rangA = n \quad \text{акко} \quad A \sim_v I_n.$$

Последица.

(1) $A \in M_n(F)$ је регуларна акко $rangA = n$.

(2) $A \in M_n(F)$ је сингуларна акко $rangA < n$.