Линеарна алгебра 1

дванаесто предавање

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Системи линеарних једначина, основни појмови

Нека је F поље и m, n природни бројеви.

Дефиниција

Конјункција једначина

$$(S) \qquad \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

$a_{ij},\ b_i \in F\ (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ *се назива систем од* m *линеарних једначина са* n *непознатих над пољем* F. *Скалари* a_{ij} *се зову коефицијенти,* b_i *слободни чланови система* (S), *а* $x_1, \ldots, x_n$ *су непознате.*

- Систем (S) је:
  - квадратни ако $m = n$ (број једначина једнак броју непознатих)
  - правоугаони ако је $m \neq n$.
- Систем (S) је:
  - хомоген ако $(b_1, \ldots, b_m) = (0, \ldots, 0)$ (сви слободни чланови су =0),
  - нехомоген ако $(b_1, \ldots, b_m) \neq (0, \ldots, 0)$ (бар један слободни члан је $\neq 0$).
- Уређена n-торка $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in F^n$ је решење система (S) ако
  $$(\forall i = 1, \ldots, m) \quad a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n = b_i.$$
- Решити систем (S) значи одредити скуп $\mathcal{R}_S \subseteq F^n$ свих његових решења.

- Систем (S) је:
  - несагласан (противречан, немогућ) ако је $\mathcal{R}_S = \emptyset$,
  - сагласан (непротивречан, конзистентан) ако је $\mathcal{R}_S \neq \emptyset$
    - $card\mathcal{R}_S = 1$- систем је одређен (има јединствено решење)
    - $card\mathcal{R}_S > 1$ - систем је неодређен.
- Хомоген систем

$$(H) \qquad \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

је увек сагласан, јер има бар једно решење $(0, \ldots, 0)$ (n-торка нула).

  - решење $(0, \ldots, 0)$ се зове тривијално решење хомогеног система
  - остала решења, ако постоје, називају се нетривијална.

Пример

Посматрајмо систем $ax = b$ *од једне једначине, са једном непознатом, над произвољним пољем* F.

- $a = 0,\ b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_S = \emptyset$ *- систем није сагласан*
- $a = 0,\ b = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_S = F$ *- систем је неодређен, сваки елемент поља је решење*
- $a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_S = \{a^{-1}b\}$ *- систем има јединствено решење*

Теорема

Ако су $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ *и* $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ *два различита решења система* (S) *и* $\lambda \in F, \lambda \neq 0, \lambda \neq 1,$ *тада је и* $\lambda\xi + (1-\lambda)\eta = (\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\eta_1, \dots, \lambda\xi_n + (1-\lambda)\eta_n)$ *решење система* (S) *различито од претходних.*

Доказ.

$$\begin{aligned}(\forall i = \quad & 1, \dots m) a_{i1}(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\eta_1) + \cdots + a_{in}(\lambda\xi_n + (1-\lambda)\eta_n) = \\ & = \lambda(a_{i1}\xi_1 + \cdots + a_{in}\xi_n) + (1-\lambda)(a_{i1}\eta_1 + \cdots + a_{in}\eta_n) = \\ & = \lambda b_i + (1-\lambda) b_i = b_i\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \lambda\xi + (1-\lambda)\eta$ је решење система (S).

Како је $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$ ово решење је различито од ξ и η.

У супротном,

$$\begin{aligned}\lambda\xi + (1-\lambda)\eta = \xi \quad & \Rightarrow (\lambda - 1)\xi - (\lambda - 1)\eta = 0 \\ & \Rightarrow \underbrace{(\lambda - 1)}_{\neq 0}\underbrace{(\xi - \eta)}_{\neq 0} = 0,\end{aligned}$$

контрадикција.

Ако систем линеарних једначина над бесконачним пољем има два различита решења, онда их има и бесконачно много.

Теорема

Ако је $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ решење сагласног система (S) и (H) одговарајући хомоген систем, тј.

$$(H) \quad \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}, \quad \text{тада је}$$

$$\mathcal{R}_S = \mathcal{R}_H + \xi.$$

Доказ.

- Докажимо најпре $\mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}_H + \xi$.
  Нека је $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathcal{R}_S$. Тада, за $\eta - \xi = (\eta_1 - \xi_1, \dots, \eta_n - \xi_n)$ и свако $i = 1, \dots, m$ важи

  $$a_{i1}(\eta_1 - \xi_1) + \dots + a_{in}(\eta_n - \xi_n) = (a_{i1}\eta_1 + \dots + a_{in}\eta_n) - (a_{i1}\xi_1 + \dots + a_{in}\xi$$

  тј. $\eta - \xi \in \mathcal{R}_H$, па $\eta = \underbrace{(\eta - \xi)}_{\in \mathcal{R}_H} + \xi \in \mathcal{R}_H + \xi$.
- Докажимо сада $\mathcal{R}_S \supseteq \mathcal{R}_H + \xi$.
  За $\eta \in \mathcal{R}_H$ лако се проверава да је $\eta + \xi$ решење система (S), тј. $\eta + \xi \in \mathcal{R}_S$. $\square$

Елементарне трансформације система једначина. Гаусов поступак решавања

Дефиниција

Системи линеарних једначина (S) и (S') над истим пољем и са истим бројем непознатих, су еквивалентни (ознака $(S)\sim(S')$) ако имају исти скуп решења, тј. $\mathcal{R}_S = \mathcal{R}_{S'}$.

Очигледно, релација $\sim$ (еквивалентности два система једначина) је релација еквиваленције.

Дефиниција

Под елементарним операцијама система линеарних једначина подразумевамо:

- J_{ij} *- размена* $i-$*те и* j*-те једначине,*
- $J_i^{\lambda}, \lambda \neq 0$ *- множење* i*-те једначине скаларом* $\lambda \neq 0$,
- J_{ij}^{λ} *-додавање* i*-тој једначини* j*-те једначине која је помножена скаларом* λ,
- *изостављање једначине облика* $0x_1 + \cdots + 0x_n = 0$.

Елементарне операције су инвертибилне:

$$J_{ij}^{-1} = J_{ij}, \quad (J_i^{\lambda})^{-1} = J_i^{\frac{1}{\lambda}},\ \lambda \neq 0, \quad (J_{ij}^{\lambda})^{-1} = J_{ij}^{-\lambda}.$$

Лема. Систем (S') добијен од система (S) применом коначног низа елементарних операција је еквивалентан систему (S).

Систем линеарних једначина облика

$$
(ST) \qquad \begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & \\
a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n & = & b_k \\
0 & = & b_{k+1} \\
 & \vdots & \\
0 & = & b_m,
\end{array} \qquad a_{11}a_{22}\ldots a_{kk} \neq 0,
$$

се зове степенаст систем. Непознате $x_1, x_2, \ldots, x_k$ се зову главне непознате, а остале, ако постоје, су слободне непознате.

Решавање степенастог система линеарних једначина:

- Ако је $(b_{k+1}, \ldots, b_m) \neq (0, \ldots, 0)$ онда систем није сагласан, тј. $\mathcal{R}_S = \emptyset$.
- Ако је $(b_{k+1}, \ldots, b_m) = (0, \ldots, 0)$ онда је систем сагласан и разликујемо два случаја:

- ако је $k = n$ систем има јединствено решење (све непознате су главне)
  решавамо систем од последње према првој једначини:
  - $x_n = b_n / a_{nn}$.
  - Заменимо добијено x_n у претпоследњој једначини и из ње одредимо јединствено x_{n-1}.
  - Настављајући поступак одредимо и преостале непознате.
- Ако је $k < n$ тада постоје слободне непознате $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ које "пребацимо" на десну страну тако да добијамо:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k &= b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{22}x_2 + \dots a_{2k}x_k &= b_2 - a_{2k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ a_{kk}x_k &= b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \cdots - a_{kn}x_n \end{aligned}$$

затим систем решимо по главним непознатим $x_1, \dots, x_k$.

Дакле, систем има бесконачно много решења, тј. неодређен је.

Теорема

(Гаус) Сваки систем линеарних једначина еквивалентан је неком степенастом систему.

Последица. Сваки хомоген систем у коме је број једначина мањи од броја непознатих ($m < n$) има и нетривијална решења.

Кронекер-Капелијева теорема

Систем линеарних једначина

$$(S)\quad \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

је еквивалентан матричној једначини

$$A \cdot X = B,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

па се решавање система (S) своди на решавање матричне једначине $AX = B$.

Ако је $m = n$ и A регуларна матрица, онда постоји A^{-1}, па је $A^{-1} \cdot \backslash AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow I_nX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$,

тј. матрица $A^{-1}B$ је јединствено решење матричне једначине $AX = B$.

Пример

Систем једначина

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 8 \\ x_1 \quad + 2x_3 &= -1 \\ -2x_2 + x_3 &= -5 \end{aligned}$$

је еквивалентан матричној једначини $AX = B$, *где је*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$det A = 8 \neq 0 \Rightarrow A$ *је регуларна* $\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \; X = A^{-1}B$

Систем (S) је потпуно одређен матрицама A и B, тј. матрицом

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

коју називамо проширена матрица система.
Тада, Гаусов метод елиминације непознатих матрично описујемо сводећи проширену матрицу $[A|B]$ система (S) на v-еквивалентну матрицу степенасту по врстама.
Ако пак матрицу $[A|B]$ сведемо на редуковану v-степенасту матрицу, добијамо матрични опис једне модификације Гаусс-ове методе, тзв. Гаусс-Јордан-ове методе редукције. На овај начин се добија v-степенаст систем који је већ решен, наравно уколико је сагласан.

Пример

Решити над пољем $\mathbb{R}$ *систем једначина*

$$(S)\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 & = & \lambda \end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -5 & 0 & \lambda \end{array}\right] \overset{v_{21}^{-2}, v_{31}^{-3}}{\sim}_v \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -7 & -6 & -4 \\ 0 & -4 & -14 & -12 & \lambda - 15 \end{array}\right.$$

$$\overset{v_{32}^{-2}, v_{2}^{-1}}{\sim}_v \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 7 \end{array}\right],$$

па је систем (S) *еквивалентан степенастом систему.*

Нека је

$$(S)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$k_1^A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad k_2^A = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, k_n^A = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ колоне матрице система $A = [a_{ij}]$, тада

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad x_1k_1^A + \cdots + x_nk_n^A = B,$$

тј. (S) је сагласан акко B је линеарна комбинација колона матрице A.

Теорема

$(Cronecker\text{-}Capelli)$ Систем једначина $A \cdot X = B$ је сагласан акко је $rangA = rang[A|B]$.

Нека је

$$(H) \quad \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Теорема

Хомоген систем једначина (H) са n непознатих има нетривијална решења акко $rangA < n$.

Теорема

Скуп решења хомогеног система линеарних једначина $\mathcal{R}_H$ је потпростор векторског простора F^n и $dim\mathcal{R}_H = n - rangA$, где је A матрица система (H).

Последица.

(1) Ако $m < n$ онда хомогени систем (H) има нетривијална решења.

(2) Квадратни хомоген систем (H) има нетривијална решења акко $detA = 0$.

Крамерове формуле

Нека је дат квадратни систем линеарних једначина

$$(KS) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \quad .$$

Нека је $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ матрица система, $D = detA$ њена детерминанта и за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ нека је D_{x_i} детерминанта добијена из D заменом $i-$те колоне колоном слободних чланова, тј.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Теорема

Теорема $(Cramer)$ *Квадратни систем линеарних једначина* (KS) *има јединствено решење акко* $D \neq 0$ *и тада важи*

$$(x_1, \dots, x_n) = (D_{x_1}/D, \dots, D_{x_n}/D).$$

За нехомоген систем (KS):

- $D \neq 0 \Rightarrow \mathcal{R}_{KS} = \{(D_{x_1}/D, \ldots, D_{x_n}/D)\}$ (јединствено решење);
- $D = 0, (\exists i \in \{1, \ldots, n\})\ D_{x_i} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{R}_{KS} = \emptyset$ (систем није сагласан);
- $D = D_{x_1} = \cdots = D_{x_n} = 0 \Rightarrow$ систем или нема решења или има бесконачно много решења (Крамерова теорема не даје одговор).

Пример

Решити над пољем $\mathbb{R}$ систем једначина

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \ , \quad a \in \mathbb{R}. \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

Пример

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2),\ D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,\ D_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2$$

- $a \neq 1, a \neq -2 \Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow$ *систем има јединствено решење* $\mathcal{R}_S = \left\{\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right)\right\} = \left\{\left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)\right\}$
- $a = 1 \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0 \Rightarrow \quad x + y + z = 1$ $\Rightarrow \mathcal{R}_S = \{(1-y-z, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}$ - *бесконачно много решења*
- $a = -2 \Rightarrow D = 0,\ D_x = 9 \Rightarrow \mathcal{R}_S = \emptyset$ - *систем није сагласан*

Пример

Решити над пољем $\mathbb{R}$ систем једначина

$$\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & 0 \\ x+y+az & = & 2 \end{array},\ a\in\mathbb{R}.$$

$D=(a-1)^2(a+2),\quad D_x=(a-1)^2,\quad D_y=3(1-a),\quad D_z=(2a+1)(a-1)$

- $a\neq 1, a\neq -2:\ D\neq 0 \Rightarrow$ *систем има јединствено решење* $\mathcal{R}_S=\{(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D},\frac{D_z}{D})\}=\{(\frac{1}{a+2},\frac{3}{(a+2)(1-a)},\frac{2a+1}{(a+2)(a-1)})\}$
- $a=-2:\ D=0,\ D_x=9\neq 0 \Rightarrow$ *систем није сагласан*
- $a=1: D=D_x=D_y=D_z=0,$ *али ипак систем није сагласан!*