УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Топологија 2

Скрипта

др Маринко Тимотијевић

КРАГУЈЕВАЦ
2021

Садржај

Предговор

У домену свих тополошких простора релација „бити хомеоморфан“ је релација еквиваленције која разбија тополошке просторе на дисјунктне класе еквиваленције. Ова класификација нам омогућава да тополошка својства познатих простора преносимо на сваки простор из његове класе и тако одредимо тополошке карактеристике других простора без њихове непосредне анализе.

Доказ да су два простора хомеоморфна се своди на конструкцију бијективног обострано непрекидног пресликавања једног простора у други, међутим, доказ да два простора нису хомеоморфна је знатно сложенији јер подразумева доказ да такво пресликавање не постоји. Ово се обично постиже уочавањем тополошких својстава које не могу да имају два хомеоморфна простора. Међутим, постоје простори који имају исте познате тополошке карактеристике а за које се зна да нису хомеоморфни што овај метод чини мање ефикасним.

Нешто грубља класификација тополошких простора на класе хомото- пних простора омогућава препознавање нехомеоморфних простора јер два не-хомотопна простора не могу бити хомеоморфни. У ту сврху, у даљем раду ће бити описан метод конструкције алгебарског апарата чија је главна примена препознавање простора који нису хомотопни.

Помоћу хомотопних путева и петљи у тополошким просторима конструисаћемо апарат којим се сваком путевима повезаном тополошком простору додељује алгебарска група чије особине у великој мери одражавају хомоторска својства полазног тополошког простора.

Овај курс ће у великој мери да буде посвећен опису једне комбинаторне технике којом компактни потпростори Еуклидских простора могу до на хомеоморфизам да се представе помоћу коначне фанилије скупова које називамо симплицијални комплекси.

1 Хомотопије

Један од главних фундамената Алгебарске топологије је теорија хомотопије. У овом одељку наводимо њене основне концепте.

Каже се да су два непрекидна пресликавања $f, g : X \to Y$ хомотопна ако f може „непрекидно да се деформише” у пресликавање g, тј. ако постоји непрекидна фамилија пресликавања $\{f_t \mid t \in I\}$ где је $I = [0, 1]$ таква да $f_0 \equiv f$ и $f_1 \equiv g$. Термин

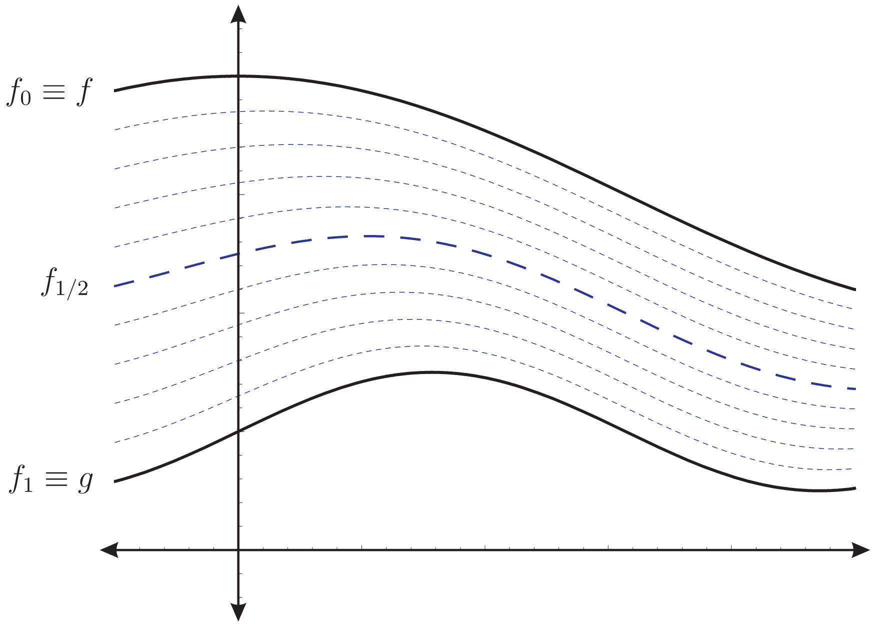

График 1: Хомотопна пресликавања скупа $\mathbb{R}$.

„непрекидна фамилија” се односи на непрекидност пресликавања $F : X \times I \to Y$ датог са $F(x, t) = f_t(x)$ за све $x \in X$ и свако $t \in I$. Отуда и следећа дефиниција.

Дефиниција 1.1. *Кажемо да су пресликавања $f, g : X \to Y$* ***хомотопна*** *(или да је f хомотопно g) ако постоји непрекидно пресликавање $F : X \times I \to Y$ тако да је*

$$F(x, 0) = f(x),$$
$$F(x, 1) = g(x)$$

за свако $x \in X$, при том, топологија на интервалу $[0, 1]$ је релативна у односу на Еклидску топологију реалне праве. Пресликавање F зовемо ***хомотопија*** *и ако је f хомотопно g пишемо $f \simeq g$. Ако за неки скуп $A \subseteq X$ важи $f \restriction_A = g \restriction_A$ и ако постоји хомотопија $F : X \times I \to Y$ таква да је $F(x, a) = f(a) = g(a)$ за свако $a \in A$ и све $t \in I$, тада кажемо да су f и g хомотопни у односу на подскуп A и пишемо $f \simeq g \operatorname{rel} A$.*

Сада наводимо неколико својстава хомотопије и хомотопних пресликавања.

Лема 1.1. *Свако непрекидно пресликавање је хомотопно самом себи, тј. ако је $f : X \to Y$ непрекидно, тада је $f \simeq f$.*

Доказ. Хомотопија $F : X \times I \to Y$ дата $F(x, t) = f(x)$ за све $x \in X$ и све $t \in I$ обезбеђује релацију $f \simeq f$. □

Теорема 1.1. *На скупу $\operatorname{Map}(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f$ је непрекидно пресликавање$\}$ релација $\simeq$ је релација еквиваленције.*

Доказ. Рефлексивност. Важи због Леме 1.1.

Симетричност. Ако је $f \simeq g$, тада постоји хомотопија $H : X \times I \to Y$ тако да $H(x,0) = f(x)$ и $H(x,1) = g(x)$ за свако $x \in X$. Тада, за хомотопију $H' : X \times I \to Y$ дату са $H'(x,t) = H(x,1-t), x \in X, t \in I$ важи $H(x,0) = g(x)$ и $H(x,1) = f(x)$ за свако $x \in X$, па је $g \simeq f$.

Транзитивност. Нека $f \simeq g$ и $g \simeq h$. Тада постоје хомотопије $H_1, H_2 : X \times I \to Y$ такве да за све $x \in X$ важи

$$\begin{aligned} H_1(x,0) &= f(x); \\ H_1(x,1) &= H_2(x,0) = g(x); \\ H_2(x,1) &= h(x). \end{aligned}$$

Сада, пресликавање $H : X \times I \to Y$ дато са

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t), & t \in [0,\frac{1}{2}], \\ H_2(x,2t-1), & t \in [\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

је непрекидно ($H(x,\frac{1}{2}) = H_1(x,1) = H_2(x,0) = g(x), x \in X$) и важи $H(x,0) = H_1(x,0) = f(x)$ и $H(x,1) = H_2(x,1) = h(x)$ за све $x \in X$, па је $f \simeq h$. □

На основу Теореме 1.1, можемо да закључимо да су пресликавања $f, g \in \mathrm{Map}(X,Y)$ хомотопна ако постоји пут у простору $\mathrm{Map}(X,Y)$ који повезује пресликавања f и g (ако је $H : X \times I \to Y$ одговарајућа хомотопија, тада је $L : I \to \mathrm{Map}(X,Y)$ дат са $L(t) = H(x,t), x \in X, t \in I$ поменути пут).

Лема 1.2. *Нека су дати простори X, Y и Z и пресликавања $f_0, f_1 : X \to Y$, $g_0, g_1 : Y \to Z$. Тада из $f_0 \simeq f_1$ и $g_0 \simeq g_1$ следи $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

Доказ. Нека је $F : X \times I \to Y$ хомотопија између f_0 и f_1 и $G : Y \times I \to Z$ хомотопија између g_0 и g_1. Тада, хомотопија $H_0 : X \times I \to Z$ дата са $H_0 = g_0 \circ F$ обезбеђује $g_0 \circ f_0 \simeq g_0 \circ f_1$.

Такође, за хомотопију $H_1(x,t) = G(f_1(x),t), x \in X, t \in I$ важи $H_1(x,0) = G(f_1(x),0) = g_0 \circ f_1(x)$ и $H_1(x,1) = G(f_1(x),1) = g_1 \circ f_1(x)$ за све $x \in X$, па је $g_0 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_1$.

Како је $\simeq$ транзитивна релација следи да је $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. □

Теорема 1.2. *Нека је Y конвексан подскуп скупа $\mathbb{R}^n$ и нека су $f, g : X \to Y$ непрекидна пресликавања. Тада је $f \simeq g$.*

Доказ. Дефинишимо хомотопију $H : X \times I \to Y$ са

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x), \quad x \in X, t \in I$$

Сада, H је непрекидно пресликавање као композиција непрекидних пресликавања и $H(X \times I) \subseteq Y$ јер Y је конвексан скуп. Како за хомотопију H важи $H(x,0) = f(x)$ и $H(x,1) = g(x)$ за свако $x \in X$, следи да је $f \simeq g$. □

Хомотопију H из Теореме 1.2 називамо линеарна хомотопија.

Последица 1.1. *Непрекидна пресликавања $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ су хомотопна.*

Доказ. Следи из чињенице да је $\mathbb{R}^n$ конвексан скуп. $\square$

Размотримо пресликавања простора X на сферу S^{n-1}. Иако $S^{n-1} \subseteq R^n$ није конвексан скуп, скоро свака два пресликавања $f, g : X \to S^{n-1}$ су хомотопна што илуструје следећа лема.

Лема 1.3. *Нека су $f, g : X \to S^{n-1}$ непрекидна пeсликавања таква да је $f(x) \neq -g(x)$ за свако $x \in X$. Тада је $f \simeq g$.*

Доказ. Ако f и g посматрамо као пресликавања простора X и $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, тада је f хомотопно g што омогућава линеарна хомотопија H јер свака линија која спаја тачке $f(x)$ и $g(x)$ не пролази кроз нулу зато што је $f(x) \neq g(x)$ за свако $x \in X$. Уочимо пресликавање $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ дато са $F(x) = \frac{x}{\|x\|}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тада је $F \restriction_{S^{n-1}} = 1_{S^{n-1}}$ где $1_{S^{n-1}}$ представља идентичко пресликавање кружнице.

Даље, пресликавање $H' : X \to S^{n-1}$ дато са $H' = F \circ H$ је непрекидно (као композиција непрекидних пресликавања) и

$$
\begin{aligned}
H'(x,0) =& F(H(x,0)) = F(f(x)) = f(x) \text{ за све } x \in X \text{ јер } g(x) \in S^{n-1};\\
H'(x,1) =& F(H(x,1)) = F(g(x)) = g(x) \text{ за све } x \in X \text{ јер } g(x) \in S^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Дакле, $f \simeq g$. $\square$

Последица 1.2. *Свако непрекидно пресликавање $f : X \to S^n$ које није „на” је хомотопно неком константном пресликавању.*

Доказ. Нека $f : X \to S^n$ и нека постоји $y_0 \in S^n$ тако да $f(x) \neq y_0$ за све $x \in X$. За непрекидно пресликавање $g : X \to S^n$ дато са $g(x) = -y_0$, $x \in X$ важи $f(x) \neq -g(x)$ за свако $x \in X$ па на основу Леме 1.3 важи да је $f \simeq g$. $\square$

Сада, помоћу хомотопних пресликавања да дефинишемо релацију између тополошких простора која ће да буде од великог значаја у остатку курса Алгебарске топологије.

Дефиниција 1.2. (*Хомотопска еквиваленција тополошких простора*)

- *Непрекидно пресликавање $f : X \to Y$ је хомотопска еквиваленција тополошких простора X и Y ако постоји пресликавање $g : Y \to X$ тако да је $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ и $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$.*
- *Простор X је хомотопски еквивалентан простору Y (пишемо $X \simeq Y$) ако постоји хомотопска еквиваленција $f : X \to Y$.*
- *Својство простора које се чува при свакој хомотопској еквиваленцији се назива хомотопско својство.*

Овако дефинисана релација је погодна за анализу тополошких простора јер је релација еквиваленције па разбија топлошке просторе на дисјунктне класе еквиваленције што илуструје следећа теорема.

Теорема 1.3. *Релација међу тополошким просторима „бити хомотоски еквивалентан” је релација еквиваленције.*

Доказ. Очигледно је сваки простор сам себи хомотопски еквивалентан. Такође, ако је $X \simeq Y$, тада је и $Y \simeq X$ јер ако је $f : X \to Y$ хомотопска еквиваленција, тада је по Дефиницији 1.2 и одговарајуће пресликавање $g : Y \to X$ хомотопска еквиваленција.

Остаје да покажемо транзитивност релације. Нека је $X \simeq Y$ и $Y \simeq Z$. Тада постоје хомотопске еквиваленције $f : X \to Y$, $f' : Y \to X$, $g : Y \to Z$ и $g' : Z \to Y$, које обезбеђују хомотопску еквивалентност датих простора.

Како је $f' \circ f = f' \circ \mathbb{1}_Y \circ f$ и $g' \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$, на основу Леме 1.2, следи да је $f' \circ \mathbb{1}_Y \circ f \simeq f' \circ g' \circ g \circ f$, односно $f' \circ f \simeq f' \circ g' \circ g \circ f$. Такође, како је $f' \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ поново, на основу Леме 1.2, следи $f' \circ g' \circ g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$.

Аналогно $g \circ f \circ f' \circ g' \simeq \mathbb{1}_Z$.

Дакле, $g \circ f$ је хомотопска еквиваленција простора X и Z па је $X \simeq Z$. □

Лако се види да су хомеоморфни простори такође и хомотопни. Међутим, класификација простора на хомотопне просторе је грубља од класификације простора на хомеоморфне просторе, тј. постоје хомотопни не-хомеоморфни простори.

Пример 1.1. *Испитати да ли је* $S^1 \times [0,1] \simeq S^1$ *или* $S^1 \times [0,1] \approx S^1$.

Решење. Нека је X омотач ваљка $S^1 \times [-1,1]$ и Y кружница $S^1 \times \{0\}$. Тада, $X \simeq Y$ што обезбеђује хомотопска еквиваленција $f : X \to Y$ дата са $f(x,y,z) = (x,y,0), x \in X$, где је пресликавање $g = i_Y : Y \to X$ инклузионо пресликавање. При том, хомотопија $H : X \times I \to X$ пресликавања $g \circ f$ и $\mathbb{1}_X$ је дата са $H((x,y,z),t) = (x,y,tz),(x,y,z) \in X, t \in I$, а очигледно је $f \circ g = \mathbb{1}_Y$.

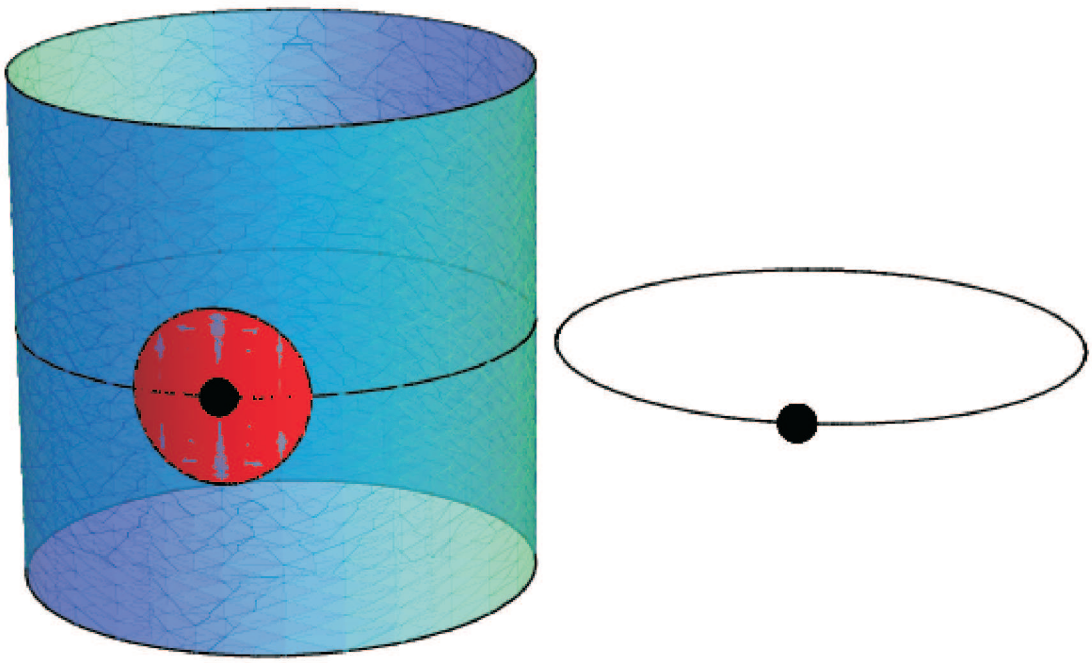

График 2: Цилиндар и кружница су хомотопни простори.

Међутим, ови простори нису хомеоморфни јер кружница нема тачку са околином која је хомеоморфна диску D^2. □

Како је у претходном примеру простор Y био потпростор простора X, дата хомотопска еквиваленција је заправо једна специфична врста пресликавања.

Дефиниција 1.3. *Непрекидно пресликавање $r : X \to A$ простора X на потпростор $A \subseteq X$ називамо ретракција а простор A ретракт простора X ако је $r \restriction_A = \mathbb{1}_A$. Ако је $i_A \circ r \simeq \mathbb{1}_X$ где је $i_A : A \to X$ иклузионо пресликавање, тада r зовемо деформациона ретракција, а потпростор A деформациони ретракт простора X.*

Постоји посебна врста деформационе ретракције $r : X \to A$, тзв. „строга деформациона ретракција" која се разликује од класичне у томе што је хомотопија која је обезбеђује увек идентичка на потпростору A.

Лема 1.4. *Ако је A деформацони ретракт простора X, тада је $A \simeq X$.*

Доказ. Одговарајућа деформациона ретракција $r : X \to A$ је такође и хомотопска еквиваленција јер је по претпоставци $i_A \circ r \simeq \mathbb{1}_X$ а иначе је $r \circ i_A = \mathbb{1}_A$. □

Очигледно је сваки деформациони ретракт такође и ретракт. Међутим, обрнуто није случај што илуструје следећи пример.

Пример 1.2. *Кружница јесте ретракт али није деформациони ретракт торуса.*

Заиста, знамо да је торус T простор хомеоморфан тополошком производу $S^1 \times S^1$. Пројекција тополошког производа $S^1 \times S^1$ на $S^1 \times \{0\}$ дата са $r(x, y) = (x, 0), (x, y) \in S^1 \times S^1$ је тражена ретракција. Међутим, ако би постојала деформациона ретракција

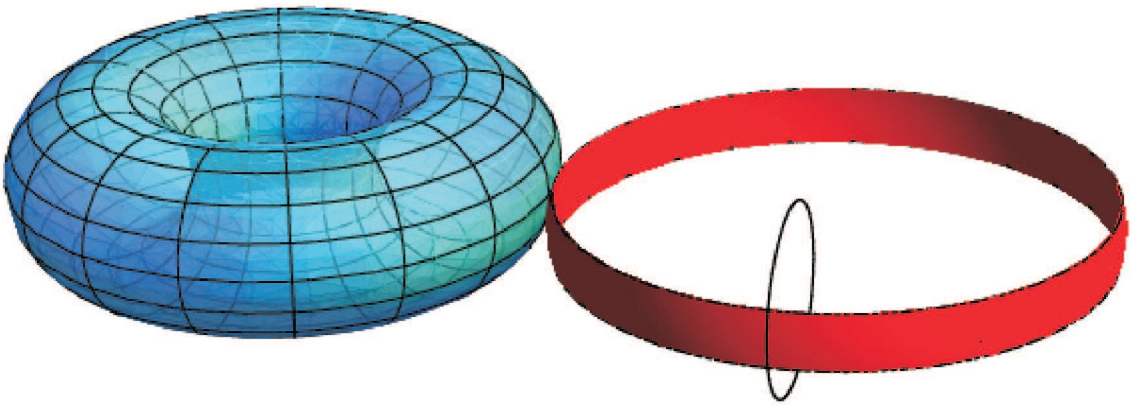

График 3: Пројекција торуса на кружницу је ретракција.

торуса на кружницу на основу Леме 1.4 они би били хомотопски еквивалентни, што није случај (биће доказано у Примеру 3.4). □

Пример 1.3. *Тачка $0 \in \mathbb{R}^n$ је деформациони ретракт диска $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$.*

Заиста, пресликавање $r : D^n \to \{0\}$ дато са $r(x, y) = 0$, $x \in X$ је деформациона ретракција где је хомотопија пресликавања $r \circ i_{\{0\}}$ и $\mathbb{1}_{D^n}$ дата са $H(x, t) = tx$, $x \in D^n$, $t \in I$. □

Како је по Леми 1.4 D^n хомотопски еквивалентан тачки, погодно је дати име просторима са оваквим својством.

Дефиниција 1.4. *Тополошки простор X је* ***контрактибилан*** *ако постоји непрекидно пресликавање $H : X \times I \to X$ такво да је $H(x, 0) = x$ за све $x \in X$ и $H(X \times \{1\}) = \{x_0\}$ за неко $x_0 \in X$. Пресликавање H зовемо контракција. Ако је $H(x_0, t) = x_0$ за свако $t \in I$, кажемо да је простор X контрактибилан у односу на $x_0 \in X$.*

Примери контрактибилних простора су звезда, ћирилчно слово ћ, крст, док сфера $S^n, n \in \mathbb{N}$ није контрактибилан простор.

Видели смо дакле да је релација „бити хомотопан" релација еквиваленције на скупу непрекидних пресликавања тополошких простора. Први део курса Топологије 2 ћемо да посветимо конструкцији тзв. коваринатног функтора који помоћу класа еквиваленције хомотопних непрекидних пресликавања јединичног интервала, сваком тополошком простору додељује једну специјалну групу.

2 Алгебарске структуре алгебарске топологије

Алгебарске структуре које ћемо да додељујемо тополошким просторима имају врло специфичне особине и у овом одељку их анализирамо чисто алгебарски.

2.1 Групоиди

Нека је $G \neq \emptyset$ и нека су $\lambda, \rho : G \to G$ унарне операције. Нека је $\cdot : G \times G \to G$ бинарна операција дефинисана за оне $a, b \in G$ такве да $\rho(a) = \lambda(b)$.

Дефиниција 2.1. *Структура $(G, \cdot, \lambda, \rho)$ је* ***групоид*** *ако задовољава следеће аксиоме:*

$(G1)$ $\lambda \circ \lambda = \lambda = \rho \circ \lambda$, $\lambda \circ \rho = \rho = \rho \circ \rho$;

$(G2)$ $\lambda(a) \cdot a = a = a \cdot \rho(a)$ *за све* $a \in G$;

$(G3)$ $\lambda(a) \cdot \lambda(a) = \lambda(a)$, $\rho(a) \cdot \rho(a) = \rho(a)$ *за све* $a \in G$;

$(G4)$ $\lambda(a \cdot b) = \lambda(a)$, $\rho(a \cdot b) = \rho(b)$ *за све* $a, b \in G$;

$(G5)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *за све* $a, b, c \in G$ *за које је* $\rho(a) = \lambda(b)$ *и* $\rho(b) = \lambda(c)$;

$(G6)$ *за свако* $a \in G$ *постоје* $b \in G$ *и* $c \in G$ *такви да је* $\lambda(b) = \rho(a) = \lambda(c)$ *и* $\rho(b) = \lambda(a) = \rho(c)$ *и за које важи* $a \cdot b = \lambda(a)$ *и* $c \cdot a = \rho(a)$.

Оваква конструкција је на први поглед прилично неуобичајна али надаље, горе наведене операције ће да добију врло конкретне интерпретације у виду својстава класа еквиваленција путева и петљи.

Лема 2.1. ($Синтаксне последице аксиома групоида$) *Нека је G групоид.*

(1) *За свако $a \in G$ и $b, c \in G$ који задовољавају аксиому $(G6)$ важи $b = c$.*

(2) *За свако $a \in G$ постоји јединствено $a^{-1} \in G$ такво да $\lambda(a^{-1}) = \rho(a)$, $\rho(a^{-1}) = \lambda(a)$, $a \cdot a^{-1} = \lambda(a)$ и $a^{-1} \cdot a = \rho(a)$. Такође, за све $a, b \in G$ такве да је $\rho(a) = \lambda(b)$ важи $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.*

Доказ. (1) Нека $a, b, c \in G$ задовољавају услове леме, тада

$$(c \cdot a) \cdot b = \rho(a) \cdot b = \lambda(b) \cdot b = b;$$
$$c \cdot (a \cdot b) = c \cdot \lambda(a) = c \cdot \rho(c) = c,$$

па, на основу особине $(G5)$, важи да је $b = c$.

(2) Ако у тврђењу (1) леме заменимо $a^{-1} = b = c$, на основу аксиоме $(G6)$ следи тврђење за a^{-1}. Нека су $a, b \in G$ и $a^{-1}, b^{-1} \in G$ одговарајући елементи и $\rho(a) = \lambda(b)$. Тада

$$\lambda(b^{-1} \cdot a^{-1}) = \lambda(a^{-1}) = \rho(b) = \rho(a \cdot b),$$
$$\rho(b^{-1} \cdot a^{-1}) = \rho(a^{-1}) = \lambda(a) = \lambda(a \cdot b).$$

Отуда, производ $(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1})$ је дефинисан и важи

$$(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = a \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = a \cdot \lambda(b) \cdot a^{-1} = a \cdot \rho(a) \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = \lambda(a) = \lambda(a \cdot b)$$

$$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b^{-1} \cdot \rho(a) \cdot b = b^{-1} \cdot \lambda(b) \cdot b = b^{-1} \cdot b = \rho(b) = \rho(a \cdot b)$$

што на основу тврђења (1) имплицира да је $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$. $\square$

На основу Леме 2.1, можемо да закључимо да ће елементу $a \in G$ елемент $a^{-1} \in G$ да буде инверзни уз услов да је $\lambda(a) = \rho(a) = e$ где је елемент $e \in G$ неутрални елемент групоида (ако постоји). Отуда и следећа дефиниција.

Дефиниција 2.2. *Групоид $(G, \cdot, \lambda, \rho)$ је **група** ако је $\lambda = \rho$ и ако су оба пресликавања константна.*

Елемент $\{e\} = \lambda(G) = \rho(G)$ је неутрални елемент групе и за свако $a \in G$ на основу Леме 2.1 елемент $a^{-1} \in G$ је јединствено одређен.

Нека је G групоид и $\emptyset \neq H \subseteq G$ неки подскуп скупа G.

Дефиниција 2.3. *Кажемо да је H подгрупоид групоида G ако:*

$(p1)$ *$\lambda(H) \subseteq H$, $\rho(H) \subseteq H$, тј. H је затворен за унарне операције;*

$(p2)$ *за све $a, b \in H$ такве да је $\rho(a) = \lambda(b)$ важи $a \cdot b \in H$;*

$(p3)$ *за све $a \in H$ елемент $a^{-1} \in H$, тј. H је затворен за инверзне елементе.*

Подгрупе групоида G су нарочито интересантне јер се показује да оне употпуности одређене избором једног специфичног елемента скупа G.

Дефиниција 2.4. *Елемент $e \in G$ такав да је $e \cdot e$ дефинисано и $e \cdot e = e$ зовемо **идемпотент** групоида G.*

Лема 2.2. *Ако је $e \in G$ идемпотент, тада је $\lambda(e) = e = \rho(e)$.*

Доказ. Да би производ $e \cdot e$ био дефинисан треба да важи $\lambda(e) = \rho(e)$. Даље,

$$e \cdot (e \cdot e^{-1}) = e \cdot \lambda(e) = e \cdot \rho(e) = e,$$
$$(e \cdot e) \cdot e^{-1} = e \cdot e^{-1} = \lambda(e),$$

отуда, на основу аксиоме $(G5)$ групоида следи $\lambda(e) = e$. $\square$

Сада, помоћу идемпотената групоида одређивати различите подгрупе групоида G.

Нека је $E \subseteq G$ скуп свих идемпотената групоида G. Тада, на основу аксиоме $(G3)$ групоида, следи да је $\lambda(G) = E = \rho(G)$ (јер за $e \in E$ добијамо да је $\lambda(e) = e = \rho(e)$). За идемпотент $e \in E$ нека је $G(e) = \{g \in G \mid \lambda(g) = e = \rho(g)\}$. Покажимо да је $G(e)$ група за све $e \in E$.

Теорема 2.1. *За свако $e \in E$ скуп $G(e)$ је подгрупа групоида G.*

Доказ. Из $\lambda(e) = e = \rho(e)$ следи да $e \in E$. Проверимо услове Дефиниције 2.3.

$(p1)$ $\lambda(G(e)) = \{e\} = \rho(G(e)) \subseteq G(e)$, па $G(e)$ је затворен за унарне операције.

$(p2)$ Нека $a, b \in G(e)$ тада $\rho(a) = \lambda(b) = e$ па је $a \cdot b$ дефинисано и $\rho(a \cdot b) = \rho(b) = e$, $\lambda(a \cdot b) = \lambda(a) = e$, па $a \cdot b \in G(e)$.

$(p3)$ За све $a \in G$ важи $\lambda(a^{-1}) = \rho(a) = e$ и $\rho(a^{-1}) = \lambda(a) = e$, па $a^{-1} \in G(e)$.

Дакле, $G(e)$ је подгрупоид групоида G.

Докажимо да је, $G(e)$ подгрупа. Прво, по дефиницији скупа $G(e)$, λ и ρ су константна пресликавања на $G(e)$. Друго, $e \in G(e)$ је јединствени неутрални елемент јер ако су e и d

различити идемпотенти групоида G, тада је $G(e) \cap G(d) = \emptyset$ (јер ако је $g \in G(e) \cap G(d)$, следи да је $\lambda(g) = e$ и $\lambda(g) = d$, па је $e = d$). $\square$

Дакле, сваки идемпотент групоида G има своју специфичну групу $G(e)$ и различитим идемпотентима одговарају различите групе. Међутим, иако их формирају различити елементи, међу њима постоје изоморфне групе.

За свако $a \in G$, на основу аксиоме $(G3)$ групоида, $\lambda(a)$ и $\rho(a)$ су идемпотенти па можемо да дефинишемо функцију $h_a : G\big(\lambda(a)\big) \to G\big(\rho(a)\big)$. За произвољно $x \in G\big(\lambda(a)\big)$ нека је $h_a(x) = a^{-1} \cdot x \cdot a$ (тзв. индуковани хомоморфизам). Тада $\lambda(a^{-1} \cdot x \cdot a) = \lambda(a^{-1}) = \rho(a)$ и $\rho(a^{-1} \cdot x \cdot a) = \rho(a)$, па $a^{-1} \cdot x \cdot a \in G\big(\rho(a)\big)$.

Теорема 2.2. (*Индуковани хомоморфизам је изоморфизам*)

(1) *За све $a \in G$, пресликавање h_a је изоморфизам.*

(2) *За $a, b \in G$ такве да $\rho(a) = \lambda(b)$ важи $h_{a \cdot b} = h_b \circ h_a$.*

Доказ. (1) Прво, h_a јесте хомеоморфизам јер, произвољне $x, y \in G\big(\lambda(a)\big)$, важи

$$\begin{aligned} h_a(x \cdot y) &= a^{-1} \cdot x \cdot y \cdot a; \\ &= a^{-1} \cdot x \cdot a \cdot a^{-1} \cdot y \cdot a \\ &= (a^{-1} \cdot x \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot y \cdot a) \\ &= h_a(x) \cdot h_a(y). \end{aligned}$$

Покажимо да је пресликавање „1-1”, односно да има тривијално језгро. Нека је $x \in G\big(\lambda(a)\big)$ произвољно. Тада из $h_a(x) = \rho(a)$ добијамо да је $a^{-1} \cdot x \cdot a = \rho(a)$. Ако помножимо претходну релацију елементом a са леве и a^{-1} са десне стране добијамо

$$a \cdot a^{-1} \cdot x \cdot a \cdot a^{-1} = a \cdot \rho(a) \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = \lambda(a).$$

Како је $a \cdot a^{-1} \cdot x \cdot a \cdot a^{-1} = \lambda(a) \cdot x \cdot \lambda(a) = x$, јер x припада групи $G\big(\lambda(a)\big)$, добијамо да је $x = \lambda(a)$ а ово је неутрални елемент групе $G\big(\lambda(a)\big)$.

Покажимо да је h_a „на”. За произвољно $y \in G\big(\rho(a)\big)$ постоји елемент $x = a \cdot y \cdot a^{-1}$ групе $G\big(\lambda(a)\big)$ (јер $\lambda(a \cdot y \cdot a^{-1}) = \lambda(a)$ и $\rho(a \cdot y \cdot a^{-1}) = \rho(a^{-1}) = \lambda(a)$) такав да је

$$h_a(x) = h_a(a \cdot y \cdot a^{-1}) = a^{-1} \cdot (a \cdot y \cdot a^{-1}) \cdot a = (a^{-1} \cdot a) \cdot y \cdot (a^{-1} \cdot a) = \rho(a) \cdot y \cdot \rho(a) = y$$

што доксује да h_a јесте „на” а самим тим и изоморфизам.

(2) Нека $a, b \in G$ тако да $\rho(a) = \lambda(b)$. Тада $\lambda(a \cdot b) = \lambda(a)$ и $\rho(a \cdot b) = \rho(b)$, па за произвољно $x \in G(\lambda(a))$ важи

$$h_{a \cdot b}(x) = (a \cdot b)^{-1} \cdot x \cdot (a \cdot b) = b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot x \cdot a \cdot b = b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot x \cdot a) \cdot b = h_b \circ h_a(x).$$

Дакле, $h_{a \cdot b} = h_b \circ h_a$. $\square$

У овом одељку видели смо структуру и особине једне специфичне групе. У остатку курса ћемо да видимо како се описане структуре препознају у различитим тополошким просторима.

2.2 Презентација групе

Сада наводимо метод презентације група који омогућава једноставан приказ коначно генерисаних група а тиме и препозавање изоморфних група.

Нека је $A \neq \emptyset$ алфабет (скуп слова), $a \in A$ слово. Израз $a^n = aaa\cdots a$ где $n \in \mathbb{Z}$ зовемо слог а израз $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$ где $k \in \mathbb{N}$ зовемо реч.

Нека је $W[A]$ скуп свих речи над алфабетом A где празну реч означавамо са e. Дефинишимо операције над скупом $W[A]$. Производ речи $w_1 = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$ и речи $w_2 = b_1^{m_1} b_2^{m_2} \cdots b_l^{m_l} \in W[A]$ је реч

$$w_1 w_2 = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k} b_1^{m_1} b_2^{m_2} \cdots b_l^{m_l}.$$

Инверзна реч речи $w_1 = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k} \in W[A]$ је реч $w_1^{-1} = a_k^{n_k} \cdots a_2^{n_2} a_1^{n_1}$.

Дефинишимо једну релацију над овако уведеним елементима скупа $W[A]$.

Дефиниција 2.5. (*Еквиваленшне речи*) *Нека* $w_1, \ldots, w_k, \overline{w_1}, \overline{w_2} \in W[A]$. *Тада:*

(I) $\overline{w_1} \simeq \overline{w_2}$ *ако важи један од услова*

- $\overline{w_1} = a^0$ *и* $\overline{w_2} = e$,
- $\overline{w_1} = w_1 a^0 w_2$ *и* $\overline{w_2} = w_1 w_2$,
- $\overline{w_1} = w_1 a^m a^n w_2$ *и* $\overline{w_2} = w_1 a^{m+n} w_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$;

(II) $\overline{w_1} \sim \overline{w_2}$ *ако йосшоји коначан низ речи* $w_1, \ldots, w_k$ *шаквих да*

$$\overline{w_1} \simeq w_1 \simeq \cdots \simeq w_k \simeq \overline{w_2}.$$

Очигледно, $\sim$ је релација еквиваленције. Нека је $F[A] = W[A]/_{\sim}$ одговарајући количнички простор са операцијама дефинисаним на стандардан начин односно, за $[w_1], [w_2] \in F[A]$ нека је $[w_1] \cdot [w_2] = [w_1 w_2]$ и за $[w] \in F[A]$ нека је $[w]^{-1} = [w^{-1}]$.

Тада $(F[A], \cdot)$ зовемо **слободна група** над алфабетом A.

Применимо овај апарат на конкретне групе.

Ако је $(G, *)$ група генерисана елементима скупа A (кажемо генерисана скупом A) тј. $G = \{t^G[\alpha] \mid t \in \mathrm{Term}, \alpha : \mathrm{Var} \to A\}$, тада је пресликавање $f : F[A] \to G$ дато са $f[a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}] = a_1^{n_1} * a_2^{n_2} * \cdots * a_k^{n_k}$ епиморфизам.

$$\begin{tikzcd} F[A] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & G \\ & F[a]/_{\mathrm{Ker}\, f} \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

а то имплицира да је $G \cong F[A]/_{\mathrm{Ker}\, f}$.

Дакле, да би представили класу изоморфних група у којој се коначно генерисана група G налази, можемо да искористимо одговарајућу слободну групу и запис

$$\langle A, \mathrm{Ker}\, f \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid \ldots a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k} = 1 \ldots \rangle$$

који називамо **репрезентација групе** G.

Пример 2.1. *Репрезентације неких познатих група:*

1. $\langle a \mid a^n = 1\rangle \cong \mathbb{Z}_n$ *(циклична група реда* $n \in \mathbb{N}$*);*

2. $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, abab = 1\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Ако познајемо презентацију групе, врло једноставно можемо да применимо својства групе на решавање конкретних проблема што илуструје теорема:

Теорема 2.3. *Нека је* $\langle A \mid R\rangle$ *презентација групе* G *и* $h : A \to G$ *функција таква да* $h(w) = \mathbb{1}_G$ *за свако* $w = 1 \in R$ *(сваки терм из алгебарских закона слика у неутрални елемент). Тада постоји јединствени хомоморфизам* $\overline{h} : \langle A \mid R\rangle \to G$ *који проширује* h*.*

Заиста, хомоморфизам $\overline{h} : \langle A \mid R\rangle \to G$ који је дат са

$$\overline{h}([a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}]) = h(a_1)^{n_1} * h(a_2)^{n_2} * \dots * h(a_k)^{n_k}$$

за $[a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}] \in F[A]$ задовољава услове теореме. □

Како изоморфне групе могу хомоморфизмом да се трансформишу једна у другу, тако и презентације изоморфних група могу да се трансформисшу једна у другу.

Дефиниција 2.6. *Две репрезентације група су еквивалентне ако се једна може добити из друге коначном применом следећих правила*

(1) $\langle A \mid R\rangle \sim \langle A \mid R \cup \{s\}\rangle$ *где је* s *последица правила из* R*,*

(2) $\langle A \mid R\rangle \sim \langle A \cup \{c\} \mid R \cup \{wc^{-1} = 1\}\rangle$ *где је* $c \notin A$ *нови симбол и* $w \in W[A]$*.*

Дефинишимо сада једну специфичну групу која ће веома бити значајна у даљем раду.

Дефиниција 2.7. *Ако су* G *и* G' *коначно генерисане групе са презентацијама* $\langle A \mid R\rangle$ *и* $\langle A' \mid R'\rangle$ *тада, групу чија је репрезентација* $\langle A \cup A' \mid R \cup R'\rangle$ *зовемо слободан производ група* G *и* G' *у ознаци* $G * G'$*.*

Пример 2.2. $\langle a_1, \dots, a_n \mid \emptyset\rangle \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$.

3 Фундаментална Група

У овом одељку позабавићемо се конструкцијом једног функтора који сваком тополошком простору додељује групу коју називамо фундаментална група. Као што ћемо да покажемо, фундаментална група ће да буде једна хомотпоска варијанта, погодна за хомотопску класификацију простора.

Како смо раније напоменули, релација бити хомотопан је једна релација еквиваленције на простору непрекидних пресликавања тополошких простора. Сада ћемо се осврнути на једну специфичну класу пресликавања која јединични интервал $I = [0, 1]$ пресликавају у дати тополошки простор.

3.1 Простори путева и петљи

Нека је $I = [0, 1]$ јединични интервал и $\Omega(X) = \mathrm{Map}(I, X)$ скуп свих путева простора X. Ако је $f \in \Omega(X)$ неки пут, тада $f(0)$ и $f(1)$ зовемо почетна и крајња тачка пута f. Простор $\Omega(X)$ има компактно отворену топологију односно најмању топологију која садржи суббазне скупове облика $M(K, u) = \{f \in \Omega \mid f(K) \subseteq u\}$ где је $K \subseteq I$ компактан скуп, а $u \subseteq X$ отворен скуп.

Нека је $\Omega(X, x_0) = \{f \in \Omega(X) \mid f(0) = x_0\}$ потпростор простора $\Omega(X)$ одређен тачком $x_0 \in X$. Нека је $j : I \to X$ констатно пресликавање $j(I) = \{x_0\}$ које називамо константан пут.

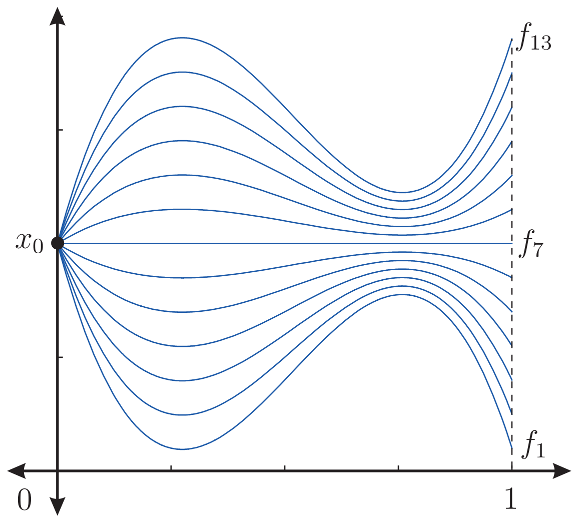

График 4: Простор $\Omega(I, \frac{1}{2})$

Теорема 3.1. *Потпростор $\Omega(X, x_0)$ је контрактибилан и контрахује се у константан пут $j : I \to \{x_0\}$.*

Доказ. Конструишимо контракцију тополошког простора $\Omega(X, x_0)$. Нека је пресликавање $H : \Omega(X, x_0) \times I \to \Omega(X, x_0)$ дато са $H(f, s)_{(t)} = f\big((1 - s)t\big)$ за све $t, s \in I$ и пут $f \in \Omega(X, x_0)$. Тада, H је непрекидно као композиција непрекидних пресликавања и за свако $f \in \Omega(X, x_0)$ и $t \in I$ важи

$$H(f, 0)_{(t)} = f(t) = 1_{\Omega(X,x_0)}(f)_{(t)};$$
$$H(f, 1)_{(t)} = f(0) = j(t)$$

што значи да је $H\restriction_{\Omega(X,x_0)\times\{1\}}$ константно пресликавање.

Како за пресликавање $j\in\Omega(X,x_0)$ и хомотопију H важи $H(j,s)_{(t)} = j\big((1-s)t\big) = x_0 = j(t)$ за све $t\in I$, закључујемо да је $\Omega(X,x_0)$ контрактибилан. $\square$

Контрактибилност простора $\Omega(X,x_0)$ имплицира да су свака два пута из овог простора хомотопна. Због тога нема смисла разматрати класе хомотопних путева овог простора.

Сада ћемо се осврнути на једну другачију класу путева простора X.

Пут $f\in\Omega(X)$ такав да $f(0)=f(1)$ зовемо петља. Нека је $\Lambda(X)=\{f\in\Omega(X)\mid f(0)=f(1)\}$ простор петљи простора X. За фиксирано $x_0\in X$ нека је $\Lambda(X,x_0)=\{f\in\Omega(X)\mid f(0)=f(1)=x_0\}$ простор петљи са основном тачком x_0.

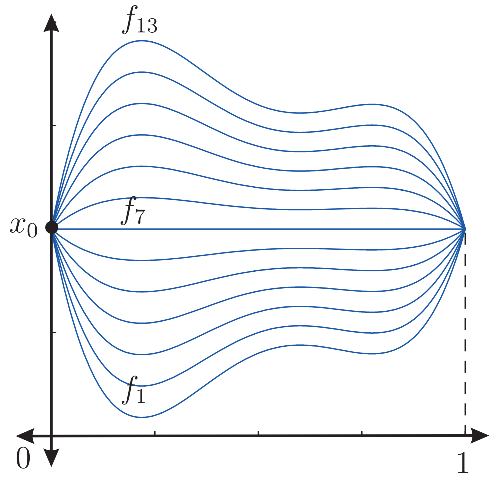

График 5: Простор $\Lambda(I,\frac{1}{2})$.

Овај простор је веома значајан јер је погодан за ефикасну конструкцију алгебарског апарата зато што дозвољава конструкцију специфичних операција.

Дефиниција 3.1. *Производ петљи $f,g\in\Lambda(X,x_0)$ је петља $f\cdot g\in\Lambda(X,x_0)$ дата са:*

$$(f\cdot g)(t)=\begin{cases} f(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}],\\ g(2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

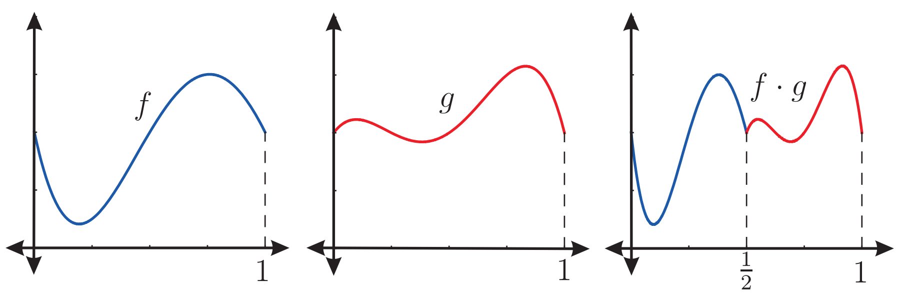

График 6: Множење петљи простора $\Lambda(I,\frac{1}{2})$.

Придруживање $(f,g)\mapsto f\cdot g$ одређује функцију (операцију) $\mu:\Lambda(X,x_0)\times\Lambda(X,x_0)\to\Lambda(X,x_0)$ коју зовемо множење петљи.

Теорема 3.2. *Множење петљи је μ је непрекидна функција.*

Доказ. Покажимо да је инверзна слика суббазног скупа компактно-отворене топологије подпростора $\Lambda(X, x_0)$ отворен скуп у тополошком производу $\Lambda(X, x_0) \times \Lambda(X, x_0)$.

Нека је $u = M(K, w) \cap \Lambda(X, x_0)$ где је $K \subseteq I$ компактан, $w \in \mathcal{T}_X$, отворен скуп у релативној топологији простора $\Lambda(X, x_0)$. Нека су $\widetilde{x}, \widetilde{y} : I \to I$ непрекидна пресликавања дата са $\widetilde{x}(t) = \frac{t}{2}, \widetilde{y}(t) = \frac{t+1}{2}$ за све $t \in I$. Тада, скупови $A = \widetilde{x}^{-1}(K)$ и $B = \widetilde{y}^{-1}(K)$ су компактни у I а скупови $\mathcal{F} = M(A, w) \cap \Lambda(X, x_0)$ и $\mathcal{G} = M(B, w) \cap \Lambda(X, x_0)$ су отворени у $\Lambda(X, x_0)$. Лако се види да је $f \cdot g \in M(K, w)$ ако и само ако је $f \in M(A, w)$ и $g \in M(B, w)$. Отуда је $\mu^{-1}(u) = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ који је отворен у $\Lambda(X, x_0) \times \Lambda(X, x_0)$. $\square$

Како је множење петљи непрекидно, свака петља $f \in \Lambda(X, x_0)$ одређује непрекидна пресликавања $L_f, R_f : \Lambda(X, x_0) \to \Lambda(X, x_0)$ дата са:

$$L_f(g) = f \cdot g, \quad g \in \Lambda(X, x_0) \quad \text{(лево множење са } f);$$
$$R_f(g) = g \cdot f, \quad g \in \Lambda(X, x_0) \quad \text{(десно множење са } f).$$

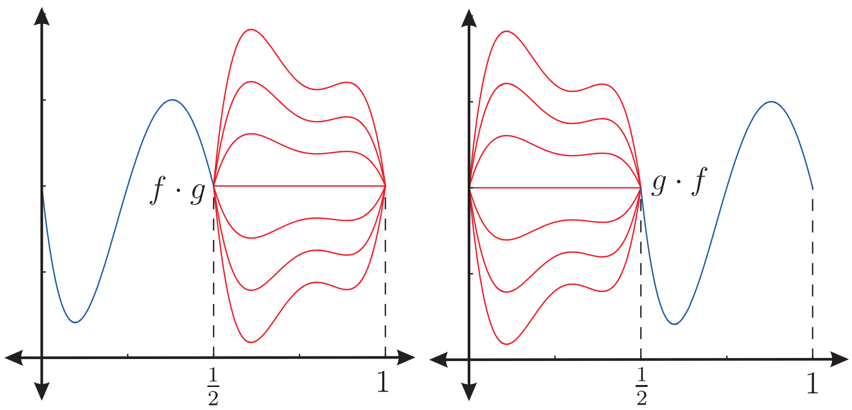

График 7: Лево и десно множење петљи простора $\Lambda(I, \frac{1}{2})$.

Приметимо да множење петљи није комутативна операција. Анализирајмо како константна петља утиче на множење петљи.

Нека је $\gamma : I \to \{x_0\}$ константан пут (петља) у тачки $x_0 \in X$.

Теорема 3.3. *Пресликавања L_γ и R_γ су хомотопна идентичном пресликавању у односу на константну петљу γ.*

Доказ. Докажимо тврђење за пресликавање R_γ. Нека је $H : \Lambda(X, x_0) \times I \to \Lambda(X, x_0)$ пресликавање дато са са:

$$H(f, s)_{(t)} = \begin{cases} f(\frac{2t}{1+s}), & t \in [0, \frac{1+s}{2}] \\ x_o, & t \in [\frac{1+s}{2}, 1] \end{cases}, \quad f \in \Lambda(X, x_0).$$

Тада, H је непрекидно као композиција непрекидних пресликавања и важи

$$H(f, 0)_{(t)} = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ x_o, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = f \cdot \gamma(t) = R_\gamma(f)_{(t)} \text{ за све } t \in I;$$
$$H(f, 1)_{(t)} = f(t) = \mathbb{1}_{\Lambda(X,x_0)}(f)_{(t)} \text{ за све } t \in I$$

где је $\mathbb{1}_{\Lambda(X,x_0)} : \Lambda(X, x_0) \to \Lambda(X, x_0)$ идентичко пресликавање.

Такође, за свако $s \in I$ је $H(\gamma, s)_{(t)} = x_0 = \gamma(t) = R_\gamma(\gamma)_{(t)}, \quad t \in I$ што имплицира да је $R_\gamma \simeq 1_{\Lambda(X,x_0)} \operatorname{rel}\{\gamma\}$ □

Претходни резултат наводи на закључак да, у одређеном смислу, множење петље константном петљом не утиче на класу еквиваленције хомотопних петљи, тј. да је добијена петља хомотопна полазној. Ова особина ће касније да нам послужи да дефинишемо јединични елемент фундаменталне групе.

3.2 Фундаментални групоид и фундаментална група

Сада имамо спреман целокупан апарат за дефинисање фундаменталне групе.

Нека је $\Omega(X) = \mathrm{Map}(I, X)$ скуп свих путева простора X и нека су $\sigma, \tau \in \Omega(X)$.

Дефиниција 3.2. (***Еквивалентни путеви***) *Путеви σ и τ су еквивалентни (пишемо $\sigma \sim \tau$) ако важе услови:*

$(E1)$ $\sigma(0) = \tau(0)$ *и* $\sigma(1) = \tau(1)$ *(σ и τ повезују исте тачке);*

$(E2)$ *постоји хомотопија $H : I \times I \to X$ која задовољава услове:*

- $H(t, 0) = \sigma(t)$,
- $H(t, 1) = \tau(t), \quad t \in I$,
- $H(0, s) = \sigma(0) = \tau(0)$ *и*
- $H(1, s) = \sigma(1) = \tau(1), \quad s \in I$.

Лема 3.1. *Релација $\sim$ је релација еквиваленције на скупу $\Omega(X)$.*

Доказ. Аналогно доказу Теореме 1.1, само треба увидети да се услов рестрикције хомотопије на крајевима интервала чува при комбиновању хомотопија. □

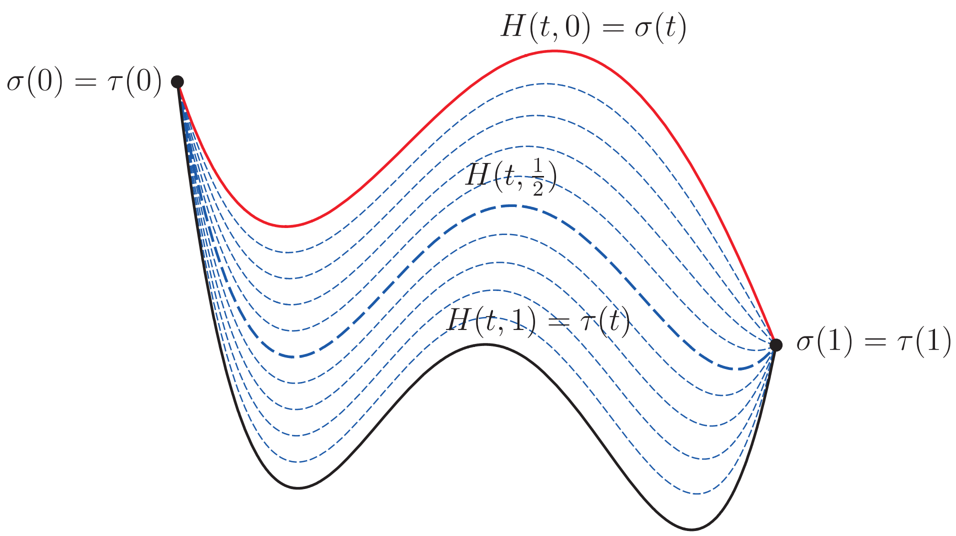

График 8: Еквивалентни путеви.

Дакле, уведена релација је релација еквиваленције на скупу свих путева што значи да помоћу ње можемо да уведемо одговарајућу количничку структуру.

Нека је $\pi(X) = \Omega(X)/_{\sim}$ скуп свих класа еквиваленције. Дефинишимо одговарајуће операције над класама еквиваленције. За класу $a = [\sigma] \in \pi(X)$, нека $a(0)$ и $a(1)$ представљају почетак и крај пута σ, тј. $a(0) = [\sigma(0)]$ и $a(1) = [\sigma(1)]$. Нека је производ класа $a = [\sigma], b = [\tau] \in \pi(X)$ дефинисан за оне класе код којих је $a(1) = b(0)$ и једнак класи $c = a \cdot b = [\sigma \cdot \tau]$ где је пут $\sigma \cdot \tau : I \to X$ дефинисан са

$$\sigma \cdot \tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tau(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Лема 3.2. *Елемент $a \cdot b \in \pi(X)$ не зависи од представника класа a и b.*

***Доказ*.** Нека су $p \in [\sigma] = a$ и $q \in [\tau] = b$ неки други представници класа a и b. Тада, $p \sim \sigma$ и $q \sim \tau$ што значи да постоје хомотопије $H, G : I \times I \to X$ такве да

$$\begin{aligned} &H(t,0) = \sigma(t), \quad H(t,1) = p(t), \quad t \in I, \\ &H(0,s) = \sigma(0) = p(0), \quad H(1,s) = \sigma(1) = p(1), \quad s \in I, \\ &G(t,0) = \tau(t), G(t,1) = q(t), \quad t \in I, \\ &G(0,s) = \tau(0) = q(0), \quad G(1,s) = \tau(1) = q(1), \quad s \in I. \end{aligned}$$

Дефинишимо хомотопију $F : I \times I \to X$ са

$$F(t,s) = \begin{cases} H(2t,s), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t-1,s), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad s \in I.$$

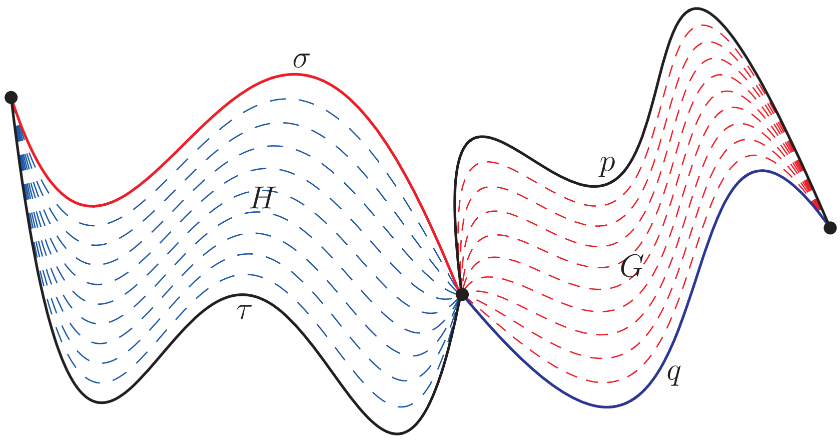

График 9: Повезивање хомотопија из доказа.

Тада, за све $t, s \in I$ и важи

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \begin{cases} H(2t,0), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t-1,0), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} \sigma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tau(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (\sigma \cdot \tau)(t), \\ F(t,1) &= \begin{cases} H(2t,1), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t-1,1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} p(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ q(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (p \cdot q)(t), \\ F(0,s) &= H(0,s) = \sigma(0) = p(0) = \sigma \cdot \tau(0) = p \cdot q(0), \\ F(1,s) &= G(1,s) = \tau(1) = q(1) = \sigma \cdot \tau(1) = p \cdot q(1). \end{aligned}$$

Дакле, $\sigma \cdot \tau \sim p \cdot q$ па $[\sigma \cdot \tau] = [p \cdot q]$. □

Сада можемо да дефинишемо операцију множења класа еквивалентних путева.

Дефиниција 3.3. *Класу $c = a \cdot b \in \pi(X)$ зовемо производ класа $a, b \in \pi(X)$.*

Дефинишимо сада унарне операције $\lambda, \rho : \pi(X) \to \pi(X)$. За произвољну класу еквиваленције $a \in \pi(X)$ нека су $\phi : I \to \{a(0)\}$ и $\psi : I \to \{a(1)\}$ константни путеви, и нека је:

$$\lambda(a) = [\phi], \quad \rho(a) = [\psi].$$

Покажимо да уведена структура задовољава аксиоме групоида претходног одељка односно, проверимо аксиоме Дефиниције 2.1.

Лема 3.3. *За све $a \in \pi(X)$ важи $\lambda(a) \cdot a = a = a \cdot \rho(a)$.*

Доказ. Нека је $\sigma \in a$ произвољан пут. Како је $\lambda(a)_{(0)} = a(0)$, производ $\lambda(a) \cdot a$ је дефинисан. Уочимо хомотопију $H : I \times I \to X$ дефинисану са

$$H(t,s) = \begin{cases} \sigma(0), & t \in [0, \frac{s}{2}] \\ \sigma(\frac{2t-s}{2-s}), & t \in [\frac{s}{2}, 1] \end{cases}.$$

Дефинисано пресликавање је непрекидно као композиција непрекидних пресликавања и важи

$$\begin{aligned} &H(t,0) = \sigma(t), \\ &H(t,1) = \begin{cases} \sigma(0), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \in \lambda(a) \cdot a \\ &H(0,s) = \sigma(0), \\ &H(1,s) = \sigma(1), \end{aligned}$$

што значи да је $\lambda(a) \cdot a = a$. Слично, $a \cdot \rho(a) = a$. □

Дакле, левим односно десним множењем константним путем, у алгебри $\pi(X)$ не мењају се класе еквиваленције добијеног производа.

Теорема 3.4. *$\pi(X)$ је групоид.*

Доказ. Аксиоме $(G1), (G2), (G3), (G4)$ Дефиниције 2.1 важе због Леме 3.2 и Леме 3.3. Докажимо асоцијативност операције $\cdot$ односно аксиому $(G5)$.

Нека су $a = [\alpha], b = [\beta], c = [\gamma] \in \pi(X)$ такви да је $\rho(a) = \lambda(b)$ и $\rho(b) = \lambda(c)$. Тада су елементи $(a \cdot b) \cdot c, a \cdot (b \cdot c) \in \pi(X)$ представљени редом путевима

$$\sigma : I \to X, \quad \sigma(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4t-2), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(4t-3), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

$$\tau : I \to X, \quad \tau(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4t-2), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4t-3), & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}.$$

Покажимо да је $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ односно да је $\sigma \sim \tau$. Уочимо хомотопију $H : I^2 \to X$ дату са

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{s+1}), & t \in [0, \frac{s+1}{4}] \\ \beta(4t-s-1), & t \in [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}] \\ \gamma(\frac{4t-2-s}{2-s}), & t \in [\frac{s+2}{4}, 1] \end{cases}.$$

Како је $\alpha(1) = \beta(0)$ и $\beta(1) = \gamma(0)$, хомотопија H је добро дефинисана и непрекидна као композиција непрекидних пресликавања и за све $t, s \in I$ важи:

$$H(t,0) = \sigma(t),$$
$$H(t,1) = \tau(t),$$
$$H(0,s) = \alpha(0) = \sigma(0),$$
$$H(1,s) = \gamma(0) = \tau(0).$$

Дакле, хомотопија H обезбеђује релацију $\sigma \sim \tau$.

Докажимо аксиому $(G6)$. Нека је $a = [\sigma] \in \pi(X)$ и нека је $\tau : I \to X$ тзв. инверзни пут пута σ дефинисан са $\tau(t) = \sigma(1-t)$ и нека је $b = [\tau] \in \pi(X)$. Како је $\sigma(1) = \tau(0)$ и $\sigma(0) = \tau(1)$, следи да је $\lambda(a) = \rho(b)$ и $\lambda(b) = \rho(a)$ па су производи $a \cdot b$ и $b \cdot a$ дефинисани.

Покажимо да је $a \cdot b = \lambda(a)$ (слично $b \cdot a = \rho(a)$). Нека је $a \cdot b = [\theta]$ где је θ производ путева σ и τ односно пут дефинисан са

$$\theta(t) = \begin{cases} \sigma(t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tau(t), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Тада, хомотопија $H : I^2 \to X$ дата са

$$H(t,s) = \begin{cases} \sigma(2t - 2st), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma(2 - 2s - 2t + 2st), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

задовољава $H(t,0) = \sigma \cdot \tau(t)$, $H(t,1) = \sigma(0)$, $t \in I$ и $H(0,s) = \sigma(0) = \sigma \cdot \tau(0)$, $H(t,1) = \tau(1) = \sigma \cdot \tau(1)$, $s \in I$.

Дакле, пут $\sigma \cdot \tau$ је еквивалентан константном путу у тачки $\sigma(0)$ па, $a \cdot b = \lambda(a)$. □

Дакле, структура $\pi(X)$ је групоид у смислу Дефиниције 2.1 што значи да за њега важе све синтаксне последице које смо описали у поглављу Алгебарске структуре алгебарске топологије. На основу Леме 2.1, елементу $a = [\sigma] \in \pi(X)$ одговара јединствени елемент $a^{-1} = [\tau] \in \pi(X)$, где је τ инверзни пут пута σ.

Нека је $x_0 \in X$ произвољна тачка. Уочимо константан пут $\gamma : I \to X$ и нека је $e = [\gamma] \in \pi(X)$. Тада, e је идемпотент групоида $\pi(X)$ који на основу Теореме 2.1 одређује подгрупу $\pi_1(X, x_0)$ групоида $\pi(X)$.

Дефиниција 3.4. *Групу $\pi_1(X, x_0) = \{a \in \pi(X) \mid \lambda(a) = e = [\gamma] = \rho(a)\}$ називамо* ***фундаментална група*** *простора X у основној (истакнутој) тачки $x_0 \in X$.*

Како за свако $a \in \pi_1(X, x_0)$ важи $\lambda(a) = \rho(a) = e$, следи да је за сваког представника класе a, тј. за пут $\sigma \in a$ испуњено $\sigma(0) = \sigma(1)$. Отуда, могли смо да дефинишемо фундаменталну групу простора X са

$$\pi_1(X, x_0) = \Lambda(X, x_0)/_{\sim}$$

где је $\Lambda(X, x_0)/_{\sim}$ простор петљи са основном тачком x_0.

Опишимо пресликавање из Теореме 2.2 које мења истакнуту тачку фундаменталне групе. Нека је $\sigma : I \to X$ пут и нека су $\sigma(0) = x_0$ и $\sigma(1) = x_1$ почетна и крајња тачка пута σ. Тада, по Теореми 2.2, пут σ индукује изоморфизам $\sigma^{\#} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ дат са:

$$\sigma^{\#}(a) = [\sigma]^{-1} \cdot a \cdot [\sigma], \quad a \in \pi_1(X, x_0).$$

Нека су $\sigma, \tau : I \to X$ два пута који повезују тачке x_0 и x_1 простора X. Они индукују изоморфизме $\sigma^\#, \tau^\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$. Опишимо везу између ових изоморфизама.

Нека су $a = [\sigma], b = [\tau] \in \pi(X)$ класе еквиваленције. Тада, за свако $s \in \pi_1(X, x_0)$ је

$$\begin{aligned}
\tau^\#(s) =& b^{-1} \cdot s \cdot b \\
=& b^{-1} \cdot (a \cdot \underline{a^{-1} \cdot s \cdot a} \cdot a^{-1}) \cdot b \\
=& b^{-1} \cdot a \cdot \sigma^\#(s) \cdot a^{-1} \cdot b \\
=& (a^{-1} \cdot b)^{-1} \cdot \sigma^\#(s) \cdot a^{-1} \cdot b \\
=& c^{-1} \cdot \sigma^\#(s) \cdot c \\
=& h_c \circ \sigma^\#(s)
\end{aligned}$$

где је $c = a^{-1} \cdot b \in \pi_1(X, x_1)$, а $h_c : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_1)$ је тзв. унутрашњи аутоморфизам, групе $\pi_1(X, x_0)$. Дакле, $\tau^\# = h_c \circ \sigma^\#$

Ово је најгенералнији метод којим се уводи фундаментална група тополошког простора. Рачунање фундаменталне групе техникама овог одељка је теоријски врло захтевно. Због тога, у наставку анализирамо тополошких простора која олакшавају одређивање фундаменталне групе.

3.3 Индуковани хомоморфизми

Главна тема овог одељка је одређивање инваријанти тополошког простора које утичу на његову фундаменталну групу. Специјално, утврдићемо какву тополошку односно хомотопску класификацију обезбеђује фундаментална група тополошког простора.

Размотримо прво како функтор фундаменталне групе трансформише морфизме у категорији тополошких простора односно, шта се дешава са непрекидним пресликавањем тополошких простора и одговарајућим фундаменталним групама.

Нека су $\pi(X)$ и $\pi(Y)$ фундаментални групоиди простора X и Y и нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање. За произвољно $[\sigma] \in \pi(X)$, композиција $f \circ \sigma$ одређује класу $[f(\sigma)] \in \pi(Y)$.

Лема 3.4. *Класа $[f(\sigma)] \in \pi(Y)$ не зависи од представника класе $[\sigma] \in \pi(X)$.*

Доказ. Докажимо да из $\sigma \sim \tau$ следи $f \circ \sigma \sim f \circ \tau$.

Нека је $\tau \in [\sigma]$ неки други представник класе $[\sigma]$ односно нека је $\sigma \sim \tau$. То значи да постоји хомотопија $H : I^2 \to X$ таква да за све $t, s \in I$ важи

$$\begin{aligned}
H(t, 0) =& \sigma(t), \\
H(t, 1) =& \tau(t), \\
H(0, s) =& \sigma(0) = \tau(0), \\
H(1, s) =& \sigma(1) = \tau(1).
\end{aligned}$$

Тада, хомотопија $G = f \circ H : I^2 \to Y$ обезбеђује релацију $f(\sigma) \sim f(\tau)$ што имплицира да је $[f(\sigma)] = [f(\tau)] \in \pi(Y)$. □

Претходна лема нам гарантује да можемо да дефинишемо пресликавање фундаменталних групоида $f_* : \pi(X) \to \pi(Y)$ са $f_*([\sigma]) = [f(\sigma)]$ за $[\sigma] \in \pi(X)$. Кажемо да је пресликавање f_* индуковано непрекидним пресликавањем f.

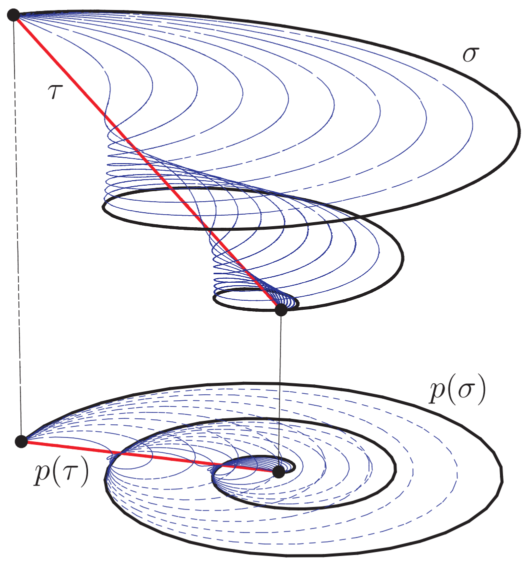

График 10: Нормална пројекција простора $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^2$ чува еквивалентне путеве.

Лема 3.5. *Пресликавање* $f_* : \pi(X) \to \pi(Y)$ *је хомоморфизам групоида.*

Доказ. За произвољне $a = [\sigma]$, $b = [\tau] \in \pi(X)$ такве да је $a(1) = b(0)$, класа $a \cdot b$ је представљена путем $[\phi]$ где је

$$\phi(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tau(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Како је $f \circ \sigma(1) = f(\sigma(1)) = f(\tau(0)) = f \circ \tau(0)$, производ $(f \circ \sigma) \cdot (f \circ \tau)$ је дефинисан и представљен путем

$$f \circ \phi(t) = \begin{cases} f \circ \sigma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f \circ \tau(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Отуда, $f_*(a \cdot b) = [f \circ \phi] = [(f \circ \sigma) \cdot (f \circ \tau)] = [f \circ \sigma] \cdot [f \circ \tau] = f_*(a) \cdot f_*(b)$. □

Дакле, непрекидна пресликавања тополошких простора се трансформишу у хомоморфизам група. Анализирајмо како особине пресликавања f утичу особине индукованог хомоморфизма f_*.

Лема 3.6. (*Особине индукованог хомоморфизма*)

(1) *Ако је* $\mathbb{1}_X : X \to X$ *идентичко пресликавање, тада је* $\mathbb{1}_{X*} : \pi(X) \to \pi(X)$ *идентичко пресликавање групоида* $\pi(X)$.

(2) *Ако су* $f : X \to Y$ *и* $g : Y \to Z$ *непрекидна пресликавања, тада је* $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

(3) *Ако је* $f : X \approx Y$ *хомеоморфизам, тада је* $f_* : \pi(X) \simeq \pi(Y)$ *изоморфизам и важи да је* $(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$.

Доказ. (1) Очигледно јер се путеви сликају сами у себе.

(2) За свако $[\sigma] \in \pi(X)$ и непрекидна пресликавања $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ важи

$$(g \circ f)_*([\sigma]) = [g \circ f(\sigma)] = [g(f(\sigma))] = g_*([f(\sigma)]) = g_* \circ f_*([\sigma]).$$

(3) Како је f^{-1} непрекидно и $(f^{-1})_*$ је хомоморфизам, по својству (2) важи да је,

$$\mathbb{1}_{\pi(X)} = (f \circ f^{-1})_* = f_* \circ (f^{-1})_*, \quad \mathbb{1}_{\pi(Y)} = (f^{-1} \circ f)_* = (f^{-1})_* \circ f_*$$

што доказује да је f_* изоморфизам и да је $(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$. $\square$

Дакле, фундаментални групоид је тополошка инваријанта простора. Анализирајмо сада како индуковани хомоморфизам у контексту фундаменталне групе

Нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање. Нека је x_0 истакнута тачка простора X а $f(x_0) = y_0$ истакнута тачка простора Y. Приметимо да је слика петље у x_0 пресликавањем f петља у $f(x_0)$ а ако хомотопија H обезбеђује еквивалентност путева, она обезбеђује и еквивалентност петљи а самим тим и њена слика $f \circ H$. Отуда, рестрикција инфукованог хомоморфизма групоида на класе представљене петљама индукује пресликавање $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ које зовемо индуковани хомоморфизам фундаменталних група.

Размотримо индуковане хомоморфизме хомотопних пресликавања.

Теорема 3.5. *Нека су $f, g : X \to Y$ непрекидна и хомотопна пресликавања. Тада, за индуковане хомоморфизме $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ и $g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, g(x_0))$ важи релација*

$$g_* = \sigma^\# \circ f_*$$

где је $\sigma^\# : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, g(x_0))$ изоморфизам одређен путем $\sigma : I \to Y$.

Доказ. Нека је $f(x_0) = y_0$ и $g(x_0) = y_1$. Како је $f \simeq g$, постоји хомотопија $H : X \times I \to X$ за коју важи $H(x, 0) = f(x)$ и $H(x, 1) = g(x)$ за све $x \in X$. Дефинишимо пут $\sigma : I \to Y$ са $\sigma(t) = H(x_0, t)$ за $t \in I$. Тада је

$$\begin{aligned} \sigma(0) =& H(x_0, 0) = f(x_0) = y_0, \\ \sigma(1) =& H(x_0, 1) = g(x_0) = y_1. \end{aligned}$$

Отуда σ одређује изоморфизам $\sigma^\# : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_1)$.

Нека је $a = [\alpha] \in \pi(X, x_0)$ произвољно. Дефинишимо непрекидну функцију односно хомотопију $G : I^2 \to Y$ са $G(t, s) = H(\alpha(t), s)$ Тада, за све $t, s \in I$ важи,

$$\begin{aligned} G(0, s) =& H(\alpha(0), s) = H(x_0, s) = \sigma(s), \\ G(1, s) =& H(\alpha(1), s) = H(x_0, s) = \sigma(s), \\ G(t, 0) =& H(\alpha(t), 0) = f(\alpha(t)), \\ G(t, 1) =& H(\alpha(t), 1) = g(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Дакле, G обезбеђује еквиваленцију $g \circ \alpha \sim \sigma^{-1} \cdot (f \circ \alpha) \cdot \sigma$ која у фундаменталним групама одређује једнакост $[g \circ \alpha] = [\sigma]^{-1} \cdot [f \circ \alpha] \cdot [\sigma]$ а самим тим и

$$g_*(a) = \sigma^\#(f_*(a)) = \sigma^\# \circ f_*(a).$$

$\square$

Као што видимо, класична хомотопија између пресликавања у суштини мења истакнуту тачку у кодомену пресликавања која се манифестује као аутоморфиазм фундаменталне групе индукован путем.

Последица 3.1. *Ако је $f \simeq G \operatorname{rel} x_0$, тада је $f_* \equiv g_*$.*

Доказ. У овом случају, одговарајући изоморфизам је индукован константним путем $\sigma : I \to \{y_0\}$ и он представља идентичко пресликавање групе $\pi_1(Y, y_0)$. Отуда је $g_* = 1_{\pi_1(Y, y_0)} \circ f_* = f_*$. $\square$

Анализирајмо идуковани изоморфизам хомотопске еквиваленције.

Теорема 3.6. *Ако је $f : X \to Y$ хомотопска еквиваленција и $f(x_0) = y_0$, тада је индуковани хомоморфизам $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ изоморфизам група.*

Доказ. Како је f хомотопска еквиваленција, постоји $g : Y \to X$ тако да је $g \circ f \simeq 1_X$ и $f \circ g \simeq 1_Y$. Нека је $g(y_0) = x_1$.

Како је $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ и $g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_1)$, добијамо да је $g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ индуковани хомоморфизам. Даље, на основу Леме 3.6, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, а на основу Теореме 3.5 из еквиваленције $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ следи $(g \circ f)_* = \sigma^\# \circ \mathbb{1}_{X*} = \sigma^\#$ где је $\sigma^\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ изоморфизам индукован путем који повезује тачку x_0 са тачком x_1. Дакле, композиција $g_* \circ f_*$ је изоморфизам $\sigma^\#$ што имплицира да је f_* „на”.

Сличним поступком добијамо да је $f_* \circ g_* = \tau^\#$ где је $\tau^\# : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, f \circ g(y_0))$ изоморфизам што имплицира да је f_* „1-1”. □

Дакле, фундаментална група је хомотопска инваријанта тополошких простора тј. хомотопни простори имају изоморфне фундаменталне групе. То својство нам омогућава да препознајемо не-хомотопне тополошке просторе упоређивањем њихових фундаменталних група што је један врло користан алат за анализу тополошких простора јер постоји мали број познатих хомотопних инваријанти.

Такође, претходна теорема нам омогућава да знатно једноставније одредимо фундаменталну групу простора одређивањем фундаменталне групе његовог минималног (у смислу инклузије) деформационог ретракта јер су по Леми 1.4 простор и његов деформациони ретракт хомотопни.

Теорема 3.7. *Нека су $(X, x_0), (Y, y_0)$ тополошки простори са истакнутим тачкама. Тада је $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ (фундаментална група тополошког производа је изоморфна производу фундаменталних група координатних простора).*

Доказ. Како су пројекције тополошких простора $p_1 : X \times Y \to X$ и $p_2 : X \times Y \to Y$ непрекидна пресликавања, она индукују хомоморфизме

$$p_{1*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0), \quad p_{2*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(Y, y_0).$$

Дефинишимо пресликавање

$$h : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

које произвољном елементу $[\sigma] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ додељује елемент $h([\sigma])$ групе $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ дефинисан са

$$h([\sigma]) = \big(p_{1*}([\sigma]), p_{2*}([\sigma])\big).$$

Тада, h јесте хомоморфизам јер су p_{1*}, p_{2*} хомоморфизми.

(„на”) За произвољно $([\sigma_1], [\sigma_2]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ постоји пут $\sigma : I \to X \times Y$ дат са $\sigma(t) = \big(\sigma_1(t), \sigma_2(t)\big), t \in I$ који одређује класу класу $[\sigma] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ за коју важи $h([\sigma]) = ([\sigma_1], [\sigma_2])$.

(„1-1”) Докажимо да је језгро пресликавања h тривијално. Нека је

$$f([\sigma]) = ([p_1 \circ \sigma], [p_2 \circ \sigma]) = \big([e_{x_0}], [e_{y_0}]\big)$$

где је $([e_{x_0}], [e_{y_0}])$ јединични елемент групе $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ представљен константним путевима $e_{x_0} : I \to \{x_0\}$ и $e_{y_0} : I \to \{y_0\}$. Тада постоји хомотопија $H_1 : I^2 \to X$ која обезбеђује еквиваленцију $p_1 \circ \sigma \sim e_{x_0}$ и хомотопија $H_2 : I^2 \to Y$ која обезбеђује еквиваленцију $p_2 \circ \sigma \sim e_{y_0}$. То имплицира да хомотопија $H : I^2 \to Y$ дата са

$$H(s,t) = (H_1(s,t), H_2(s,t)), \quad s,t \in I$$

обезбеђује $\sigma \sim e_{(x_0,y_0)}$, па је $[\sigma] = [e_{(x_0,y_0)}]$. Дакле, језгро хомоморфизма h јесте тривијално. $\square$

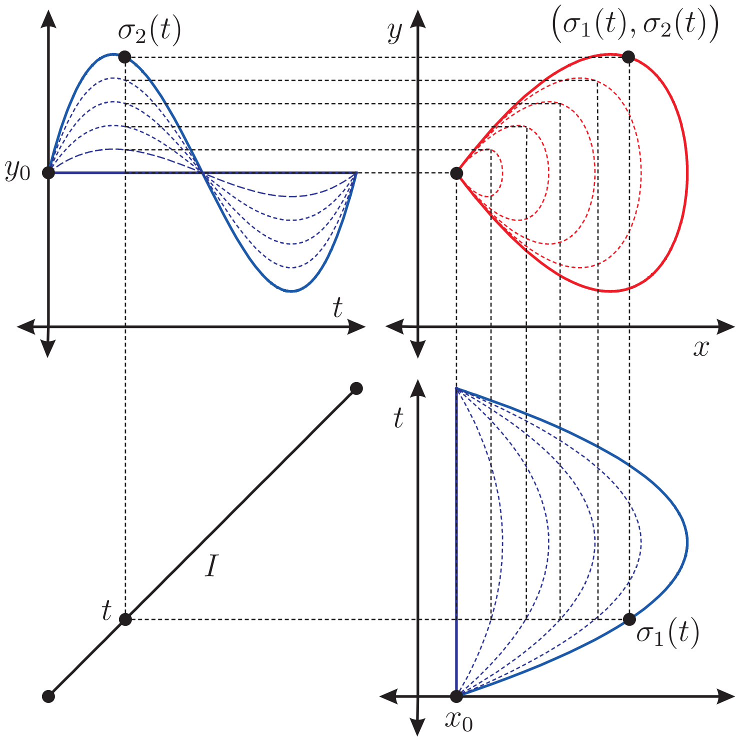

График 11: Хомотопија из доказа за просторе $\pi_1(I, x_0)$,$\pi_1(I, y_0)$ и $\pi_1(I^2, (x_0, y_0))$.

Претходна теорема лако може да се прошири на тополошки производ коначне фамилије тополошких простора. У многим гранама математике, попут Комплексне анализе и Анализе 4, тополошки простори са тривијалном фундаменталном групом су од великог значаја и због тога их посебно именујемо.

Дефиниција 3.5. *Ако је тополошки простор X путевима повезан и $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{O}$ (где је $\mathbb{O}$ тривијална група) тада кажемо да је простор X* ***просто повезан****.*

Последица 3.2. *Тополошки производ просто повезаних тополошких простора је просто повезан тополошки простор.*

3.4 Одређивање фундаменталне групе неких простора.

У овом одељку ћемо да одредимо фундаменталне групе значајних тополошких простора користећи хомотопске технике.

Пример 3.1. *Сваки контрактибилан простор је просто повезан.*

Заиста, ако се X контрахује у тачку $x_0 \in X$ односно ако је синглтон $\{x_0\}$ деформациони ретракт простора X, тада је X хомотопски еквивалентан тачки $\{x_0\}$ па је

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(\{x_0\}, x_0) \cong \mathbb{O} \cong \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle.$$

При том, како је контрактибилан простор и путевима повезан, избор истакнуте тачке не утиче на фундаменталну групу. $\square$

Пример 3.2. *Фундаментална група дводимензионалне сфере је тривијална.*

Заиста, како је сфера путевима повезан простор, можемо да разматрамо њену фундаменталну групу у произвољној тачки $y_0 \in S^2$. Нека је $\sigma : I \to S^2$ произвољна петља у тачки y_0. Тада, скуп $\sigma(I)$, као непрекидна слика компактног скупа I је компактан подскуп T_2 простора S^2, па је и затворен. Отуда постоји тачка $y_1 \in S^2$ која припада екстериору скупа $\sigma(I)$. Сада, стереографска пројекција $h : S^2 \setminus \{y_1\} \to \mathbb{R}^2$ из тачке y_1 је хомеоморфизам простора $S^2 \setminus \{y_1\}$ и Еуклидске равни $\mathbb{R}^2$ па је $h(\sigma(I)) \subseteq \mathbb{R}^2$ затворен и ограничен односно компактан подскуп метричког простора $\mathbb{R}^2$.

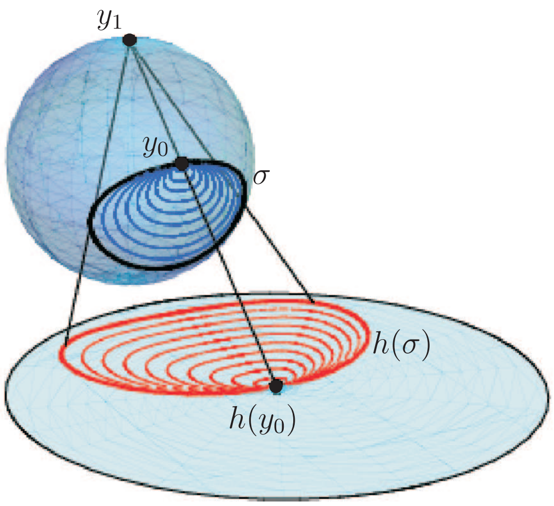

График 12: Хомотопија из доказа.

Отуда, постоји диск $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, h(y_0)) \leqslant r\}$ такав да је $h(\sigma(I)) \subseteq D$. Како је простор D контрактибилан у односу на тачку $h(y_0)$, постоји контракција $H : D \times I \to R^2$ таква да за све $x \in D$ и све $t \in I$ важи:

$$\begin{aligned} H(x,0) =& x, \\ H(x,1) =& h(y_0), \\ H(h(y_0),t) =& h(y_0). \end{aligned}$$

Сада, непрекидно пресликавање тј. хомотопија $H' : I^2 \to S^2 \setminus \{y_1\}$ дата са:

$$H'(t,s) = h^{-1}(H(h(\sigma(t)),s)), \quad s,t \in I$$

обезбеђује еквиваленцију $\sigma \sim e_{y_0}$ јер је:

$$\begin{aligned} H'(t,0) =& h^{-1}(H(h(\sigma(t)),0)) = h^{-1}(h(\sigma(t))) = \sigma(t); \\ H'(t,1) =& h^{-1}(H(h(\sigma(t)),1)) = h^{-1}(h(y_0)) = y_0 \text{ за све } t \in I, \\ H'(0,s) =& h^{-1}(H(h(\sigma(0)),s)) = h^{-1}(H(h(y_0),s)) = h^{-1}(h(y_0)) = y_0, \\ H'(1,s) =& h^{-1}(H(h(\sigma(1)),s)) = h^{-1}(H(h(y_0),s)) = h^{-1}(h(y_0)) = y_0 \text{ за све } s \in I. \end{aligned}$$

Како је петља σ била произвољна, закључујемо да је свака петља на сфери S^2 хомотопна константној петљи чиме смо доказали да је $\pi_1(S^2, y_0) \cong \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$. $\square$

Пример 3.3. *Фундаментална група кружнице је изоморфна бесконачној цикличној групи односно групи целих бројева.*

Доказ. Нека је кружница $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ дата са $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$. Размотримо фундаменталну групу кружнице у тачки $x_0 = (1, 0)$.

Класа еквиваленције $a = [\alpha] \in \pi_1(S^1, x_0)$ пута који обилази кружницу једном

$$\alpha : I \to S^1, \quad \alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad t \in [0, 1]$$

је један не-тривијалан елемент групе $\pi_1(S^1, x_0)$ јер би у супротном хомотопија која обезбеђује релацију $\alpha \sim e_{x_0}$ била и контракција круга што није могуће јер круг није контрактибилан простор.

Даље, за различите $m, n \in \mathbb{Z}$ елементи a^m и a^n су различити у фундаменталној групи $\pi_1(S^1, x_0)$ јер из $a^m = a^n$ следи $a^{m-n} = [\tau] = [e_{x_0}]$ и $S^1 \subseteq \tau(I)$ (јер τ је неки умножак пута α) па би у том случају хомотопија која обезбеђује еквиваленцију $\tau \sim e_{x_0}$ била и контракција простора S^1.

На овај начин смо доказали да је $\langle a \mid \emptyset \rangle$ подгрупа групе $\pi_1(S^1, x_0)$. Покажимо да је произвољно $[\sigma] \in \pi_1(S^1, x_0)$ облика $[\sigma] = a^n$ за неко $n \in \mathbb{Z}$.

Свака петља $\sigma : I \to S^1$ може да се представи у поларним координатама формулом $\sigma(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t)), t \in I$ где је $\varphi : I \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 2n\pi$ за неко $n \in \mathbb{Z}$ (да би σ била петља мора да почиње и завршава се у тачки $(1, 0)$).

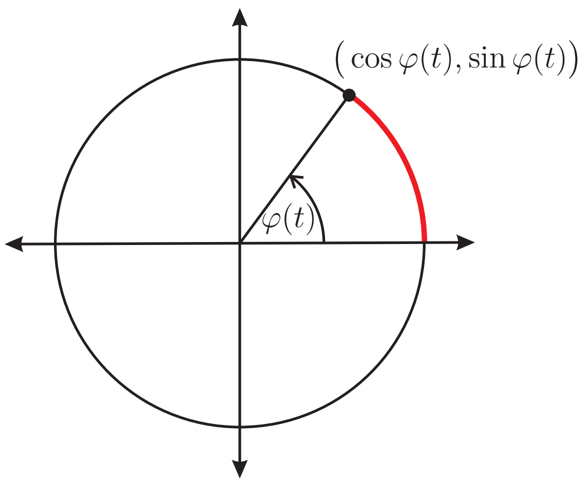

График 13: Петља на кружници у поларним координатама.

Тада, класа a^n је представљена петљом $\tau(t) = (\cos \psi(t), \sin \psi(t)), t \in I$. При том, τ је умножак пута α или његовог инверзног пута а ψ је непрекидна функција за коју је такође $\psi(0) = 0$ и $\psi(1) = 2n\pi$. Тада, функције ψ и φ су хомотопски еквиваленнтне што омогућава линеарна хомотопија $H : I \times I \to \mathbb{R}$ дата са

$$H(t, s) = s\psi(t) + (1 - s)\varphi(t), \quad s, t \in I.$$

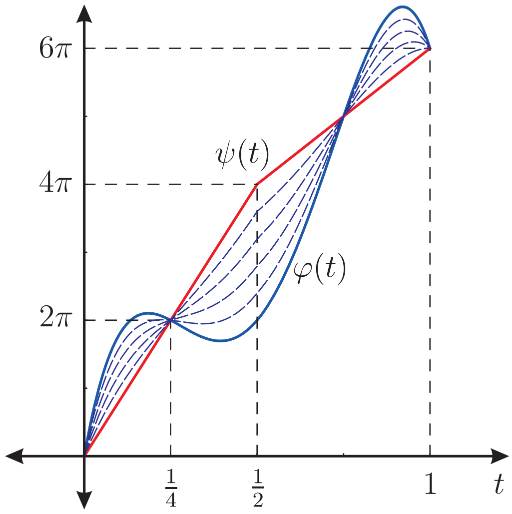

График 14: Хомотопија из доказа за $n = 3$.

Сада можемо да дефинишемо хомотоппију $G : S^1 \times I \to S^1$ са:

$$G(t, s) = (\cos(H(t, s)), \sin(H(t, s)))$$

која обезбеђује еквиваленцију $\sigma \sim \alpha \cdots \alpha$ јер је

$$\begin{aligned}
G(t,0) =&(\cos(H(t,0)), \sin(H(t,0))) = (\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))) = \sigma(t),\\
G(t,1) =&(\cos(H(t,1)), \sin(H(t,1))) = (\cos(\psi(t)), \sin(\psi(t))) = \tau(t) \text{ за све } t \in I,\\
G(0,s) =&(\cos(H(0,s)), \sin(H(0,s)))\\
=&(\cos(s\psi(0) + (1-s)\varphi(0)), \sin(s\psi(0) + (1-s)\varphi(0))\\
=&(\sin 0, \cos 0) = (0,1) = x_0,\\
G(1,s) =&(\cos(H(1,s)), \sin(H(1,s)))\\
=&(\cos(s\psi(1) + (1-s)\varphi(1)), \sin(s\psi(1) + (1-s)\varphi(1))\\
=&(\cos(s2n\pi + (1-s)2n\pi), \sin(s2n\pi + (1-s)2n\pi) = (\sin 2n\pi, \cos 2n\pi)\\
=&(0,1) = x_0 \text{ за све } s \in I.
\end{aligned}$$

Дакле, произвољна петља σ је еквивалентна неком умножку петље α или неком умножку њене инверзне петље што доказује да је сваки елемент $[\sigma] \in \pi(S^1, x_0)$ облика a^n за неко $n \in \mathbb{Z}$ чиме смо доказали да је

$$\pi(S^1, x_0) \cong \langle a \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

□

Следећи пример илуструје примену фундаменталне групе ради хомотопске класификације тополошких простора.

Пример 3.4. *Торус и кружница нису хомотопни простори.*

Заиста, у Примеру 3.3 смо доказали да је фундаментална група кружнице S^1 изоморфна групи целих бројева, а знамо да је торус простор хомеоморфан томолошком производу $S^1 \times S^1$ па, на основу Теореме 3.7, закључујемо да је фундаментална група торуса изоморфна производу фундаменталних група кружница односно групи групи $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$. Како групе $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$ нису изоморфне следи да кружница и торус не могу да буду хомотопски еквивалентни тополошки простори. □

Фундаменталне групе тополошких простора имају примену и у класичној топологији као што ће да буде илустровано у наставку.

Пример 3.5. *Сфера S^1 није ретракт диска D^2.*

Решење. Знамо да је $\pi_1(D^2, x_0) \cong \mathbb{O}$. Ако би постојала ретракција $r : D^2 \to S^1$, тада би одговарајући индуковани хомоморфизам $r_* : \pi_1(D^2, x_0) \to \pi_1(S^1, x_0)$ био „на” а то имплицира да је $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{O}$ што није случај. □

Пример 3.6. *Свако непрекидно пресликавање $f : D^2 \to D^2$ има фиксну тачку.*

Решење. Нека постоји непрекидно пресликавање $f : D^2 \to D^2$ такво да је $f(x) \neq x$ за свако $x \in D^2$. То значи да можемо да дефинишемо непрекидно пресликавање $r : D^2 \to S^1$ са $r(x) = y$ за $x \in D^2$ где је y пресек полуправе која повезује тачке $f(x)$ и x (са почетком у $f(x)$) и кружнице S^1 (оваква полуправа постоји јер је $f(x) \neq x$).

Тада је, $r \restriction_{S^1} = 1_{S^1}$ односно r је ретракција диска на кружницу која по претходном примеру не постоји. □

Нека је $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| \leqslant 1\}$ јединични диск Еуклидске равни $\mathbb{R}^2$ и нека је $\alpha : I \to D^2$ кружница која обилази руб диска S^1 тачно једном и нека је $\alpha(0) = x_0$.

Лема 3.7. *Непрекидно пресликавање $f : S^1 \to X$ има непрекидну екстензију $F : D^2 \to X$ акко је петља $f \circ \alpha : I \to X$ еквивалентна константној петљи у тачки $f(x_0)$.*

Доказ. $(\Rightarrow)$ Нека $f : S^1 \to X$ има непрекидну екстензију $F : D^2 \to X$. Како је простор D^2 контрактибилан, постоји контракција

$$H : D^2 \times I \to D^2.$$

Тада, пресликавање $F' = F \circ H : D^2 \times I \to X$ је контракција простора $F(D^2)$ што значи да је $\pi_1(F(D^2), F(x_0)) \cong \mathbb{O}$. Отуда, свака петља простора $F(D^2)$ је хомотопна константној петљи а самим тим и петља $F(\alpha) = f(\alpha)$.

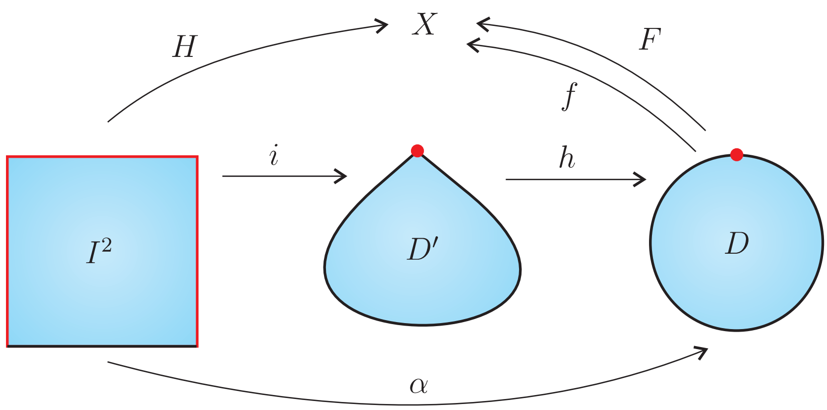

График 15: Дијаграм пресликавања из примера.

$(\Leftarrow)$ Нека је $f : S^1 \to X$ непрекидно и нека је $f(\alpha)$ хомотопна константној петљи $e_{f(x_0)}$. Тада, постоји хомотопија $H : I^2 \to X$ таква да је

$$\begin{aligned} H(t,0) =& f(\alpha(t)), \\ H(t,1) =& f(x_0) \text{ за све } t \in I, \\ H(0,s) =& H(1,s) = f(x_0) \text{ за све } s \in I. \end{aligned}$$

Дакле, пресликавање H три стране квадрата I^2 пресликава у тачку у тачку $f(x_0)$ па, ако све њих идентификујемо са тачком $(1,0)$ идентификацијом $i : I^2 \to D'$, добијамо простор који је хомеоморфан полазном диску D^2 где је пресликавање $h : D' \to D^2$ одговарајући хомеоморфизам.

Сада је пресликавање $F = H \circ i^{-1} \circ h^{-1} : D^2 \to X$ добро дефинисано јер је $i^{-1}(h^{-1}(x_0))$ део границе квадрата који се пресликавањем H слика у једну тачку (као што је приказано на Графику 15). Дакле, пресликавање F представља тражену екстензију. $\square$

У овом одељку смо видели да је одређивање фундаменталне групе простора у најопштем случају захтеван посао. Зато ћемо се у остатку курса позабавити методама за једноставније одређивање фундаменталне групе специфичних тополошких простора.

4 Фундаментална група уније тополошких простора

До сада смо видели како фундаментална група неких простора може једноставно да се одреди користећи фундаменталне групе тополошких простора који су њима хомеоморфни или хомотопски еквивалентни.

У овом одељку анализирамо поступак одређивања фундаменталне групе простора који су представљени као унија специфичних тополошких простора чије фундаменталне групе већ познајемо. Такође, видећемо како се на једноставан начин одређују фундаменталне групе тополошкох простора који су добијени идентификацијама страница раванских фигура, специјално многоуглова.

4.1 Ван Кампенова теорема

Знамо да непрекидно пресликавање тополошких простора индукује хомоморфизам њихових фундаменталних група. Главни апарат који ћемо да користимо у овом одељку су индуковани хомоморфизми инклузија. Наиме, ако је тополошки простор $\mathcal{U}$ потпростор простора $\mathcal{V}$, тада одговарајуће инклузионо пресликавање $i : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ индукује хомоморфизам $i_* : \pi_1(\mathcal{U}, x_0) \to \pi_1(\mathcal{V}, x_0)$ њихових фундаменталних група који класу $[\alpha] \in \pi_1(\mathcal{U}, x_0)$ пресликава у класу представљену истом петљом α али у простору $\mathcal{V}$.

На пример, инклузија $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ индукује хомоморфизам $i_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(D, x_0)$ који генератор $[\alpha]$ групе $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ пресликава у класу $[\alpha] \in \pi_1(D, x_0)$ која је у овој групи јединични елемент јер је $\pi_1(D, x_0)$ тривијална.

Главна идеја је да простор X представимо као унију простора чије фундаменталне групе знамо и да помоћу њих одредимо $\pi_1(X, x_0)$.

Нека простор X и фамилија $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ имају следећа својства:

($\mathcal{U}1$) X је путевима повезан и $x_0 \in X$ је истакнута тачка;

($\mathcal{U}2$) фамилија $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i \mid i \in L\}$ је отворени покривач простора X где су $\mathcal{U}_i$ путевима повезани простори такви да $x_0 \in \mathcal{U}_i$ за све $i \in L$;

($\mathcal{U}3$) за произвољне $\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j \in \mathcal{U}$ постоји $\mathcal{U}_k \in \mathcal{U}$ такав да је $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \mathcal{U}_k$.

Означимо сада идуковане хомоморфизме инклузионих пресликавања скупова овог покривача. Ради лакшег записа, уместо $\pi_1(\mathcal{U}_i, x_0)$ писаћемо $\pi(\mathcal{U}_i)$ и све фундаменталне групе ћемо да рачунамо у тачки x_0.

Ако је $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_j$, нека је $\varphi_{ij} : \pi(\mathcal{U}_i) \to \pi(\mathcal{U}_j)$ хомоморфизам индукован инклузијом $i : \mathcal{U}_i \hookrightarrow \mathcal{U}_j$ и нека је $\psi_i : \pi(\mathcal{U}_i) \to \pi(X)$ хомоморфизам индукован инклузијом $i : \mathcal{U}_i \hookrightarrow X$. Приметимо да ако је $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_j$, тада дијаграм

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathcal{U}_i) \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & \pi_1(X) \\
& \pi_1(\mathcal{U}_j) \arrow[ur, "\psi_j"'] &
\end{tikzcd}$$

комутира, тј. $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$.

Теорема 4.1. (***Ван Кампенова теорема***) *Нека за простор X и покривач $\mathcal{U}$ важе услови ($\mathcal{U}1$), ($\mathcal{U}2$) и ($\mathcal{U}3$) и нека су φ_{ij}, ψ_i горе конструисани хомоморфизми. Нека је G произвољна* *група и нека је* $p_i : \pi(\mathcal{U}_i) \to G$*,* $i \in L$ *фамилија хомоморфизама таква да из* $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_j$ *дијаграм*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathcal{U}_i) \arrow[rr, "p_i"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & G \\
& \pi_1(\mathcal{U}_j) \arrow[ur, "p_j"'] &
\end{tikzcd}$$

комутира, тј. $p_i = p_j \circ \varphi_{ij}$*. Тада, постоји јединствени хомоморфизам* $\sigma : \pi_1(X) \to G$ *такав да за произвољно* $i \in L$ *дијаграм*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathcal{U}_i) \arrow[rr, "p_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & G \\
& \pi_1(X) \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

комутира, тј. $p_i = \sigma \circ \psi_i$

Доказ. Пре конструкције одговарајућег хомоморфизма, анализирајмо структуру фундаменталне групе простора X.

Лема 4.1. *Група* $\pi_1(X)$ *је генерисана елементима скупа* $\bigcup_{i \in L} \psi_i(\pi_1(\mathcal{U}_i))$*.*

Доказ. Нека је $a = [\alpha]$ произвољан елемент фундаменталне групе $\pi_1(X)$ представљен петљом $\alpha : I \to X$. Тада, $\{\alpha^{-1}(\mathcal{U}_i) \mid i \in L\}$ је отворени покривач компактног интервала I што значи да он има Лебегов број $\lambda > 0$. Поделимо интервал I тачкама $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ тако да је $a_{k+1} - a_k < \lambda$ за све $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Сада, користећи особине Лебеговог броја покривача, за свако $k \in \{1, \ldots, n\}$ постоји $i_k \in L$ такав да је $\alpha([a_{k-1}, a_k]) \subseteq \mathcal{U}_{i_k}$.

Како је по својству $(\mathcal{U}3)$ пресек $\mathcal{U}_{i_k} \cap \mathcal{U}_{i_{k+1}}$ скуп покривача $\mathcal{U}$ који је по својству $(\mathcal{U}2)$ путевима повезан, постоји пут $g_k : I \to \mathcal{U}_{i_k} \cap \mathcal{U}_{i_{k+1}}$ који спаја тачке x_0 и $\alpha(a_k)$ за све $k = 1, \ldots, n-1$.

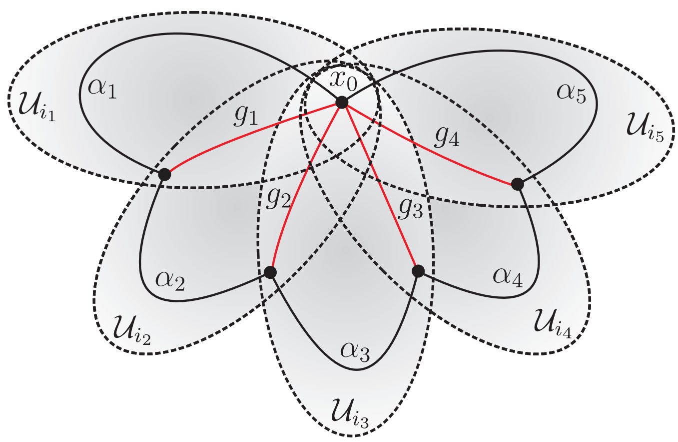

График 16: Представљање петље α за $n = 5$.

Даље, пресликавање $\alpha \restriction_{[a_{k-1}, a_k]}$ (део петље α који повезује тачке $\alpha(a_{k-1})$ и $\alpha(a_k)$) линеарном растућом трансформацијом $l : I \to [a_{i-1}, a_i]$ и композицијом $\alpha_k = \alpha \circ l$ трансформишемо у пут $\alpha_k : I \to \mathcal{U}_{i_k}$ такав да је $\alpha_k(I) = \alpha([a_{k-1}, a_k])$ за све $k = 1, \ldots, n-1$.

Сада, производи $\alpha_1 \cdot g_1^{-1}, g_1 \cdot \alpha_2 \cdot g_2^{-1}, \ldots, g_{n-1} \cdot \alpha_n$ су дефинисани и редом представљају петље у суповима $\mathcal{U}_{i_1}, \mathcal{U}_{i_2}, \ldots, \mathcal{U}_{i_n}$. Како је производ

$$(\alpha_1 \cdot g_1^{-1}) \cdot (g_1 \cdot \alpha_2 \cdot g_2^{-1}) \cdot \ldots \cdot (g_{n-1} \cdot \alpha_n)$$

еквивалентан петљи α, када пређемо на одговарајуће класе еквиваленције добијамо:

$$\begin{aligned} a = [\alpha] =& [\alpha_1 \cdot g_1^{-1}] \cdot [g_1 \cdot \alpha_2 \cdot g_2^{-1}] \cdot \ldots \cdot [g_{n-1} \cdot \alpha_n] \\ =& a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \end{aligned}$$

где је $a_k \in \psi_{i_k}(\pi_1(\mathcal{U}_{i_k}))$ за све $k = 1, \ldots, n$.

Дакле, $\pi_1(X)$ јесте генерисана елементима скупа $\bigcup_{i \in L} \psi_i(\pi_1(\mathcal{U}_i))$. □

Наставимо доказ Ван Кампенове теореме. Нека је G произвољна група и p_i, $i \in L$, фамилија хомоморфизама која задовољава услове теореме. Треба да покажемо да постоји хомоморфизам $\sigma : \pi_1(X) \to G$ такав да за све $i \in L$ важи $p_i = \sigma \circ \psi_i$.

По претходној леми, свако $a \in \pi_1(X)$ може да се представи као производ

$$a = \psi_{i_1}(a_1) \cdot \psi_{i_2}(a_2) \cdot \ldots \cdot \psi_{i_n}(a_n)$$

где $a_k \in \pi_1(\mathcal{U}_{i_k}), k = 1, \ldots, n$. Ово нам омогућава да пресликавање $\sigma : \pi_1(X) \to G$ из теореме дефинишемо са

$$\sigma(a) = p_{i_1}(a_1) \cdot p_{i_2}(a_2) \cdot \ldots \cdot p_{i_n}(a_n).$$

Како су p_i хомоморфизми и овако дефинисано σ ће да буде хомоморфизам. При том, $\sigma \restriction_{\pi_1(\mathcal{U}_i)} = p_i$ јер вредност $\sigma([\alpha])$ не зависи од декомпозиције петље α, простора $\mathcal{U}_i$ што доказује следећа лема.

Лема 4.2. *Нека су $\mathcal{U}_i$ и $\mathcal{U}_j$ два скупа покривача $\mathcal{U}$ и нека је $\alpha : I \to \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ петља у тачки x_0. Ако је $a = [\alpha] \in \pi_1(\mathcal{U}_i)$ и $b = [\alpha] \in \pi_1(\mathcal{U}_j)$, тада је $p_i(a) = p_j(b)$.*

Доказ. На основу својства ($\mathcal{U}3$) скуп $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ припада покривачу $\mathcal{U}$, па елемент $c = [\alpha]$ припада групи $\pi_1(\mathcal{U}_k)$. Како је $\mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_i$ и $\mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_j$ видимо да је $a = \varphi_{ki}(c)$ и $b = \varphi_{kj}(c)$. Како фамилија хомоморфизама p_i, $i \in L$, задовољава услов теореме добијамо да је

$$\begin{aligned} p_i(a) =& p_i \circ \varphi_{ki}(c) = p_k(c), \\ p_j(b) =& p_j \circ \varphi_{kj}(c) = p_k(c). \end{aligned}$$

Из претходне две једнакости добијамо да је $p_i(a) = p_j(b)$. □

Покажимо да је σ добро дефинисано односно да вредност $\sigma(a)$ не зависи од декомпозиције $a = \psi_{i_1}(a_1) \cdot \psi_{i_2}(a_2) \cdot \ldots \cdot \psi_{i_n}(a_n)$ (приметимо из доказа Леме 4.1 да декомпозиција не мора да буде јединствена). С тим у вези, ако је b нека друга декомпозиција истог елемента групе $\pi_1(x)$, уместо да показујемо да из $a = b$ следи $\sigma(a) = \sigma(b)$, показаћемо да из $c = a \cdot b^{-1} = 1$ (при том, $c = a \cdot b^{-1}$ је декомпозиција јединице) следи $\sigma(a) \cdot (\sigma(b))^{-1} = \sigma(a \cdot b^{-1}) = \sigma(c) = 1$.

Лема 4.3. *Нека су $a_k \in \pi_1(\mathcal{U}_{i_k})$, $i_k \in L$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тада из,*

$$\psi_{i_1}(a_1) \cdot \psi_{i_2}(a_2) \cdot \ldots \cdot \psi_{i_n}(a_n) = 1, \quad \textit{следи} \quad p_{i_1}(a_1) \cdot p_{i_2}(a_2) \cdot \ldots \cdot p_{i_n}(a_n) = 1.$$

Доказ. Нека је $a_k = [f_k]$ где $f : I \to \mathcal{U}_{i_k}$ за $k = 1, \dots, n$. Тада је $\psi_{i_1}(a_1) \cdot \psi_{i_2}(a_2) \cdot \ldots \cdot \psi_{i_n}(a_n)$ елемент $[f] \in \pi_1(X)$ представљен петљом $f : I \to X$ која има форму производа петљи $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$. Отуда, постоји подела јединичног интервала I тачкама $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = 1$ тако да је $f([c_{k-1}, c_k]) = f_k(I)$ за $k = 1, \dots, n$. По претпоставци, петља f је еквивалентна константној петљи што значи да постоји хомотопија $H : I^2 \to X$ таква да

$$\begin{aligned} H(t,0) =& f(t), \\ H(t,1) =& x_0 \text{ за све } t \in I, \\ H(0,s) =& H(1,s) = x_0 \text{ за све} s \in I. \end{aligned}$$

Нека је $\lambda > 0$ Лебегов број отвореног покривача $\{H^{-1}(\mathcal{U}_i) \mid i \in L\}$ компактног метричког простора I^2. Поделимо квадрат I^2 на правоугаонике дијаметра мањег од λ тачкама $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ и $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$ таквим да је $\{c_1, \dots, c_n\} \subseteq \{t_1, \dots, t_m\}$. За све $i, j \in 0, 1, \dots m$, означимо елементе добијених правоугаоника на следећи начин:

- темена: $v_{ij} = (t_i, s_j)$,
- правоугаоници: $K_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j], i \neq 0, j \neq 0$,
- хоризонталне странице: $a_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times \{s_j\}$
- вертикалне странице: $b_{ij} = \{s_i\} \times [s_{j-1}, s_j]$.

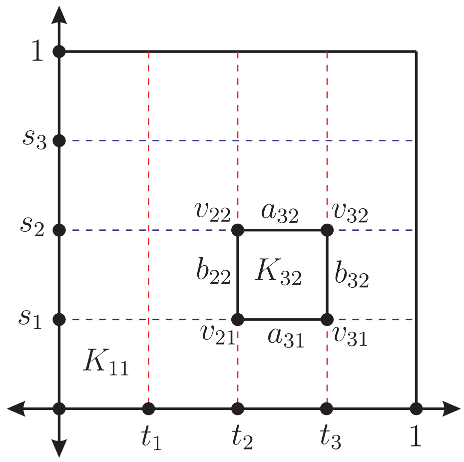

График 17: Подела квадрата I^2 за $m = 4$.

Сада можемо да дефинишемо путеве $A_{ij} = H(a_{ij})$ и $B_{ij} = H(b_{ij})$. Како производи $A_{ij-1}B_{ij}$ и $B_{i-1j}A_{ij}$ представљају путеве који повезују тачке $H(v_{i-1j-1})$ и $H(v_{ij})$ у контрактибилном простору $H(K_{ij})$, они су елвивалентни што имплицира да је за све $i, j = 1, \dots, n$

$$A_{ij-1}B_{ij} \sim B_{i-1j}A_{ij}.$$

Како смо правоугаонике одабрали да буду дијаметра мањег од λ, сваком K_{ij} одговара скуп $\mathcal{U}_{\lambda_{ij}}$ (за неко $\lambda_{ij} \in L$) тако да је $H(K_{ij}) \subseteq \mathcal{U}_{\lambda_{ij}}$ за све $i, j = 1, \dots, m$.

Када овако одаберемо скупове из покривача $\mathcal{U}$, свако теме $H(v_{ij})$ правоугаоника се налази у коначно много скупова покривача $\{\mathcal{U}_{\lambda_{ij}} \mid i, j \in 1, \dots m\}$ скупа $H(I^2)$. Због својства $(\mathcal{U}3)$, постоји пут g_{ij} који повезује тачку x_0 и $H(v_{ij})$ и који је цео садржан у сваком скупу покривача $\{\mathcal{U}_{\lambda_{ij}} \mid i, j \in 1, \dots m\}$ који садржи $H(v_{ij})$.

Сада, за свако $i, j = 1, \dots, m$ можемо да дефинишемо елементе $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in G$ са

$$\alpha_{ij} = p([g_{i-1j} \cdot A_{ij} \cdot g_{ij}^{-1}], \quad \beta_{ij} = p([g_{i-1j} \cdot B_{ij} \cdot g_{ij}^{-1}])$$

који престављају слике класа еквиваленција петљи $g_{i-1j} \cdot A_{ij} \cdot g_{ij}^{-1}$ и $g_{i-1j} \cdot B_{ij} \cdot g_{ij}^{-1}$ које садрже путеве A_{ij} и $B_{i,j}$. Приметимо да су су α_{ij} и β_{ij} елементи групе G који због Леме 4.2 не зависе од пресликавања p фамилије $\{p_i \mid i \in L\}$.

Ако искористимо еквиваленције $A_{i,j-1}B_{ij} \sim B_{i-1j}A_{ij}$ и $g_{ij}^{-1} \cdot g_{ij} \sim e_{H(v_{ij})}$, закључујемо да за све $i, j = 1, \dots, n$ важи релација

$$g_{i-1j-1} \cdot A_{i,j-1} \cdot g_{ij-1}^{-1} \cdot g_{ij-1} \cdot B_{ij} \cdot g_{ij}^{-1} \sim g_{i-1j-1} \cdot B_{i-1j} \cdot g_{i-1j}^{-1} \cdot g_{i-1j} A_{ij} \cdot g_{ij}^{-1}.$$

Применом одговарајућег хомоморфизма p на класе еквивалнције, претходна релација за све $i, j = 1, \dots, m$ постаје једнакост

$$\alpha_{i,j-1}\beta_{ij} = \beta_{i-1j}\alpha_{ij}.$$

Сада, како је полазна петља f еквивалентна петљи $\prod_{i=1}^{m} g_{i-1\,0} \cdot A_{i0} \cdot g_{i0}^{-1}$, закључујемо да у групи G важи једнакост

$$\prod_{i=1}^{n} p_{i_i}(a_i) = \prod_{i=1}^{m} \alpha_{i0}.$$

Даље, како је $H(s, 1) = H(0, t) = H(1, t) = x_0$ закључујемо да је $\alpha_{im} = 1$ за све $i = 1, \dots, m$ и $\beta_{0,j} = 1$, и $\beta_{m,j} = 1$ за све $j = 1, \dots, m$. Тако добијамо да је за све $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{m} \alpha_{ij-1} &= \alpha_{1j-1} \cdot \alpha_{2j-1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{mj-1} \\
&= \alpha_{1j-1} \cdot \alpha_{2j-1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{mj-1} \cdot \beta_{mj} \\
&= \alpha_{1j-1} \cdot \alpha_{2j-1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{m-1j-1} \cdot \beta_{m-1j} \cdot \alpha_{mj} \\
&= \alpha_{1j-1} \cdot \alpha_{2j-1} \cdot \ldots \cdot \beta_{m-2j} \cdot \alpha_{m-1j} \cdot \alpha_{mj} \\
&\ \ \vdots \\
&= \beta_{0j} \cdot \alpha_{1j} \cdot \alpha_{2j} \cdot \ldots \cdot \alpha_{mj} \\
&= \alpha_{1j} \cdot \alpha_{2j} \cdot \ldots \cdot \alpha_{mj} = \prod_{i=1}^{m} \alpha_{ij}
\end{aligned}$$

Ако претходно доказану једнакост применимо m пута, добијамо

$$\prod_{i=1}^{m} \alpha_{i0} = \prod_{i=1}^{m} \alpha_{i1} = \cdots = \prod_{i=1}^{m} \alpha_{in}$$

а како је $\prod_{i=1}^{m} \alpha_{im} = 1$, добијамо да је $\prod_{k=1}^{m} \alpha_{i0} = \prod_{k=1}^{n} p_{i_k}(a_k) = 1$.

Напокон, пресликавање σ је добро дефинисано. □

Дакле, σ је тражени хомоморфизам чиме је Ван Кампенова теорема доказана. □

Занимљиво је да група G Ван Кампенове теореме у најопштијем случају може да буде произвољна. На пример, ако је G тривијална група, услови Ван Кампенове теореме су задовољени за произвољан избор фамилије хомоморфизама p_i, $i \in L$. Да би

Ван Кампенову теорему искористили да употпуности одредимо $\pi_1(X)$, потребно је да одаберемо групу G тако да хомоморфизам σ буде бар „на”. У ту сврху, искористићемо репрезентације група.

Нека је $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i \mid i \in L\}$ отворени покривач простора X који задовољава услове $(\mathcal{U}1), (\mathcal{U}2)$ и $(\mathcal{U}3)$ и нека је $\pi_1(\mathcal{U}_i) = \langle A_i \mid R_i \rangle$ за све $i \in I$. Нека је

$$*_{i\in L}\pi_1(\mathcal{U}_i) = \left\langle \bigcup_{i\in L} A_i \mid \bigcup_{i\in L} R_i \right\rangle$$

слободан производ група $\pi_1(\mathcal{U}_i)$, $i \in L$. Нека је N нормална подгрупа групе $*_{i\in L}\pi_1(\mathcal{U}_i)$ генерисана елементима облика $\varphi_{ij}(a)b^{-1}$ где је $a \in \pi_1(\mathcal{U}_i)$ и $b = \varphi_{ij}(a)$ за све парове $i, j \in L$ такве да је $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_j$. Тада, ако је $G = *_{i\in L}\pi_1(\mathcal{U}_i)/N$ а p_i композиција инклузије $\pi_1(\mathcal{U}_i) \hookrightarrow *_{i\in L}\pi_1(\mathcal{U}_i)$ и количничког хомоморфизма $*_{i\in L}\pi_1(\mathcal{U}_i) \to G$, дијаграм

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathcal{U}_i) \arrow[rr, "p_i"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & G \\ & \pi_1(\mathcal{U}_j) \arrow[ur, "p_j"'] & \end{tikzcd}$$

комутира за свако $i \in L$. То по Ван Кампеновој теореми имплицира да постоји јединствени хомоморфизам $\sigma : \pi_1(X) \to G$. Докажимо да је σ изоморфизам.

Ако је $a_1 \cdots a_n$ произвољан елемент групе G, тада $a_k = [\gamma_k] \in \pi_1(\mathcal{U}_{i_k})$, $i = 1, \ldots, n$. Због структуре и јединствености хомоморфизма σ, елемент $[\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n] \in \pi_1(X)$ је такав да је $\sigma([\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n]) = p_1([\gamma_1]) \cdots p_n([\gamma_n]) = a_1 \cdots a_n$ чиме смо доказали да је σ „на”.

Потражимо језгро пресликавања σ. Нека је $a \in \pi_1(X)$ такав да је $\sigma(a) = 1$. По Леми 4.1, елемент a је облика $\psi_{i_1}(a_1) \cdots \psi_{i_n}(a_n)$ где је $a_k = [\gamma_k] \in \pi_1(\mathcal{U}_{i_k})$, $k = 1, \ldots, n$ односно $a = [\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n]$. Како је елемент $\sigma(a) = a_1 \cdots a_n$ тривијалан у групи G, постоји поступак свођења у којем су могућа два корака:

- за неко k је $a_k = 1 \in \pi_1(\mathcal{U}_{i_k})$ што имплицира да у простору X важи

$$\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_k \cdot \ldots \cdot \gamma_n \sim \gamma_1 \cdot \ldots \cdot e_{x_0} \cdot \ldots \cdot \gamma_n \sim \prod_{j\neq k} \gamma_j;$$

- за неко k је $a_{k+1} = a_k^{-1}$ или је $\varphi_{i_k i_{k+1}}(a_k) = a_{k+1}^{-1}$ који у оба случаја имплицира да у простору X важи еквиваленција $\gamma_k \cdot \gamma_{k+1} \sim e_{x_0}$ а самим тим и

$$\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_k \cdot \gamma_{k+1} \cdot \ldots \cdot \gamma_n \sim \gamma_1 \cdot \ldots \cdot e_{x_0} \cdot \ldots \cdot \gamma_n \sim \prod_{j\neq k,k+1} \gamma_j.$$

Коначном применом правила свођења добијамо да је $\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n \sim e_{x_0}$ што значи да је $a = 1 \in \pi_1(X)$. Дакле, језгро пресликавања σ је тривијално чиме смо доказали следећу теорему.

Теорема 4.2. *Нека је X тополошки простор са покривачем $\{\mathcal{U}_i \mid i \in L\}$ који задовољава услове $(\mathcal{U}1), (\mathcal{U}2)$ и $(\mathcal{U}3)$. Тада, фундаментална група простора X је изоморфна групи $*_{i\in L}\pi_1(\mathcal{U}_i)/N$ где је N нормална подгрупа групе $*_{i\in L}\pi_1(\mathcal{U}_i)$ генерисана са*

$$\{\varphi_{ij}(a)b^{-1} \mid a \in \pi_1(\mathcal{U}_i), b = \varphi_{ij}(a), i, j \in L, \mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_j\}.$$

Ако је $\langle A_i \mid R_i \rangle$ презентације групе $\pi_1(\mathcal{U}_i)$ за све $i \in I$, тада је

$$\pi_1(X) \cong \Big\langle \bigcup_{i\in L} A_i \mid \big(\bigcup_{i\in L} R_i\big) \cup \{a = 1 \mid a \in N\} \Big\rangle.$$

Најпрактичнијим речником, фундаментална група простора X је изоморфна количничкој групи слободног производа $*_{i\in L}\pi_1(\mathcal{U}_i)$ где смо поистоветили елементе који могу да се представе петљама које се налазе у истом скупу покривача $\mathcal{U}$. Илуструјмо теорему најједноставнијом примером.

Последица 4.1. *Нека је $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ где су $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ отворени, путевима повезани скупови такви да је $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ просто повезан. Тада, $\pi_1(X)$ је изоморфна групи $\pi_1(\mathcal{U}) * \pi_1(\mathcal{V})$.*

Доказ. Прво, покривач$\{\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{U}\cap\mathcal{V}\}$ задовољава услове $(\mathcal{U}1)$, $(\mathcal{U}2)$ и $(\mathcal{U}3)$ што претходној теореми имплицира да је $\big(\pi_1(\mathcal{U}) * \pi_1(\mathcal{V})\big)/N$. Како су $i_1 : \mathcal{U}\cap\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{U}$ и $i_2 : \mathcal{U}\cap\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V}$ једине инклузије елемената покривача а по претпоставци је $\pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})$ тривијална, закључујемо да су индуковани хомоморфизми

$$\varphi_1 : \pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) \to \pi_1(\mathcal{U}), \quad \varphi_2 : \pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) \to \pi_1(\mathcal{V})$$

тривијални што имплицира да је гупа N из претходне теореме тривијална.

Отуда $\pi_1(X) \cong \pi_1(\mathcal{U}) * \pi_1(\mathcal{V})$. □

Применимо ову теорему на неколико простора.

Пример 4.1. *Одредити фундаменталну групу клинасте суме две кружнице.*

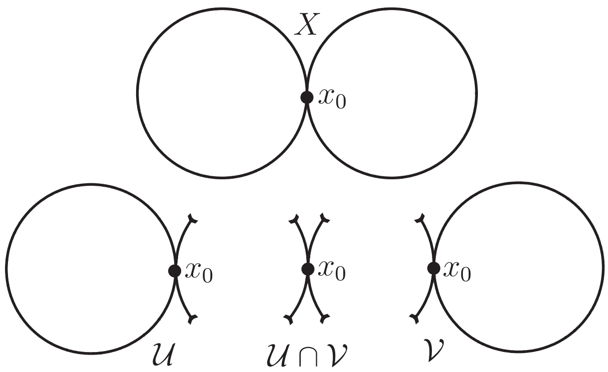

График 18: Разлагање простора $S^1 \vee S^1$.

Решење. Да се потсетимо, ако је $\bigcap\limits_{i\in L} X_i = \{x_0\}$ тада простор

$$\bigcup_{i\in L} X_i = \bigvee_{i\in L} X_i$$

називамо клинаста сума (букет) фамилије $\{X_i \mid i \in L\}$.

Нека је $X = S^1 \vee S^1$. Да би применили претходну последицу, представимо простор X као унију отворених скупова $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ приказаних на Фигури 18. Како је $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ контрактибилан, он је просто повезан а како су $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ простори који су хомотопски еквивалентни кружници, закључујемо да је $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. □

Амбициозни студенти могу индукцијом да докажу да је $\pi_1\big(\bigvee\limits_{i=1}^{n} S^1\big) \cong *_{i=1}^{n}\mathbb{Z}$

Пример 4.2. *Фундаменшална ğруйа йросшора* $D^2 \setminus \{x_1, x_2\}$*, ğде су* $x_1, x_2 \in \operatorname{Int} D^2$ *две различише шачке, је изоморфна ğруйи* $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$*.*

Заисша, како је букет две кружнице деформациони ретракт простора $D^2 \setminus \{x_1, x_2\}$, на основу претходног примера добијамо да је $\pi_1(D^2 \setminus \{x_1, x_2\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. □

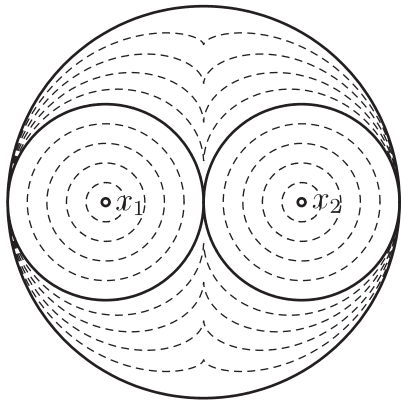

График 19: простори $S^1 \vee S^1$ и $D^2 \setminus \{x_1, x_2\}$ су хомотопни

Како је затворени диск деформациони ретракт отвореног диска а раван без две тачке је хомеоморфна отвореном диску, претходна конструкција је могла да се примени и на раван без две тачке. Даље, како је сфера без тачке хомеоморфна равни, сфера без три тачке је хомеоморфна равни без две тачке па је хомотопски еквивалентна клинастој суми две кружнице што значи да је

$$\pi_1(S^2 \setminus \{x_1, x_2, x_4\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Аналогним поступком може да се покаже да је фундаментална група отвореног диска без n тачака односно сфере без $n+1$ тачака изоморфна слободном производу n група целих бројева.

Ови примери илуструју једно важно својство наведеног метода а то је да би применили Ван Кампенову теорему често морамо да искористимо деформационе ретракте простора и њихове фундаменталне групе.

4.2 Фундаментална група простора добијених идентификацијом раванских фигура

У овом одељку анализирамо примену Ван Кампенове теореме на још један једноставан покривач простора X. Нека је $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, где су $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ отворени путевима повезани скупови и нека је $x_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ истакнута тачка. Нека су

$$\begin{aligned} \psi_u &: \pi_1(\mathcal{U}) \to \pi_1(X), \\ \psi_v &: \pi_1(\mathcal{V}) \to \pi_1(X), \\ \psi_{u \cap v} &: \pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \pi_1(X), \\ \varphi_u &: \pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \pi_1(\mathcal{U}), \\ \varphi_v &: \pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \pi_1(\mathcal{V}), \end{aligned}$$

хомоморфизми индуковани одговарајућим инклузијама.

Теорема 4.3. *Нека је простор $\mathcal{V}$ просто повезан. Тада, ψ_u је епиморфизам и важи да је*

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(\mathcal{U})/\operatorname{Ker}\psi_u$$

где је $\operatorname{Ker}\psi_u$ најмања нормална подгрупа групе $\pi_1(\mathcal{U})$ која садржи скуп $\varphi_u(\pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}))$.

Доказ. Ова теорема може да се докаже помоћу Теореме 4.2 али овде примењујемо оргиналну варијанту Ван Кампенове теореме. Због комутативности одговарајућих инклузионих пресликавања, дијаграм

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(\mathcal{U}) \arrow[dr, "\psi_u"] & \\
\pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) \arrow[ur, "\varphi_u"] \arrow[rr, "\psi_{u\cap v}"] \arrow[dr, "\varphi_v"'] & & \pi_1(X) \\
& \pi_1(\mathcal{V}) \arrow[ur, "\psi_v"'] &
\end{tikzcd}$$

комутира. Како је $\pi_1(\mathcal{V}) \cong \mathbb{O}$ и $\psi_{u\cap v} = \psi_v \circ \varphi_v$, добијамо да је $\psi_{u\cap v}$ тривијални хомоморфизам. Даље, како је $\psi_{u\cap v} = \psi_u \circ \varphi_u$ закључујемо да је

$$\varphi_u(\pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})) \subseteq \operatorname{Ker}\psi_u.$$

Покажимо да је ψ_u епиморфизам. Заиста, на основу Леме 4.1, група $\pi_1(X)$ је генерисана унијом $\psi_u(\pi_1(\mathcal{U})) \cup \psi_v(\pi_1(\mathcal{V}))$ што значи да сваки елемент $x \in \pi_1(X)$ може да се представи са $x = \psi_u(a)\cdot\psi_v(b)$ где $a \in \pi_1(\mathcal{U})$, $b \in \pi_1(\mathcal{V})$. Како је група $\pi_1(\mathcal{V})$ тривијална, добијамо да је $x = \psi_u(a)$ за све $x \in \pi_1(X)$.

Покажимо још да је $\operatorname{Ker}\psi_u$ најмања нормална подгрупа групе $\pi_1(\mathcal{U})$ која садржи скуп $\varphi_u(\pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}))$. С тим у вези, нека је $H = \pi_1(\mathcal{U})/_N$ где је N најмања нормална подгрупа групе $\pi_1(\mathcal{U})$ и $\varphi_u(\pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})) \subseteq N$. Нека је p_u индуковани епиморфизам групе $\pi_1(\mathcal{U})$ у количничку групу H и нека су $p_v : \pi_1(u) \to H$ и $p_{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}} : \pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) \to H$ тривијални хомоморфизми. Сада, хомоморфизми p_u, p_v и $p_{u\cap v}$ испуњавају услове Ван Кампенове теореме 4.1 па, постоји хомоморфизам $\sigma : \pi_1(X) \to H$ такав да је $p_u = \sigma \circ \psi_u$. Отуда добијамо да је $\operatorname{Ker}\psi_u \subseteq \operatorname{Ker} p_u = N$. Како је N најмања нормална подгрупа која садржи скуп $\varphi_u(\pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}))$, а група $\operatorname{Ker}\psi_u$ је једна таква, добијамо да је $N \subseteq \operatorname{Ker}\psi_u$. Дакле, $\operatorname{Ker}\psi_u = N$. □

Ако искористиммо презентације групе односно ако је $\pi_1(\mathcal{U}) = \langle G \mid R\rangle$ где је G скуп свих генератора а R скуп свих релација групе $\pi_1(\mathcal{U})$, ако је $\operatorname{Ker}\psi_u \subseteq \pi_1(\mathcal{U})$ представљена помоћу генератора G, тада је

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(\mathcal{U})/\operatorname{Ker}\psi_u = \langle G \mid R \cup \{a = 1 \mid a \in \operatorname{Ker}\psi_u\}\rangle.$$

Пример 4.3. *Фундаментална група сфере S^2 је тривијална.*

Заиста, да би смо применили претходну теорему представимо сферу као унију отворених скупова са следеће слике.

Како су $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ отворени и путевима повезани простори и, на пример, $\mathcal{V}$ контрактибилан, он је и просто повезан па можемо да применимо Теорему 4.3. Отуда, $\pi_1(S^2)$ је слика фундаменталне групе $\pi_1(\mathcal{U})$ хомоморфизмом ψ_u а како је $\mathcal{U}$ такође контрактибилан, одмах добијамо да је $\pi_1(S^2) \cong \pi_1(\mathcal{U})/\operatorname{Ker}\psi_u \cong \mathbb{O}$. □

Теорема 4.3 је посебно погодна за просторе добијене идентификацијом страница неког многоугла.

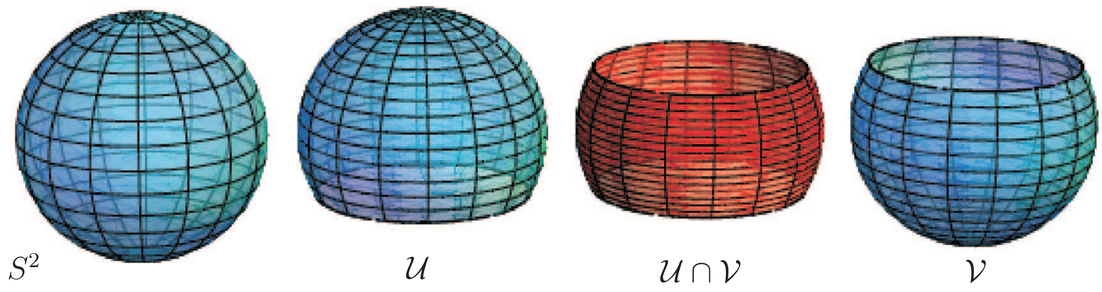

График 20: Разлагање сфере на потскупове $\mathcal{U}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V}, \mathcal{V}$.

Пример 4.4. *Фундаментална група торуса је изоморфна групи* $\mathbb{Z}^2$.

Решење. У Примеру 3.4 смо видели да се фундаментална група торуса једноставно одређује ако торус посматрамо као простор изоморфан простору $S^1 \times S^1$.

Знамо да је торус T фактор простор који можемо да добијемо идентификацијом страница правоугаоника као на фигури испод.

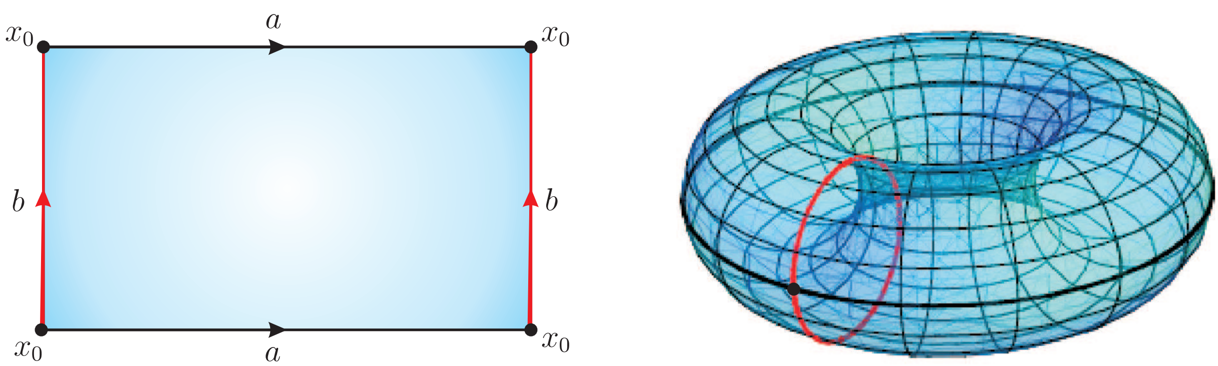

График 21: Торус као фактор простор.

Странице правоугаоника a и b после идентификације постају две кружнице са заједничком тачком x_0. Представимо торус као унију отворених скупова $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ као на Графику 22.

Тада, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ су отворени путевима повезани простори. Како је $\mathcal{V}$ хомеоморфан отвореном диску, његова фундаментална група је тривијална па, можемо да применимо Теорему 4.3.

Ивица правоугаоника је деформациони ретракт правоугаоника без диска што имплицира да је клинаста сума две кружнице деформацони ретракт простора $\mathcal{U}$ односно, његова фундаментална група је изоморфна слободном производу две групе целих бројева.

Нека је $x_1 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ истакнута тачка. Нека су $a : I \to T$ и $b : I \to T$ петље које пролазе кроз ивице правоугаоника и нека је $d : I \to T$ пут који спаја тачке x_1 и x_0.
Како је кружница деформациони ретракт простора $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ важи да је $\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x_1) \cong \mathbb{Z}$. Нека је $\gamma = [c]$ генератор групе $\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x_1)$ где је $c : I \to \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ параметризација кружнице. Сада, група $\pi_1(\mathcal{U}, x_1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ је генерисана са $\alpha = [d^{-1} \cdot a \cdot d] = [a']$ и $\beta = [d^{-1} \cdot b \cdot d] = [b']$. Да би применили Теорему 4.3, опишимо језгро пресликавања ψ_u помоћу елемената групе $\varphi_u(\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x_0))$. Како је $\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x_0) \cong \langle \gamma \mid \emptyset \rangle$, $\operatorname{Ker} \varphi_u$

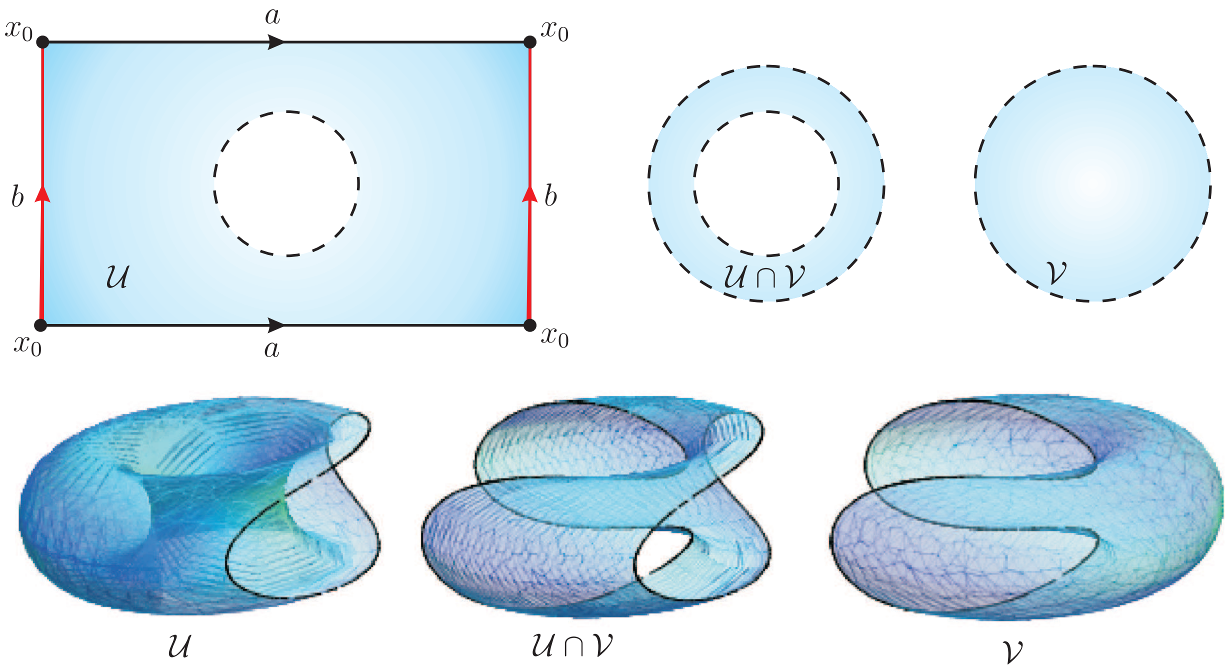

График 22: Разлагање торуса.

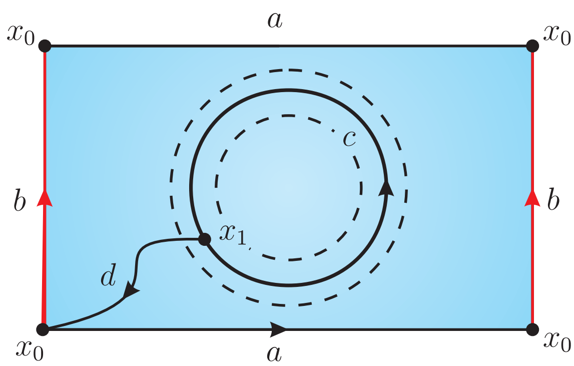

График 23: Генеретори фундаменталних гупа простора $\mathcal{U}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ и $\mathcal{V}$.

је генерисан са генератора $\varphi_{u \cap v}(\gamma)$. Како је у простору $\mathcal{U}$ петља c еквивалентна петљи $a' \cdot b' \cdot a'^{-1} \cdot b'^{-1}$ добијамо да је

$$\varphi_u(\gamma) = \varphi_u([c]) = [i(c)] = [a' \cdot b' \cdot a'^{-1} \cdot b'^{-1}] = [a'] \cdot [b'] \cdot [a'^{-1}] \cdot [b'^{-1}] = \alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}.$$

Дакле, $\operatorname{Ker} \psi_u = \langle \alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} \mid \emptyset \rangle$ што имплицира да је фундаментална група торуса:

$$\pi_1(T) \cong \pi_1(\mathcal{U}) /_{\operatorname{Ker} \psi_u} \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} = 1 \rangle \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

□

Описана техника рачунање фундаменталне групе торуса је за нијансу боља него примена Теореме 3.7 јер су генератори фундаменталне групе геометријски очиглединији. Аналогним поступком, можемо да израчунамо фундаменталне групе простора добијених сличном идентификацијом раванских фигура.

Пример 4.5. *Фундаментална група лудачке капе је тривијална.*

Решење. Лудачку капу $\mathcal{LK}$ можемо да представимо као простор добијен идентификацијом свих страница једнакостраничног троугла. Представимо простор $\mathcal{LK}$ као унију

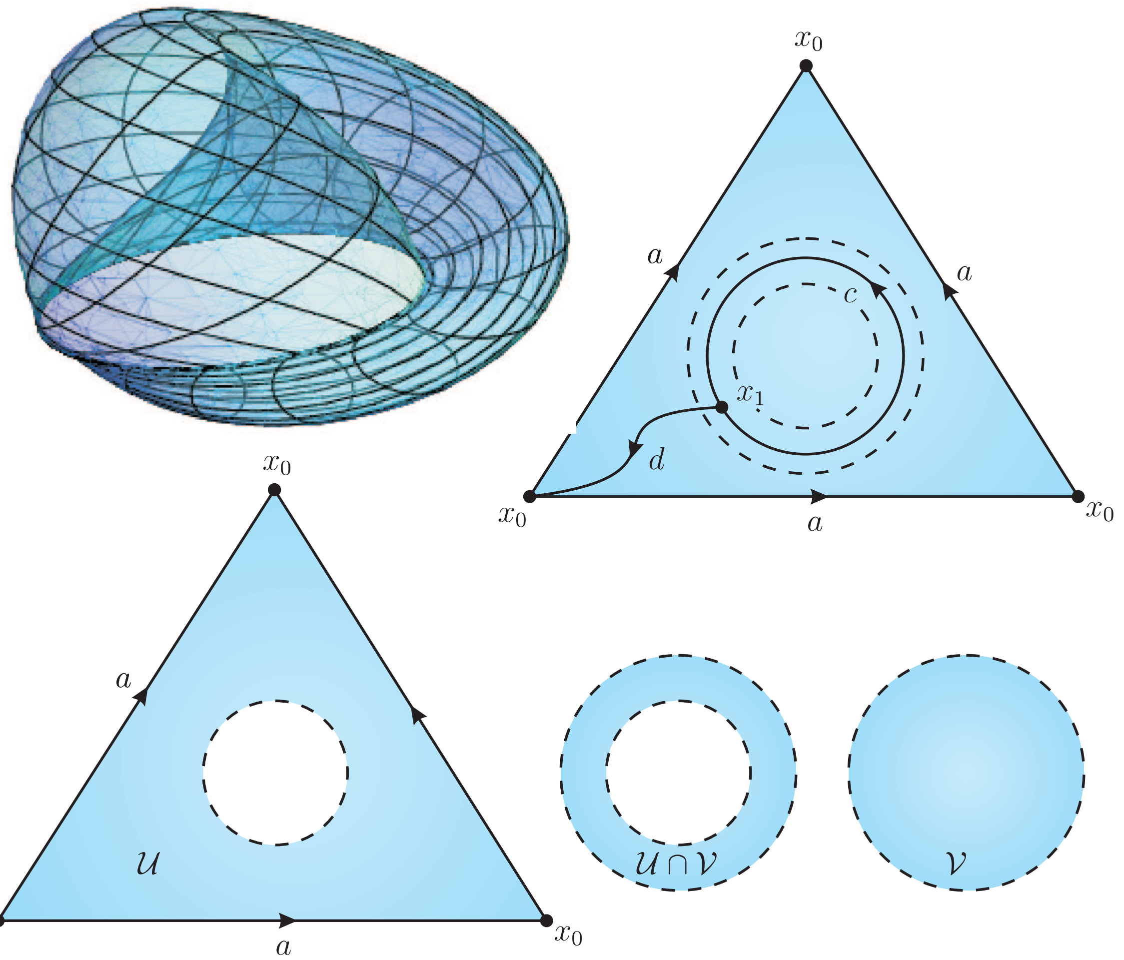

График 24: Разлагање лудачке капе.

отворених скупова $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ приказаних на Графику 24. Простори $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ су отворени и путевима повезани а $\mathcal{V}$ је контрактибилан што значи да можемо да применимо Теорему 4.3. Како је ивица троугла деформациони ретракт троугла без диска а све три странице троугла на лудачкој капи се идентификују у једну кружницу, добијамо да је кружница деформациони ретракт простора $\mathcal{U}$. Представимо генераторе фундаменталних група простора $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ помоћу путева a, c и d као на Графику 24.

Аналогним поступком као у Примеру 4.4, добијамо да је фундаментална група лудачке капе $\pi_1(\mathcal{LK}) \cong \langle \alpha \mid \alpha^2\alpha^{-1} = 1\rangle \cong \langle \alpha \mid \alpha = 1\rangle \cong \mathbb{O}$. □

Пример 4.6. *Фундаментална група пројективне равни* $\mathbb{RP}^2$ *је циклична група реда два.*

Решење. Пројективна раван $\mathbb{RP}^2$ може да се опише као фактор простор добијен идентификацијом антиподалних тачака граничне кружнице диска D^2 као што је приказано на графику испод.

Сада, како смо пројективну раван представили као унију простора са претходне слике, аналогним поступком као у Примерима 4.4 и 4.5, закључујемо да је фундаментална група пројективне равни

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \langle \alpha \mid \alpha \cdot \alpha = 1\rangle \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1\rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

□

Малом модификацијом претходног примера, може да се докаже да за произвољно $p \in \mathbb{N}$ постоји тополошки простор X такав да је $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_p$.

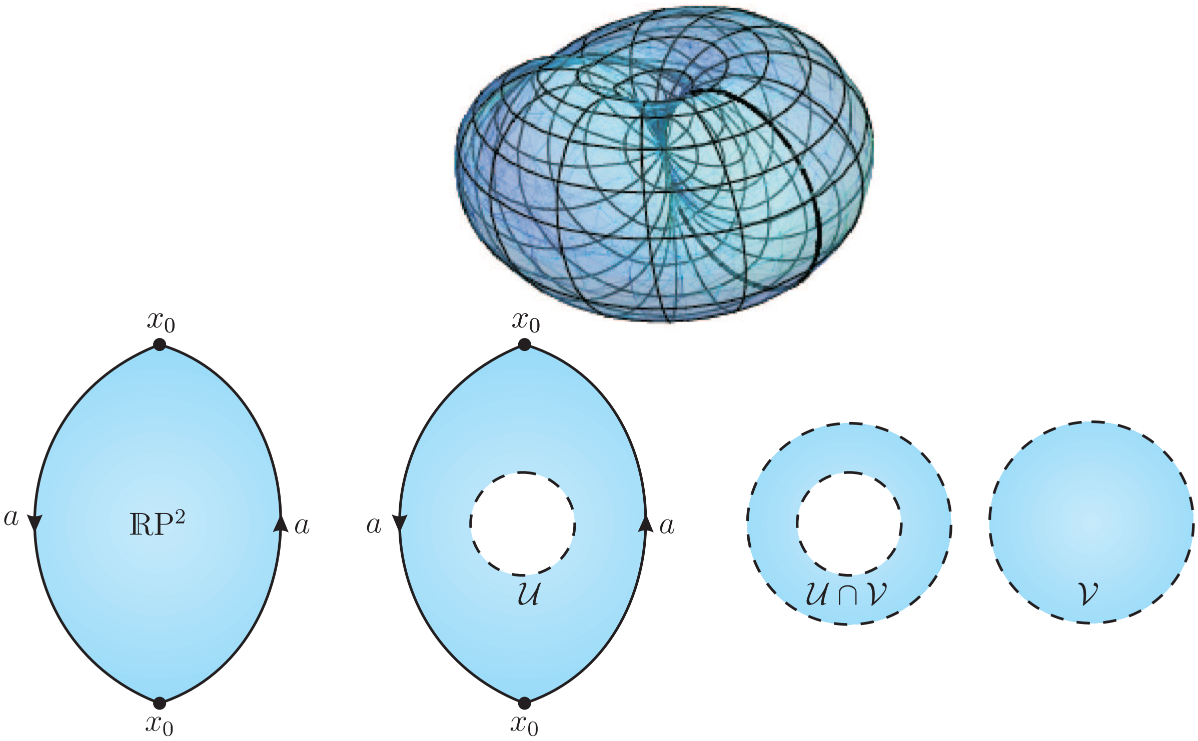

График 25: Пројективна раван као фактор простор и разлагање.

4.2.1 Класификација компактних површи

По дефиницији, површи су тополошки простори локално хомеоморфни Еуклидској равни тј. простор M је површ акко

$$(\forall x \in M)(\exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{T}_m) x \in \mathcal{U}_x \approx \mathbb{R}^2.$$

Показује се да је произвољна компактна повезана површ M хомеоморфна простору nT или $n\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ за неко $n \in \mathbb{N}$ где су nT односно $n\mathbb{R}^2$ добијене идентификацијом страница $4n-$тоугла одоносно $2n$-тоугла приказаним на Графику 26. Отуда, повезана компактна површ је до на хомеоморфизам одређена својеврсним „рецептом” за спајање границе многоугла.

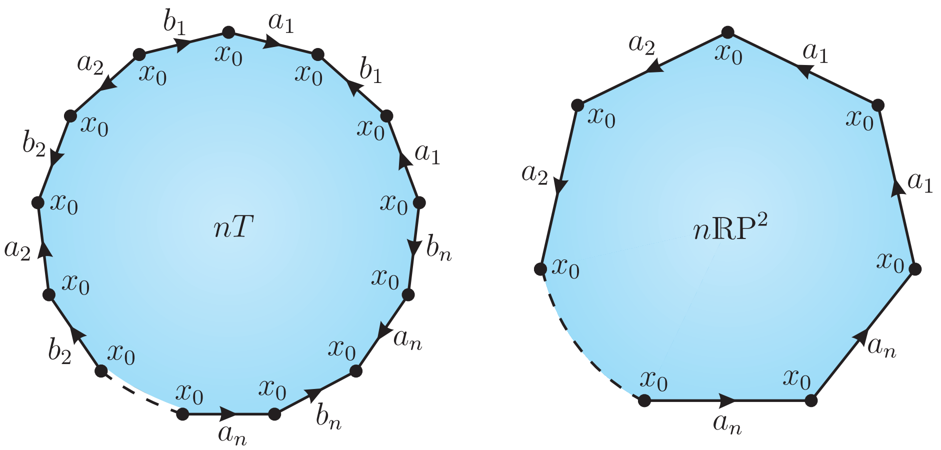

График 26: Компактне површи као фактор простори многоуглова.

Ако имамо две површи M_1 и M_2, можемо да дефинишемо површ $M_1 \asymp M_2$ коју називамо спајање површи као фактор простор дисјунктне уније $(M_1 \setminus \mathcal{U}_{x_1}) \sqcup (M_2 \setminus \mathcal{U}_{x_2})$ (где су скупови $\mathcal{U}_{x_1} \subset M_1$ и $\mathcal{U}_{x_2} \subset M_2$ хомеоморфни отвореном диску $\operatorname{Int} D^2$) идентификацијом тачака скупа $\partial\mathcal{U}_{x_1}$ са одговарајућим тачкама скупа $\partial\mathcal{U}_{x_2}$. Тада, простор nT се добија сукцесифним спајањем n торуса а простор $n\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ се добија сукцесивним спајањем n пројективних равни. Спајање торуса за торус је илустровано на графику испод.

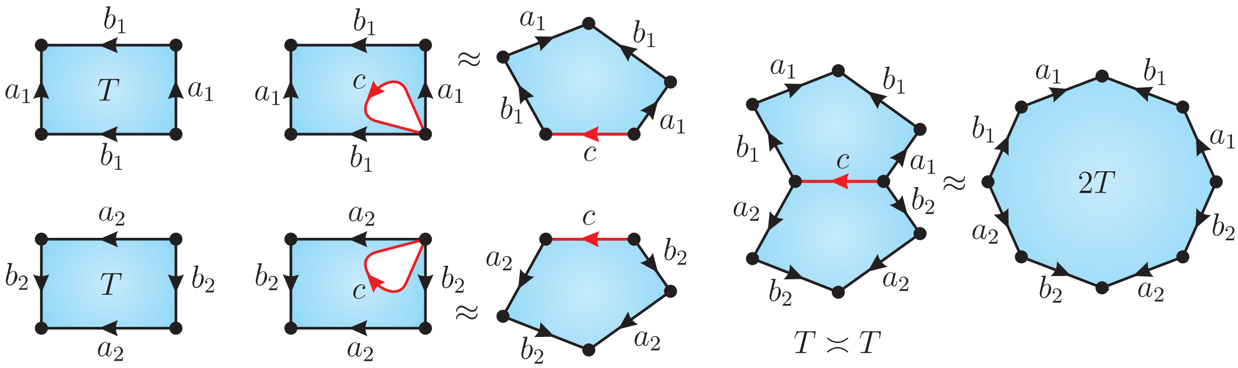

График 27: Спајање два торуса и простор $2T$.

Итерацијом описаног процеса се добијају простори nT. Аналогна конструкција важи и у слочају простора $n\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. График 28 илуструје како се спајање површи манифестује у Еуклидским простору. Амбициозни студенти могу да докажу да је Клајнова боца заправо спајање $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \asymp \mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

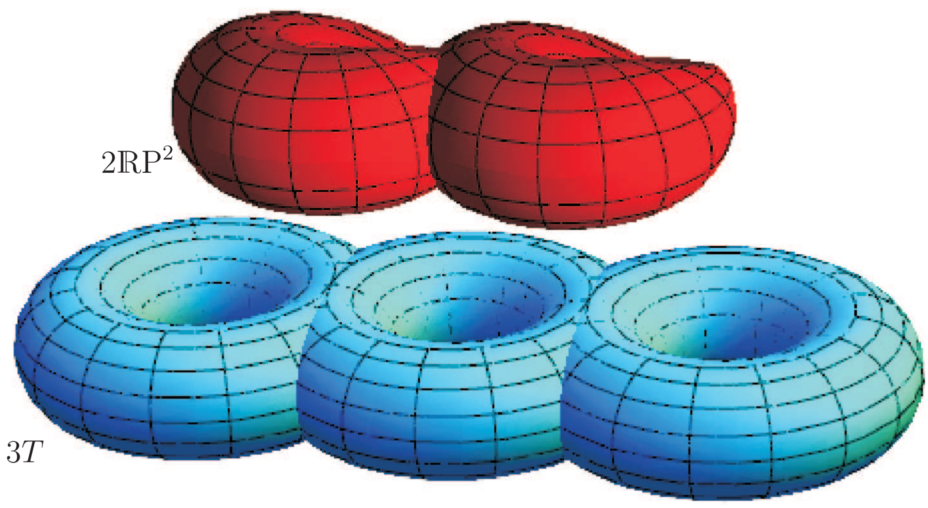

График 28: Површи $2\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ и $3T$.

Фундаментална група простора $M_1 \asymp M_2$ може да се израчуна помоћу $\pi_1(M_1)$ и $\pi_1(M_2)$ применом Теореме 4.2 међутим, због описане структуре компактних површи, фундаменталне групе рачунамо Теоремом 4.3.

Као и у Примерима 4.4, 4.5 и 4.6, површи nT односно $n\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ могу да се представе као унија отворених, путевима повезаних скупова $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ где је $\mathcal{V}$ хомеоморфан отвореном диску. Тада, фундаменталне групе $\pi_1(nT)$ и $\pi_1(n\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$ имају репрезентације:

$$\pi_1(nT) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} = 1 \rangle,$$
$$\pi_1(n\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 = 1 \rangle$$

где a_i односно b_i представљају класе одређене петљама које одговарају ивицама многоуглова.

Из структуре фундаменталних фрупа простора nT и $n\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ се одмах види да из $n \neq m$ односно $nT \not\approx mT$ и $n\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \not\approx m\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ следи $\pi_1(nT) \ncong \pi_1(mT)$ и $\pi_1(n\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \ncong \pi_1(m\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$. Међутим, проблем настаје при упоређивању фундаменталних група простора nT и $m\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ односно, поставља се питање да ли су $\pi_1(nT)$ и $\pi_1(m\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$ изоморфне за неке $n, m \in \mathbb{N}$? У ту сврху користимо абелизацију групе. Ако је $G = \langle A \mid R \rangle$ презентација групе G, тада Абелову групу

$$G^{ab} = \langle A \mid R \cup K \rangle$$

називамо абелизација групе G где је $K = \{aba^{-1}b^{-1} = 1 \mid a, b \in A\}$. Практично, абелизацијом групе дозвољавамо комутативност генератора а самим тим и комутативност произвољних елемената.

Тада, абелизације група $\pi_1(nT)$ и $\pi_1(n\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$ су редом

$$\begin{aligned}
&\pi_1^{ab}(nT) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \mid K \rangle, \\
&\pi_1^{ab}(n\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid (a_1 a_2 \cdots a_n)^2 = 1, K \rangle.
\end{aligned}$$

Отуда, $\pi_1^{ab}(nT)$ је презентација групе $\bigoplus\limits_{i=1}^{2n} \mathbb{Z}$ која је изоморфна групи $\mathbb{Z}^{2n}$.

За групу $\pi_1^{ab}(n\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$, ако уведемо смену да је $c = a_1 a_2 \cdots a_n$, тада је $a_n = c a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1}$ што имплицира да је

$$\begin{aligned}
\pi_1^{ab}(n\mathbb{R}\mathrm{P}^2) &\cong \langle a_1, a_2, \ldots, a_n, c \mid c^2 = 1, a_n = c a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1}, K \rangle \\
&\cong \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, c \mid c^2 = 1, K \rangle \\
&\cong \Big(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\Big) \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Дакле, $\pi_1^{ab}(n\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$ има подгрупу која је изоморфна цикличној групи другог реда. Како ни једна група $\pi_1^{ab}(nT)$ нема наведено својство, закључујемо да тополошки различитим повезаним компактним површима одговарају неизоморфне абелизације фундаметналних група а самим тим и неизоморфне фундаменталне групе.

Такође, како је декомпозиција Абелове групе на директан збир $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_p$ за просте $p \in \mathbb{N}$ јединствена до на редослед сабирака, закључујемо да за произвољну компактну површ M група $\pi_1^{ab}(M)$ врши тополошку класификацију површи M и то:

- ако је $\pi_1^{ab}(M)$ слободна (садржи само $\mathbb{Z}$ сабирке) тада је $M \approx nT$ где је n број $\mathbb{Z}$ сабирака групе $\pi_1^{ab}(M)$;
- ако је $\mathbb{Z}_2$ подгрупа групе $\pi_1^{ab}(M)$ тада је $M \approx (n+1)\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ где је n број $\mathbb{Z}$ сабирака групе $\pi_1^{ab}(M)$.

Иначе, број $\mathbb{Z}$ сабирака декомпозиције Абелове групе G на сабирке облика $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_p$ за просте $p \in \mathbb{N}$ се назива ранг групе G у ознаци $\operatorname{rank} G$.

Сада можемо да формулишемо главну теорему овог поглавља.

Теорема 4.4. *Повезане компактне површи су хомеоморфне акко су им фундаменталне групе изоморфне.*

Доказ. Знамо да хомеоморфним тополошким просторима одговарају изоморфне фундаменталне групе. Ако су фундаменталне групе две површи изоморфне, тада су изоморфне и њихове абелизације које потпуно одређују тополошки тип површи. □

Наведимо још једну примену претходног резултата.

Површи се такође класификују на оријентабилне и неоријентабилне, а за овај појам потребно је прво дефинисати оријентацију петље на површи. Нека је M површ (не мора да буде компактна). Кажемо да петља $\alpha : I \to M$ чува оријентацију када „кретањем” дуж петље тачке површи остају са исте стране петље. У супротном, кажемо да петља мења оријентацију. Оријентабилне површи су оне код којих не постоји петља која мења оријентацију, а ако таква петља постоји, кажемо да је површ неоријентабилна.

Примери оријентабилних површи су сфера, торус, раван, док су Мебијусова трака, Клајнова боца и пројективна раван неоријентабилне површи. Лако се доказује да су компактне површи M_1 и M_2 оријентабилне акко је $M_1 \asymp M_2$ оријентабилна.

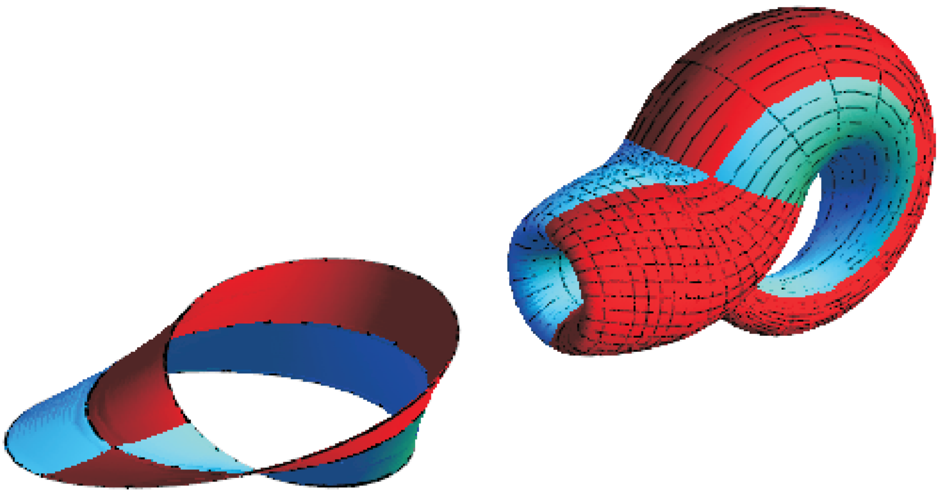

График 29: Неоријентабилне површи.

Отуда, када хоћемо да проверимо да ли је нека компактна површ оријентабилна, све што треба да урадимо је да испитамо да ли је она добијена спајањем торуса или пројективних равни. На основу поступка за одређивање фундаменталних група компактних површи, то можемо да урадимо помоћу абелизације њихових фундаменталних група односно површ је оријентабилна акко абелизација фундаменталне групе површи не садржи подгрупу изоморфну групи $\mathbb{Z}_2$.

5 Комбинаторна апстракција тополошких простора

Ово поглавље је посвећено анализи једне специјалне класе тополошких простора које називамо симплициајни комплекси. У питању су својеврсни вишедимензионални мозаици, настали спајањем најједноставнијих потскупова Еуклидских простора које зовемо симплекси. На овај начин, анализа локалних особина симплицијалних комплекса се своди на познавање особина компактних потскупова Еуклидских простора док су глбалне особине овако добијених тополошких простора одређене тзв. рецептом спајања његових компоненти које називамо апстрактни симплициални комплекси.

5.1 Геометријски симплекси

Дефинишимо основне градивне елементе чијим спајањем ћемо да конструишемо скоро све компактне потскупове Еуклидских простора.

Дефиниција 5.1. *Скуп тачака $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ је афино независан ако су вектори $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ линеарно независни, тј. ако важи:*

$$(\forall \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R})(\lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n = 0 \wedge \lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 0) \Rightarrow \lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

На пример, сваке две различите тачке $\{a_0, a_1\}$ су афино независне, три тачке $\{a_0, a_1, a_2\}$ су афино независне акко нису колинеарне, тачке $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ су у афино независне ако не припадају истој равни итд. Скуп $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ одређује раван $\mathcal{P}_A \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{P}_A = \big\{x \in \mathbb{R}^d \mid x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\big\}$$

коју називамо афини омотач скупа A и која има следеће особине:

- ако је A афино независан, за свако $x \in \mathcal{P}_A$ координате $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ такве да је $x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ су јединствене;
- ако је A афино независан и $a \notin \mathcal{P}_A$, тада је $A \cup \{a\}$ афино независан;
- $\dim \mathcal{P}_A = |A| - 1 = n$ акко је A афино независан.

Дефиниција 5.2. *Геометријски n-**симплекс** одређен афино независним скупом $A = \{a_0, \dots, a_n\}$ простора $\mathbb{R}^d$ је конвексни омотач скупа A. Прецизније, симплекс је скуп*

$$\sigma_A = \operatorname{conv} A = \big\{x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \mid \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 0, \dots, n\big\}.$$

Значајне компоненте симплекса $\sigma_A \subseteq \mathbb{R}^d$ су

- *тачке $a_i \in A$, $i = 0, 1, \dots, n$ су врхови симплекса σ_A;*
- *$|A| - 1 = n \in \mathbb{N}$ је димензија симплекса;*
- *ако је $x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \in \sigma_A$, скаларе $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ називамо барицентричне координате тачке x у симплексу σ_A;*
- *тачка $\widehat{\sigma}_A = \frac{1}{n+1}(a_0 + \cdots + a_n)$ се назива барицентар симплекса σ_A;*

- *подскуп* $\dot{\sigma}_A = \begin{cases} A = \{a_0\}, & n = 0 \\ \{x = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \in \sigma_A \mid \lambda_i > 0,\, i = 0, \ldots, n\}, & n \neq 0 \end{cases}$ *називамо интериор симплекса* σ_A*, а руб симплекса је скуп* $|\sigma_A| = \sigma_A \setminus \dot{\sigma}_A$

Приметимо да интериор симплекса и руб симплекса не морају да се поклапају са интериором и рубом у релативној топологији Еуклидског потпростора.

Тополошке особине симплекса су потпуно одређене његовом димензијом. На пример:

$n = 0$, симплекс $\sigma_{\{a_0\}} = \{a_0\}$ је тачка, њен барицентар је $\widehat{\sigma}_{\{a_0\}} = a_0$, интериор је $\dot{\sigma}_{\{a_0\}} = \sigma_{\{a_0\}}$, а граница је $|\sigma_{\{a_0\}}| = \emptyset$;

$n = 1$, симплекс $\sigma_{\{a_0,a_1\}}$ је дуж, његов барицентар је средиште дужи $\widehat{\sigma}_{\{a_0,a_1\}} = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)$, $\dot{\sigma}_{\{a_0,a_1\}} = \sigma_{\{a_0,a_1\}} \setminus \{a_0, a_1\}$ а граница је $|\sigma_{\{a_0,a_1\}}| = \{a_0, a_1\} = \sigma_{\{a_0\}} \cup \sigma_{\{a_1\}}$;

$n = 2$, за $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, симплекс σ_A је троугао, барицентар $\widehat{\sigma}_A = \frac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_2)$ је тежиште а интериор $\dot{\sigma}_A$ је унутрашњост троугла док је његова граница $|\sigma_A| = \sigma_{\{a_0,a_1\}} \cup \sigma_{\{a_1,a_2\}} \cup \sigma_{\{a_0,a_2\}}$;

$n = 3$, симплекс $\sigma_{\{a_0,a_1,a_2,a_3\}}$ је тетраедар.

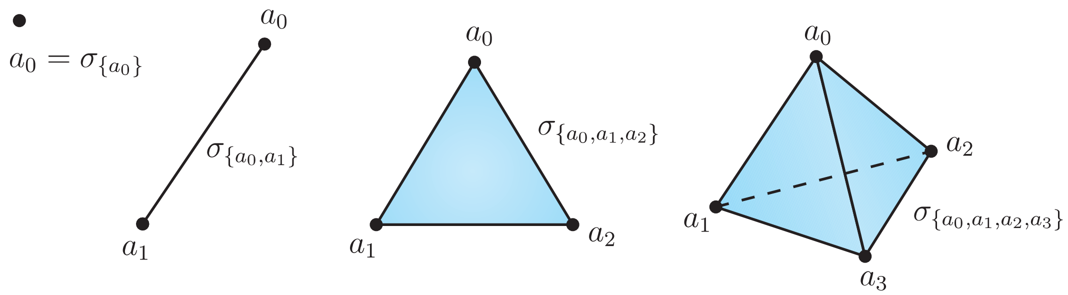

График 30: Симплекси димензије 0, 1, 2, 3.

Из техничких разлога уводимо и тзв. празан симплекс $\emptyset = \sigma_\emptyset$. Као што видимо са графика изнад, границу симплекса димензије n формира $n+1$ симплекса димензије $n-1$ а њихове границе су симплекси димензије $n-2$ итд.

Нека је дат симплекс σ_A и нека је $B \subseteq A$ произвољан.

Дефиниција 5.3. *Симплекс* σ_B *где је* $|B| = k + 1$ *зовемо* $k-$*страна симплекса* σ_A*. Страна* σ_B *је пава ако је* B *прави подскуп скупа* A *односно* $k < n$*.*

Овако, произвољној комбинацији од $k+1$ тачака из скупа $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ одговара јединствена $k-$страна симплекса σ_A. Отуда n симплекс има $\binom{n+1}{k+1}$ различитих $k-$страна. Из дефиниције симплекса и његових страна као и на Графику 30, видимо да је руб симплекса заправо унија свих његових правих страна .

Теорема 5.1. *Свака два* n*-симплекса су хомеоморфни простори.*

Доказ. Нека су σ_A где је $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ и σ_B где је $B = \{b_0, \ldots, b_n\}$ два симплекса димензије n. Дефинишимо пресликавање $f : \sigma_A \to \sigma_B$. За произвољно $x \in \sigma_A$ важи да је $x = \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n$ где су $\lambda_0, \ldots \lambda_n$ барицентричне координате тачке x. Нека је

$$f(\lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n) = \lambda_0 b_0 + \cdots + \lambda_n b_n.$$

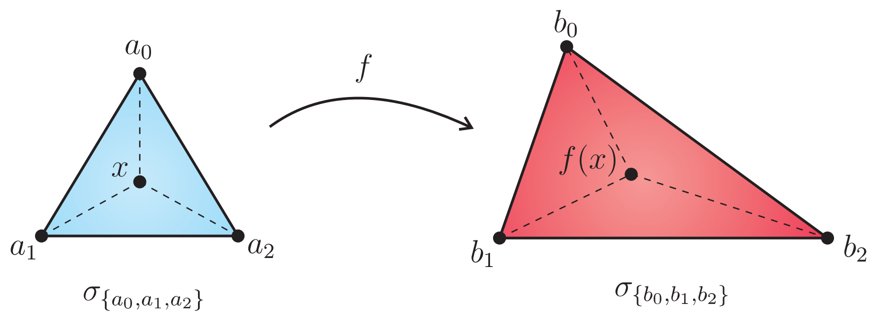

График 31: Линеарни хомеоморфизам 2−симплекса из доказа.

Како је пресликавање f линеарно и бијективно (свако $x \in \sigma_A$ односно $y \in \sigma_B$ има јединствене барицентричне координте), оно је и непрекидно па представља тражени хомеоморфизам. □

Претходна теорема нам нам указује на чињеницу да су симплекси до на хомеоморфизам употпуности одређени својом димензијом. Сада наводимо њихове значајне особине.

Теорема 5.2. *Геометријски* n*-симплекс* σ_A *је конвексан, затворен, компактан и повезан потпростор простора* $\mathbb{R}^d$.

Доказ. Интуитивно, симплекс $\sigma_{\{a_0,\dots,a_n\}}$ је конвексан као конвексни омотачскупа тачака. Прецизније, за сваке две тачке $x = \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n$, $y = \mu_0 a_0 + \cdots + \mu_n a_n$ где је $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$, за све $i = 0, \dots, n$ и $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1$ и за свако $t \in [0,1]$ тачка

$$\begin{aligned} tx + (1-t)y &= t(\lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n) + (1-t)(\mu_0 a_0 + \cdots + \mu_n a_n) \\ &= (t\lambda_0 + (1-t)\mu_0)a_0 + \cdots + (t\lambda_n + (1-t)\mu_n)a_n \end{aligned}$$

припада σ_A, јер је $t\lambda_i + (1-t)\mu_i \geq 0$ за све $i = 0, \dots, n$ и

$$\sum_{i=0}^{n}(t\lambda_i + (1-t)\mu_i) = t\sum_{i=0}^{n}\lambda_i + (1-t)\sum_{i=0}^{n}\mu_i = t + 1 - t = 1.$$

Како је симплекс σ_A хомеоморфан диску D^n, он је затворен, компактан и повезан простор. □

5.2 Симплицијални комплекси

Овај одељак је посвећен анализи једне специјалне класе тополошких простора који могу да се добију унијом коначне фамилије симплекса поштујући неколико једноставних правила. Конструкција умногоме потсећа на мозаике односно слагалице где прво скупимо све делове на једно место а потом их слажемо по датој рецептури.

Дефиниција 5.4. *Геометријски* ***симплицијални комплекс*** K *је коначан скуп симплекса простора* $\mathbb{R}^d$ *који задовољава следеће услове*

$(K1)$ *страна произвољног симплекса комплекса* K *припада комплексу* K,

$(K2)$ *пресек два симплекса из* K *је или празан скуп или њихова заједничка страна или еквивалентно*

$$(\forall \sigma_A, \sigma_B \in K)\sigma_A \cap \sigma_B = \sigma_{A\cap B} \in K.$$

Димензија комплекса K је максимум димензија његових симплекса. Поткомплекс комплекса K је свака подфамилија $L \subseteq K$ симплекса из K која задовољава услов $(K1)$ а последично и $(K2)$ (пишемо $L \preceq K$).

Из особине $(K1)$ је јасно да ако неки n-симплекс припада комплексу K, све његове k стране $k = 0, \ldots, n-1$ су такође симплекси комплекса K. Ова особина нам омогућава да дефинишемо специфичне поткомплексе који представљају својеврсне оквире за конструкцију комплекса K.

Дефиниција 5.5. *За свако $k \geqslant 0$, $k-$**скелет** комплекса K је поткомплекс $K^k \subseteq K$ кога чине сви симплекси комплекса K димензије мање или једнаке од k.*

Овако, сваком симплицијалном комплексу K димензије n одговара растући (у односу на инклузију) низ поткомплекса

$$\{\emptyset\} = K^{-1} \subset K^0 \subset K^1 \subset \cdots \subset K^n = K.$$

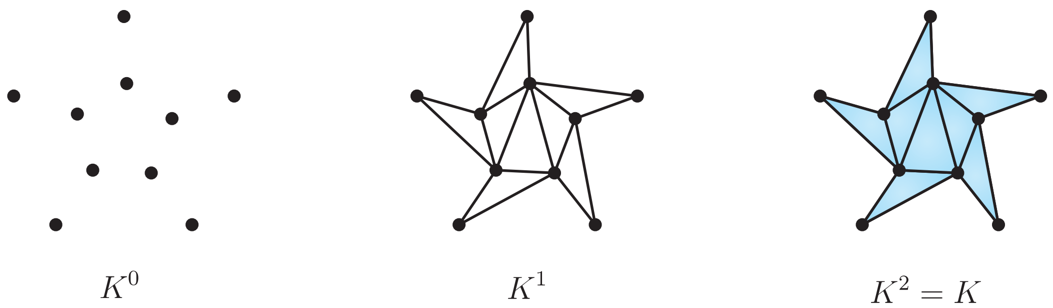

График 32: Симплицијални комплекс и његов 0, 1, и $2-$скелет.

Лема 5.1. *Ако су $L_1 \subseteq K$ и $L_2 \subseteq K$ два подкомплекса симплицијалног комплекса K, тада су и $L_1 \cup L_2$ и $L_1 \cap L_2$ подкомплекси комплекса K.*

Као проста фамилија симплекса, симплицијални комплекс је пре свега комбинаторни објекат. Њему одговара посебан тополошки простор.

Дефиниција 5.6. *Скуп тачака простора $\mathbb{R}^d$ које се налазе бар у једном симплексу комплекса K са релативном топологијом Еуклидског потпростора зовемо **полиедар** комплекса K и означавамо са $|K|$. Кажемо да је симплицијални комплекс K триангулација топошког простора $|K|$.*

Дакле, симплицијалном комплексу K одговара тополошки простор

$$|K| = \bigcup_{\sigma_A \in K} \sigma_A.$$

Као коначна унија унија симплекса, полиедар симплицијалног комплекса је затворен и комактан тополошки простор. Пиметимо (График 32) да полиедар симплицијалног комплекса не мора да буде полиедар у класичном геометријском смислу. Нама ће на овом курсу да буду значајни тополошки простори хомеоморфни полиедрима. Иначе, у литератури, ако је $X \approx |K|$, каже се да је симплицијални комплекс K триангулација тополошког простора X односно, триангулације простора се конструишу до на хомеоморфизам. Такође, ако је L поткомплекс комплекса K, тада је $|L|$ затворени подпростор полиедра $|K|$.

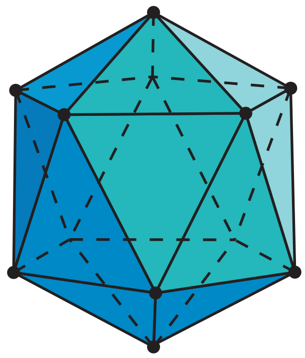

График 33: Икосаедар као полиедар симплицијалног комплекса

Пример 5.1. *Описати симплицијални комплекс чији је полиедар симплекс σ_A.*

Решење. Нека је σ_A за $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ произвољан n-симплекс простора $\mathbb{R}^d$. Нека је $K(\sigma_A) = \{\sigma_B \mid B \subseteq A\}$ симплицијални комплекс који формира симплекс σ_A и све његове стране. Тада је $|K(\sigma_A)| = \sigma_A$ јер је сваки други симплекс фамилије $K(\sigma_A)$ садржан у симплексу σ_A. □

Из структуре симплицијалних комплекса је јасно да тачке које се налазе у његовом полиедру могу да припадају различитим симплексима. Међутим, ситуација се мења ако посматрамо интериоре симплекса.

Теорема 5.3. *Нека је K симплицијални комплекс. Тада, свака тачка простора $|K|$ припада интериору тачно једног симплекса фамилије K. Обрнуто, ако нека фамилија симплекса K задовољава услов $(K1)$ Дефиниције 5.4 и услов:*

$(K2')$ *интериори различитих симплекса из K су дисјунктни,*

тада, фамилија K је симплицијални комплекс.

Доказ. Нека су σ_A, σ_B различити симплекси комплекса K и нека $x \in \dot{\sigma}_A \cap \dot{\sigma}_B$. Тада, $x \in \sigma_{A\cap B}$ где је $\sigma_{A\cap B}$ заједничка страна симплекса σ_A и σ_B. Услов да x припада интериору симплекса σ_A имплицира да x не припада његовом рубу. Како је свака права страна симплекса σ_A елемент комплекса који формира његову границу, закључујемо да је $\sigma_{A\cap B} = \sigma_A$. Аналогно $\sigma_{A\cap B} = \sigma_B$ па је $\sigma_A = \sigma_B$.

Докажимо да из $(K1)$ и $(K2')$ следи $(K2)$ Дефиниције 5.4 односно да се симплекси комплекса K секу по заједничкој страни.

Прво, сваком $x \in \sigma_A$ одговара скуп $A_x = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \subseteq A$ такав да је

$$x = \sum_{j=0}^{k} \lambda_{i_j} a_{i_j} \text{ где је } \lambda_{i_j} > 0 \text{ за све } j = 1, ..., k.$$

Отуда, симплекс σ_{A_x} је једина страна симплекса σ_A таква да је $x \in \dot{\sigma}_{A_x}$.

Нека су $\sigma_A, \sigma_B \in K$ симплекси такви да је $\sigma_A \cap \sigma_B \neq \emptyset$. Тада, произвољном $x \in \sigma_A \cap \sigma_B$ одговарају темена A_x и B_x односно симплекси σ_{A_x} и σ_{B_x} такви да $x \in \dot{\sigma}_{A_x}$ и $x \in \dot{\sigma}_{B_x}$ па је самим тим $x \in \dot{\sigma}_{A_x} \cap \dot{\sigma}_{B_x}$. Како по претпоставци важи својство $(K2')$, добијамо да је $\sigma_{A_x} = \sigma_{B_x}$ што имплицира да је $A_x = B_x$. Како је $A_x \subseteq A$ и $A_x \subseteq B$ закључујемо да је $A_x \subseteq A \cap B$ а самим тим је $\sigma_{A_x} \subseteq \sigma_{A\cap B}$. Како $x \in \sigma_{A_x}$, закључујемо да произвољно

$x \in \sigma_A \cap \sigma_B$ припада симплексу $\sigma_{A\cap B}$ па је самим тим $\sigma_A \cap \sigma_B \subseteq \sigma_{A\cap B}$. Како иначе важи да је $\sigma_{A\cap B} \subseteq \sigma_A \cap \sigma_B$, закључујемо да је $\sigma_A \cap \sigma_B = \sigma_{A\cap B}$. $\square$

Дакле, полиедар симплицијалног комплекса K може да се представи као дисјунктна унија интериора симплекса комплекса K као што је илустровано на графику испод.

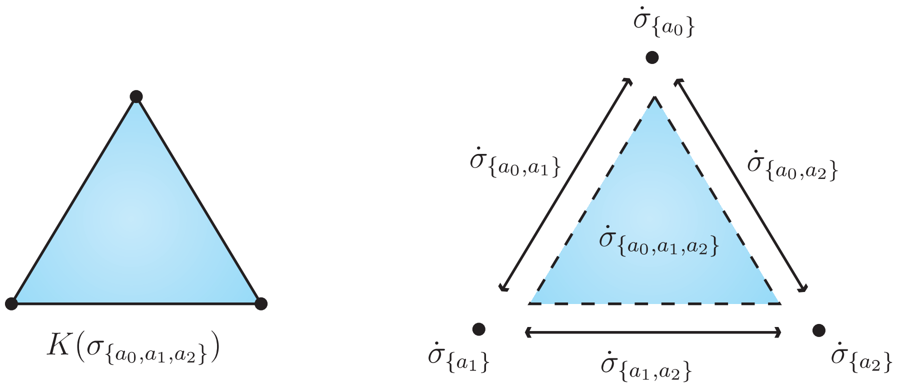

График 34: Разлагање полиедра на интериоре симплекса.

Искористимо ову особину да добијемо једну значајну триангулацију.

Пример 5.2. *Конструисати бар једну триангулацију сфере S^n.*

Решење. Нека је $|A| = n+1$. Знамо да је сфера S^n хомеоморфна граници диска односно простору $\partial D^{n+1} = D^{n+1} \setminus \operatorname{Int} D^{n+1}$ а диск D^{n+1} је простор хомеоморфан $n-$симплексу σ_A где је $|A| = n+1$. Сада, симплицијални комплекс $\mathbb{S}^n = K(\sigma_A) \setminus \{A\}$ односно његов полиедар је хомеоморфан простору $D^{n+1} \setminus \operatorname{Int} D^{n+1}$ јер склањањем тачака симплекса A, по Теореми 5.3, заправо склањамо само тачке полиедра $|K(\sigma_A)|$ које се налазе у $\dot\sigma_A$. Дакле, $K(\sigma_A) \setminus \{A\}$ је триангулација сфере. $\square$

Из структуре симплицијалнох комплекса је јасно да ако је L поткомплекс комплекса K, фамилија $K \setminus L$ не мора обавезно да буде симплицијални комплекс јер нека страна симплекса из $K \setminus L$ може да се нађе у комплексу L. Међутим, овај недостатак може да се надомести.

Лема 5.2. *Сваком поткомплексу L комплекса K одговара поткомплекс $M \preceq K$ такав да*

$$|M| = \overline{|K| \setminus |L|}.$$

Доказ. Нека се поткомплекс M састоји од оних симплекса комплекса K који су стране свих симплекса фамилије $K \setminus L$. Тада, M је поткомплекс комплекса K. Како свака тачка $x \in |K| \setminus |L|$ припада интериору тачно једног симплекса $\sigma_{A_x} \in K$, а по конструкцији је $\sigma_{A_x} \in M$, закључујемо да је $|K| \setminus |L| \subseteq |M|$ а пошто је $|M|$ затворен, добијамо да је $\overline{|K| \setminus |L|} \subseteq |M|$. Такође, свако $x \in |M|$ се налази у интериору неког симплекса који је симплекс фамилије $L \subseteq K$. То значи да је $|M| \subseteq |K| \setminus |L|$, тј. $|M| \subseteq \overline{|K| \setminus |L|}$. Дакле, $|M| = \overline{|K| \setminus |L|}$. $\square$

Ндаље, ако је L произвољна фамилија симплекса, нека $K(L)$ означава најмањи симплицијални комплекс који садржи фамилију L. Прецизније, то је симплицијални комплекс:

$$K(L) = \{\sigma_B \mid B \subseteq A, \sigma_A \in L\}.$$

Топологија полиедра $|K|$ је по дефиницији релативна у односу на Еуклидски простор који га садржи. Међутим, она може да се опише помоћу топологије симплекса комплекса K односно као топологија уније тополошких простора.

Лема 5.3. *Подскуп F полиедра $|K|$ је затворен акко за сваки симплекс $\sigma \in K$, скуп $F \cap \sigma$ је затворен.*

Доказ. Нека је $F \subseteq K$ затворен. Како је сваки симплекс $\sigma \in K$ затворен подскуп полиедра $|K|$, скуп $\sigma \cap F$ је затворен као пресек затворених скупова. Обрнуто, ако је $\sigma \cap F$ затворен за свако $\sigma \in K$, подскуп $F \subseteq |K|$ ће да буде затворен као коначна унија затворених скупова. □

Претходна лема нам омогућава да полиедре симплицијалних комплекса конструишемо као фактор простор добијен од дисјунктне уније симплекса идентификацијом страница симплекса који се секу унутар полиедра јер као разултат добијамо хомеоморфне тополошке просторе.

Анализирајмо непрекидна пресликавања полиедара. Како су полиедри у суштини врло једноставни тополошки простори, непрекидност њихових пресликавања се врло лако проверава посматрањем рестрикција пресликавања на симплексе који их формирају. Међутим, како полиедри имају специфичну симплицијалну структуру, разматрћемо пресликавања која ту структуру чувају.

Нека су K и L симплицијални комплекси.

Дефиниција 5.7. *Пресликавање $f : |K| \to |L|$ је* ***симплицијално*** *ако важе услови:*

$(s1)$ *за свако $\sigma_A \in K$, постоји $\sigma_B \in L$ тако да је $f(A) = B$;*

$(s2)$ *ако је $x = \sum\limits_i \lambda_i a_i$, тада је $f(x) = \sum\limits_i \lambda_i f(a_i)$.*

Дакле, пресликавање $f : |K| \to |L|$ је симплицијално ако се врхови сваког симплекса комплекса K пресликавају у врхове неког симплекса комплекса L и ако чува барицентричне координате тачака полиедра. Симплицијална пресликавања имају врло занимљиве особине.

Лема 5.4. *Нека је пресликавање $f : |K| \to |L|$ симплицијално. Тада,*

- *за произвољан $\sigma_A \in K$ важи $f(\sigma_A) = \sigma_{f(A)}$ а симплекс $\sigma_{f(A)}$ припада комплексу L;*
- *фамилија $f(K) = \{f(\sigma_A) \mid \sigma_A \in K\}$ је поткомплекс комплекса L;*
- *$f(|K|) = |f(K)|$.*

Доказ. Прво својство је очигледна последица особина $(s1)$ и $(s2)$ симплицијалних пресликавања. Фамилија $f(K)$ је садржана у L а за произвољне $\sigma_{f(A)}, \sigma_{f(B)} \in f(K)$ важи

$$f(\sigma_A) \cap f(\sigma_B) = f(\sigma_A \cap \sigma_B) = f(\sigma_{A\cap B})$$

што доказује да је $f(K)$ поткомплекс комплекса L.

Треће својство следи из особине да за сваки слимплекс $\sigma_A \in K$ рестрикција $f|_{\sigma_A}$ пресликава σ_A у симплекс фамилије $f(K)$. □

Дакле, свако симплицијално пресликавање $f : |K| \to |L|$ је потпуно одређено сликама врхова комплекса K и индукује пресликавање $f : K \to L$ симплицијалних комплекса. Важи и обрнуто тј. ако је $f : K \to L$ пресликавање симплицијалних комплекса тако да је $f(K) \preceq L$, њему одговара симплицијално пресликавање полиедара $f : |K| \to |L|$ (доказати). Отуда, симплициална пресликавања полиедара можемо да поистоветимо са пресликавањима фамилија скупова која чувају структуру симплицијалних комплекса.

Лема 5.5. *Симплицијално пресликавање је непрекидно.*

Доказ. За свако $\sigma \in K$, рестрикција $f \restriction \sigma$ је линеарно пресликавање што имплицира да је непрекидно. Како је $|K|$ коначна унија симплекса који су затворени скупови, следи да је f непрекидно пресликавање јер је по Леми 5.3 сваки затворен потскуп полиедра коначна унија затворених потскупова симплекса. $\square$

Хомеоморфизам симплекса Теореме 5.1 је пример једног симплицијалног пресликавања. Заинтересовани читаоци могу да докажу да је симплицијално пресликавање бијективно акко је његова рестрикција на врхове комплекса бијекција.

Пример 5.3. *Конструисати бар једно симплицијално пресликавање правилног шестоугла у квадрат.*

Решење. Нека су K и L триангулације шестоугла и квадрата приказане на фигури испод.

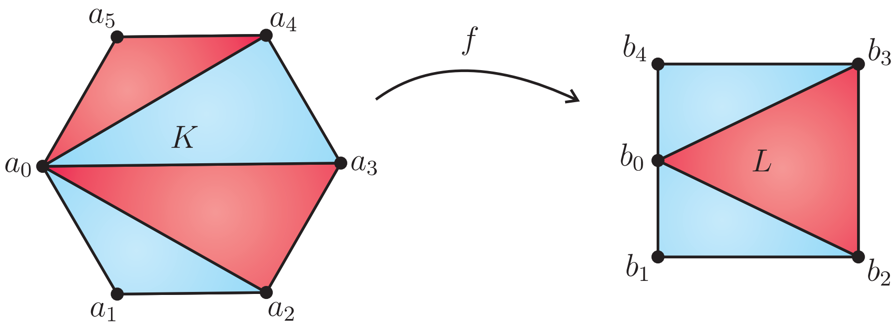

График 35: Симплицијално пресликавање шестоугла у квадрат.

Тада, једно симплицијално пресликавање $f : |K| \to |L|$ је одређено са:

$$f : \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

5.3 Барицентрична подела симплицијалних комплекса

Симплицијална пресликавања, иако комбинаторно једноставна, нису довољна за ширу анализу пресликавања између полиедара јер пре свега зависе од њихове триангулације као што илуструје Пример 5.3. Како је налажење адекватне триангулације тополошких простора врло захтевно, описаћемо технику којом од дате триангулације тополошког простора може да се добије низ „финијих” триангулација које у крајњој лијији омогућавају комбинаторну анализу непрекидних пресликавања полиедара.

Дефиниција 5.8. *Кажемо да је низ симплекса* $\mathcal{N} = (\sigma_{A_0}, \sigma_{A_1}, \dots, \sigma_{A_k})$ *узлазан ако је* $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_k$.

Приметимо да у узлазном низу симплекса $(\sigma_{A_0}, \sigma_{A_1}, \dots, \sigma_{A_k})$ претходни симплекс је увек права страна наредног а низ њихових димензија је растући. Један узлазни низ симплекса је приказан на Графику 30.

Пример 5.4. *Описати све узлазне низове симплекса комплекса* $K(\sigma_A)$ *где је* $|A| = 3$.

Решење. Нека је $A = \{a_0, a_1, a_2\}$. Тада, најдужи узлазни низови симплекса симплицијалног комплекса $K(\sigma_A)$ су:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &= (\sigma_{\{a_0\}}, \sigma_{\{a_0,a_1\}}, \sigma_{\{a_0,a_1,a_2\}}),\\
\mathcal{N}_2 &= (\sigma_{\{a_0\}}, \sigma_{\{a_0,a_2\}}, \sigma_{\{a_0,a_1,a_2\}}),\\
\mathcal{N}_3 &= (\sigma_{\{a_1\}}, \sigma_{\{a_0,a_1\}}, \sigma_{\{a_0,a_1,a_2\}}),\\
\mathcal{N}_4 &= (\sigma_{\{a_1\}}, \sigma_{\{a_1,a_2\}}, \sigma_{\{a_0,a_1,a_2\}}),\\
\mathcal{N}_5 &= (\sigma_{\{a_2\}}, \sigma_{\{a_0,a_2\}}, \sigma_{\{a_0,a_1,a_2\}}),\\
\mathcal{N}_6 &= (\sigma_{\{a_2\}}, \sigma_{\{a_1,a_2\}}, \sigma_{\{a_0,a_1,a_2\}}),
\end{aligned}$$

Остали узлазни низови симплекса су поднизови наведених. □

Сада ћемо да опишемо технику којом се сваком узлазном низу симплекса придружује нови симплекс који је садржан у последњем симплексу низа.

Теорема 5.4. *Ако је $\mathcal{N} = (\sigma_{A_0}, \sigma_{A_1}, \dots, \sigma_{A_k})$ узлазни низ симплекса, тада је скуп њихових барицентара $\widehat{\mathcal{N}} = \{\widehat{\sigma}_{A_0}, \widehat{\sigma}_{A_1}, \dots, \widehat{\sigma}_{A_k}\}$ афино независан.*

Доказ. Узлазни низ симплекса $(\sigma_{A_0}, \sigma_{A_1}, \dots, \sigma_{A_k})$, где је $A_k = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$, можемо да посматрамо као подниз узлазног низа симплекса

$$(\sigma_{\{a_0\}}, \sigma_{\{a_0,a_1\}}, \sigma_{\{a_0,a_1,a_2\}}, \dots, \sigma_{\{a_0,a_1,a_2,\dots,a_n\}}).$$

Као темена симплекса, тачке $a_0, a_1, \dots, a_n$ су афино независне. Покажимо да су и $\widehat{\sigma}_{A_0}, \widehat{\sigma}_{A_1}, \dots, \widehat{\sigma}_{A_k}$ афино независне.

Присетимо се да је $\widehat{\sigma}_{\{a_0,a_1,\dots,a_i\}} = \frac{1}{i+1}(a_0 + a_1 + \dots + a_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Нека је

$$\lambda_0 \widehat{\sigma}_{\{a_0\}} + \lambda_1 \widehat{\sigma}_{\{a_0,a_1\}} + \dots + \lambda_n \widehat{\sigma}_{\{a_0,a_1,\dots,a_n\}} = 0$$

где су $\lambda_i, i = 0, \dots, n$ реални бројеви такви да $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$. То значи да је

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 \frac{1}{2}(a_0 + a_1) + \dots + \lambda_n \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \dots + a_n) = 0,$$
$$\left(\lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} + \dots + \frac{\lambda_n}{n+1}\right) a_0 + \left(\frac{\lambda_1}{2} + \dots + \frac{\lambda_n}{n+1}\right) a_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{n+1} a_0 = 0.$$

Како су $a_0, a_1, \dots, a_n$ афино независне добијамо да је

$$\begin{aligned}
\lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} + \dots + \frac{\lambda_n}{n+1} &= 0,\\
\frac{\lambda_1}{2} + \dots + \frac{\lambda_n}{n+1} &= 0,\\
&\vdots\\
\frac{\lambda_n}{n+1} &= 0.
\end{aligned}$$

Претходни систем има само тривијално решење $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Отуда, барицентри $\widehat{\sigma}_{\{a_0\}}, \widehat{\sigma}_{\{a_0,a_1\}}, \dots, \widehat{\sigma}_{\{a_0,a_1,\dots,a_n\}}$ су афино независни. □

Дакле, сваком узлазном низу симплекса $\mathcal{N}$ одговара афино независан скуп $\widehat{\mathcal{N}}$ а самим тим и симплекс $\sigma_{\widehat{\mathcal{N}}}$. Приметимо да је пресек барицентара низова $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ барицентар њиховог заједничког подниза највеће дужине као и да је сваки подниз узлазног низа симплекса такође узлазан. Ова опсервација нам омогућава да дефинишемо нови симплицијални комплекс.

Нека је $\mathcal{W}K$ фамилија свих узлазних низова симплицијалног компекса K.

Дефиниција 5.9. *Фамилију* $K^{(1)} = \{\sigma_{\widehat{\mathcal{N}}} \mid \mathcal{N} \in \mathcal{W}K\}$ *називамо* ***прва барицентрична подела*** *комплекса* K. *За* $n \in \mathbb{N}$, *фамилију* $(K^{(n-1)})^{(1)} = K^{(n)}$ *називамо* n*-та барицентрична подела комплекса* K.

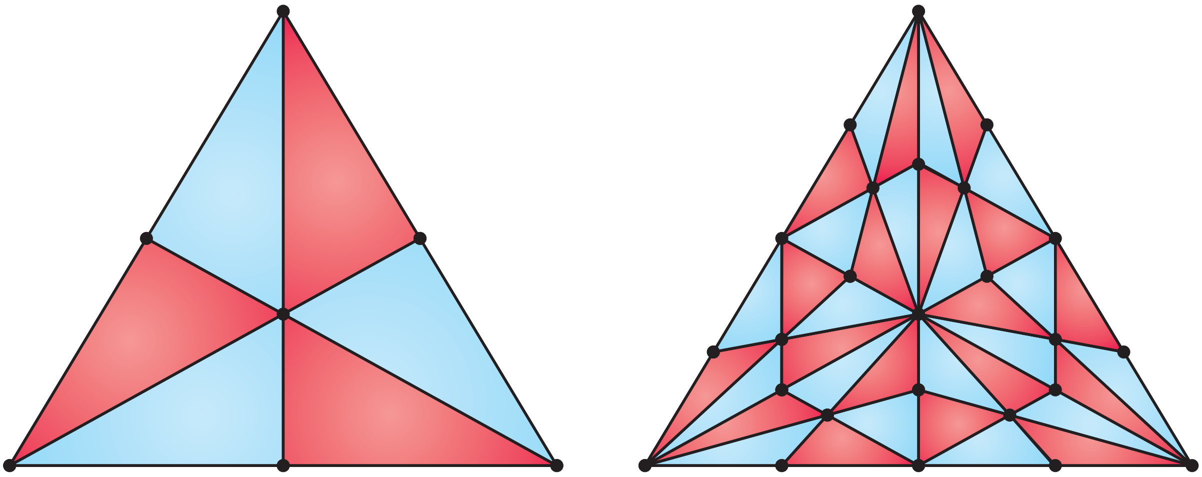

График 36: Прва и друга барицентрична подела комплекса $K(\sigma_{\{a_0,a_1,a_2\}}$.

Дакле, барицентричном поделом комплекса K добијамо нови симплицијални комплекс $K^{(1)}$. Његови врхови су барицентри свих симплекса комплекса K што значи да комплекс $K^{(1)}$ има врхова колико и комплекс K има симплекса. Отуда, K није поткомплекс од $K^{(1)}$ нити $K^{(1)}$ поткомплекс од K. Међутим, барицентричним поделама се добијају нове триангулације истог тополошког простора.

Теорема 5.5. *За произвољан симплицијални комплекс* K *важи* $|K| = |K^{(1)}|$.

Доказ. Како су врхови сваког симплекса комплекса $K^{(1)}$ барицентри симплекса комплекса K, закључујемо да је сваки симплекс барицентричне поделе $K^{(1)}$ садржан у неком симплексу комплекса K што имплицира да је $|K^{(1)}| \subseteq |K|$.

Докажимо да је $|K| \subseteq |K^{(1)}|$. За произвољно $x \in |K|$ постоји симплекс $\sigma_A \in K$ такав да $x \in \sigma_A$. Ако је $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ тада је:

$$x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \text{ где је } \lambda_i > 0 \text{ за све } i = 0, 1, \dots, n \text{ и } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

Можемо да претпоставимо да је $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ што имплицира да постоје $\mu_0, \mu_1 \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ такви да је

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{\mu_n}{n+1} + \frac{\mu_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{\mu_1}{2} + \mu_0, \\
\lambda_1 &= \frac{\mu_n}{n+1} + \frac{\mu_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{\mu_1}{2}, \\
&\vdots \\
\lambda_n &= \frac{\mu_n}{n+1},
\end{aligned}$$

где је $\sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1$ и $\mu_i \geq 0$ за све $i = 0, 1, \dots, n$. Заменом координата тачке x добијамо

$$\begin{aligned}
x &= \mu_0 a_0 + \mu_1 \frac{1}{2}(a_0 + a_1) + \cdots + \mu_n \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \\
&= \mu_0 \widehat{\sigma}_{\{a_0\}} + \mu_1 \widehat{\sigma}_{\{a_0,a_1\}} + \cdots + \mu_n \widehat{\sigma}_{\{a_0,a_1,\dots,a_n\}}.
\end{aligned}$$

Отуда, тачка x припада симплексу $\sigma_{\widehat{\mathcal{N}}} \in K^{(1)}$ који одговара узлазном низу симплекса $\mathcal{N} = (\sigma_{\{a_0\}}, \sigma_{\{a_0,a_1\}}, \ldots, \sigma_{\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}})$. $\square$

Дакле, барицентричном поделом комплекса K се заправо врши ре-триангулација тополошког простора $|K|$. На први поглед, компикована триангулација имплицира компликованију анализу међутим, барицентричним поделама се добијају тзв. ситиније триангулације.

Дефиниција 5.10. *Норма симплицијалног комплекса K, у ознаци $||K||$, је максимум дијаметара симплекса комплекса K односно*

$$||K|| = \max\{\operatorname{diam}\sigma_A \mid \sigma_A \in K\}.$$

Како је симплекс σ_A конвексни омотач афино независног скупа тачака A, интуитивно је јасно да ће његов дијаметар да буде максимум растојања између темена скупа A.

Лема 5.6. *За произвољан симплекс σ_A важи:*

$$\operatorname{diam}\sigma_A = \max\{||a_i - a_j|| \mid a_i, a_j \in A\}.$$

Доказ. Како је σ_A компактан скуп а метрика непрекидна функција, дијаметар скупа σ_A једнак је растојању између неке две тачке скупа σ_A (дијаметар се иначе рачуна као супремум растојања). На пример, нека је $\operatorname{diam}(\sigma_A) = ||x_0 - y_0||$ за неке $x_0, y_0 \in \sigma_A$. Ако је $A = \{a_0, a_a, \ldots, a_n\}$ тачке x_0 и y_0 су облика

$$x_0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i, \quad y_0 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i a_i, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1.$$

Тада, за дијаметар симплекса σ_A важи:

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(\sigma_A) = ||x_0 - y_0|| &= \Big\| x_0 - \sum_{i=0}^{n} \mu_i a_i \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{i=0}^{n} \mu_i x_0 - \sum_{i=0}^{n} \mu_i a_i \Big\| = \Big\| \sum_{i=0}^{n} \mu_i (x_0 - a_i) \Big\| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n} \mu_i ||x_0 - a_i|| \leqslant \max_{i \in \{0,\ldots,n\}} ||x_0 - a_i|| = ||x_0 - a_{i_0}||
\end{aligned}$$

за неко $i_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Даље,

$$\begin{aligned}
||x_0 - a_{i_0}|| &= \Big\| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i - a_{i_0} \Big\| = \Big\| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_{i_0} \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i_0}) \Big\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \lambda_i ||a_i - a_{i_0}|| \\
&\leqslant \max_{i \in \{0,\ldots,n\}} ||a_i - a_{i_0}|| = ||a_{i_1} - a_{i_0}||.
\end{aligned}$$

за неко $i_1 \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Дакле, $\operatorname{diam}\sigma_A \leq ||a_{i_1} - a_{i_0}||$, а како врхови a_{i_1} и a_{i_0} припадају симплексу σ_A, закључујемо да је $\operatorname{diam}\sigma_A = ||a_{i_1} - a_{i_0}||$. $\square$

Испитајмо како барицентрична подела утиче на дијаметар симплекса а самим тим и на дијаметар симплицијалног комплекса.

Лема 5.7. *Ако је $\mathcal{N}$ узлазни низ симплекса који се завржава симплексом σ_A димензије n, тада за симплекс $\sigma_{\widehat{\mathcal{N}}}$ важи:*

$$\operatorname{diam}\sigma_{\widehat{\mathcal{N}}} \leqslant \frac{n}{n+1}\operatorname{diam}\sigma_A.$$

Доказ. Нека је $\widehat{\mathcal{N}} = \{\widehat{\sigma}_{A_0}, \widehat{\sigma}_{A_1}, \dots, \widehat{\sigma}_{A_k}\}$ где је $\widehat{\sigma}_{A_j} = \frac{1}{j+1}(a_{i_0} + a_{i_1} + \cdots + a_{i_j})$, $j = 1, \dots, k$. Тада,по претходној леми, постоје $p, q \in \{0, 1, \dots, k\}$ где је $p < q$ такви да је

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}\sigma_{\widehat{\mathcal{N}}} &= ||\widehat{\sigma}_{A_p} - \widehat{\sigma}_{A_q}|| = ||\frac{1}{p+1}(a_{i_0} + a_{i_1} + \cdots + a_{i_p}) - \widehat{\sigma}_{A_q}|| \\
&= ||\frac{1}{p+1}(a_{i_0} + a_{i_1} + \cdots + a_{i_p}) - \frac{p+1}{p+1}\widehat{\sigma}_{A_q}|| \\
&= ||\frac{1}{p+1}(a_{i_0} - \widehat{\sigma}_{A_q} + a_{i_1} - \widehat{\sigma}_{A_q} + \cdots + a_{i_p} - \widehat{\sigma}_{A_q})|| \\
&\leqslant \max_{j \in \{0,1,\cdots,p\}} ||a_{i_j} - \widehat{\sigma}_{A_q}|| = ||a_{i_t} - \widehat{\sigma}_{A_q}||
\end{aligned}$$

за неко $t \in \{0, 1, \dots, p\}$. Даље,

$$\begin{aligned}
||a_{i_t} - \widehat{\sigma}_{A_q}|| &= ||a_{i_t} - \frac{1}{q+1}(a_{i_0} + a_{i_1} + \cdots + a_{i_q})|| \\
&= ||\frac{q+1}{q+1}a_{i_t} - \frac{1}{q+1}(a_{i_0} + a_{i_1} + \cdots + a_{i_q})|| \\
&= \frac{1}{q+1}||(a_{i_t} - a_{i_0} + \cdots + a_{i_t} - a_{i_t} + \cdots + a_{i_t} - a_{i_q})|| \\
&\leq \frac{1}{q+1}(||a_{i_t} - a_{i_0}|| + \cdots + ||0|| + \cdots + ||a_{i_t} - a_{i_q}||) \\
&\leq \frac{q}{q+1}\max_{j \in \{0,1,\dots,p\}} ||a_{i_t} - a_{i_j}|| = ||a_{i_t} - a_{i_l}||
\end{aligned}$$

за неко $l \in \{0, 1, \dots, q\} \setminus \{t\}$.

Како је $q \leq n$ а тачке a_{i_t}, a_{i_l} су темена симплекса σ_A, закључујемо да је

$$\operatorname{diam}\sigma_{\widehat{\mathcal{N}}} \leqslant \frac{q}{q+1}||a_{i_t} - a_{i_l}|| \leqslant \frac{n}{n+1}||a_{i_t} - a_{i_l}|| \leqslant \frac{n}{n+1}\operatorname{diam}(\sigma^n).$$

□

Дакле, барицентричном поделом се добијају симплекси мањег дијаметра као што је илустровано на Графику 36. Испитајмо шта се дешава са нормом $r-$те барицентричне поделе симплицијалног комплекса.

Теорема 5.6. *За симплицијални комплекс K димензије n и произвољно $r \in \mathbb{N}$ важи*

$$||K^{(r)}|| \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^r ||K||.$$

Доказ. За прву барицентричну поделу $K^{(1)}$ комплекса K и симплекс $\sigma_{\widehat{\mathcal{N}}} \in K^{(1)}$ са највећим дијаметром знамо да је је $\sigma_{\widehat{\mathcal{N}}}$ садржан у симплексу $\sigma_{A_k} \in K$ који је последњи у низу $\mathcal{N}$. При том је $k \leqslant n$ што имплицира де је

$$||K^{(1)}|| = \operatorname{diam}\sigma_{\widehat{\mathcal{N}}} \leqslant \frac{k}{k+1}\operatorname{diam}\sigma_{A_k} \leqslant \frac{n}{n+1}\operatorname{diam}\sigma_{A_k} \leqslant \frac{n}{n+1}||K||$$

што значи да је
$$||K^{(1)}|| \leqslant \frac{n}{n+1}||K||.$$

Како претходна неједнакост важи за сваки симплицијални комплекс и његову прву барицнентричну поделу, а барицентрична подела не мења димензију симплицијалног комплекса, узастопном применом претходне неједнакости добијамо да је

$$||K^{(r)}|| \leqslant \frac{n}{n+1}||K^{(n-1)}|| \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^2||K^{(n-2)}|| \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^r||K||.$$

□

На крају, наводимо најзначајнију примену барицентричних подела симплицијалних комплекса. Ако је симплицијални комплекс K димензије n, како је гранична вредност

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^r = 0$$

закључујемо да ако отворени покривач $\mathcal{U}$ полиедра $|K|$ има Лебегов број λ (при том је $\lambda > 0$ јер је $|K|$ компактан), барицентричном поделом довољно великог реда комплекса K добијамо триангулацију $K^{(r)}$ простора $|K|$ тако да сваки симплекс комплекса $K^{(r)}$ припада неком отвореном скупу фамилије $\mathcal{U}$. Отуда, ради метричке анализе полиедара, берицентричне поделе нам омогућавају да располажемо са триангулацијама које формирају симплекси произвољно малог дијаметра.

5.4 Симплицијална апроксимација непрекидних пресликавања

Анализа непрекидних пресликавања тополошких простора је базирана на концепту $\delta-$околине тачке из домена и $\epsilon-$околине њене слике у кодомену. У овом одељку описујемо методу којом се околина тачке у полиедру формира помоћу симплекса симплицијалног комплекса који триангулишу полиедар. Барицентричне поделе ће да нам омогуће да конструишемо комбинаторне околине довољно малог полупречника а самим тим и конструкцију симплицијалних пресликавања која са унапред задатом тачношћу апроксимирају дато непрекидно пресликавање полиедара.

По Теореми 5.3, сваки полиедар може да се представи као дисјунктна унија интериора својих симплекса. Интериор сваког симплекса јесте отворен скуп у релативној топологији симплекса међутим, интериор симплекса не мора да буде отворен у релативној топологији полиедра. Отуда, да би добили комбинаторне аналоге околина тачака полиедра, уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 5.11. *Нека је K симплицијални комплекс.* ***Звезда симплекса*** *$\sigma_A \in K$, у ознаци $\mathrm{st}(\sigma_A)$ је унија интериора свих симплекса комплекса K којима је симплекс σ страна односно то је скуп*
$$\mathrm{st}(\sigma_A) = \bigcup\{\dot{\sigma_B} \mid \sigma_B \in K, A \subseteq B\}.$$

Приметимо да је звезда симплекса потскуп полиедра симплицијалног комплекса.

Доказаћемо да је у релативној топологији полиедра звезда симплекса отворен скуп. Отуда, звезде симплекса, у класичном тополошком смислу, јесу околине сваке своје тачке.

Лема 5.8. *Нека је K симплицијални комплекс.*

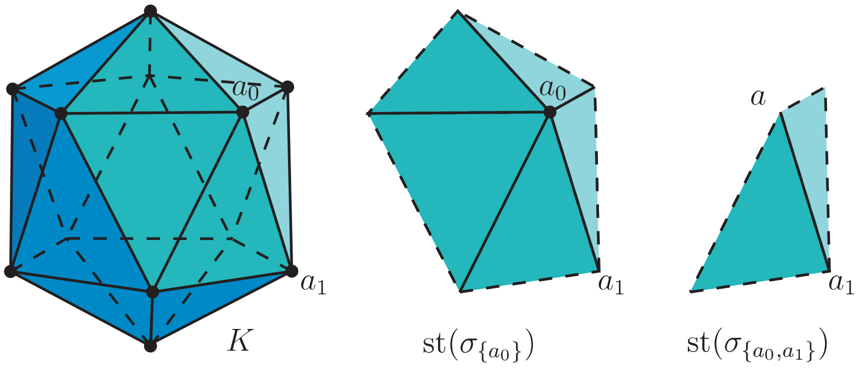

График 37: Звезде 0 и 1−симплекса у триангукацији икосаедра.

(1) *Ако је симплекс* σ_A *страна симплекса* σ_B*, тада је* $\mathrm{st}(\sigma_B) \subseteq \mathrm{st}(\sigma_A)$.

(2) *Ако су* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *неки врхови комплекса* K *тада*

$$\mathrm{st}(\sigma_{\{a_0\}}) \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{a_1\}}) \cap \cdots \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{a_n\}}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \sigma_{\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}} \in K.$$

(3) *За свако* $\sigma_A \in K$ *звезда* $\mathrm{st}(\sigma_A)$ *је отворен скуп у релативној топологији простора* $|K|$.

Доказ. (1) Нека је $x \in \mathrm{st}(\sigma_B)$ произвољно. Тада $x \in \dot{\sigma}_C$ где је $B \subseteq C$ и $\sigma_C \in K$. Како је по претпоставци $A \subseteq B$, закључујемо да је $A \subseteq C$ а самим тим је $x \in \mathrm{st}(\sigma_A)$.

(2) ($\Rightarrow$) Нека је $x \in \mathrm{st}(\sigma_{\{a_0\}}) \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{a_1\}}) \cap \cdots \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{a_n\}})$. Тада, за све $i = 0, 1, \ldots, n$, из $x \in \mathrm{st}(\sigma_{\{a_i\}})$ следи да $x \in \dot{\sigma}_{A_i}$ за неки симплекс $\sigma_{A_i} \in K$. Како x припада полиедру $|K|$, по Теореми 5.3, симплекс комплкеса K који у интериору садржи тачку x је јединствен што имплицира да је $A_0 = A_1 = \cdots = A_n = A$ и $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$.

($\Leftarrow$) Нека $\sigma_A \in K$ где је $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Тада 0-симплекси $\sigma_{\{a_i\}}$ су стране симплекса σ_A, што по својству (1) имплицира да је $\dot{\sigma}_A \subseteq \mathrm{st}(\sigma_{\{a_i\}})$ за све $i = 0, 1, \ldots, n$, што значи да је

$$\dot{\sigma}_A \subseteq \mathrm{st}(\sigma_{\{a_0\}}) \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{a_1\}}) \cap \cdots \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{a_n\}}).$$

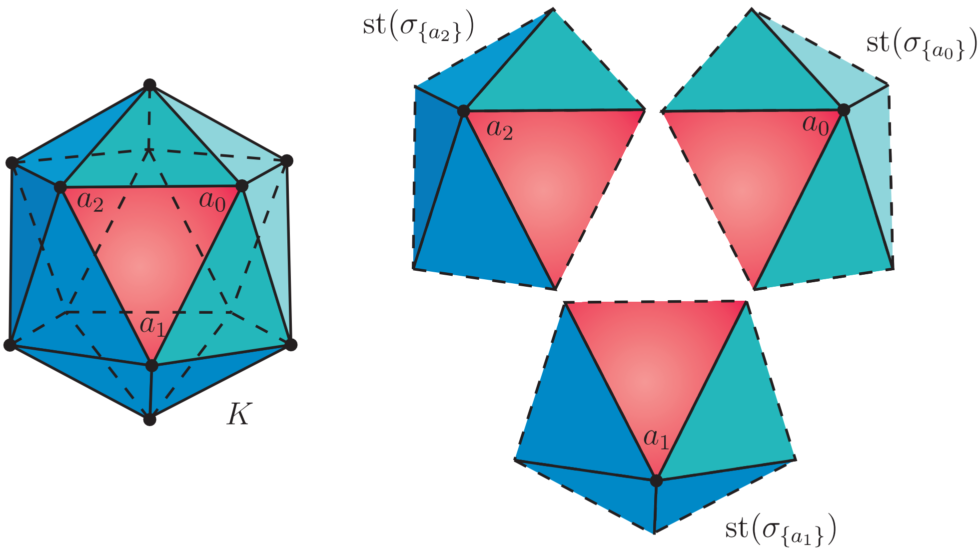

График 38: Сваки симплекс полиедра је у пресеку звезда својих темена.

(3) Покажимо да је скуп $|K| \setminus \mathrm{st}(\sigma_A)$ затворен у топологији простора $|K|$ за произвољно $\sigma_A \in K$. Нека је $L = \{\sigma_B \in K \mid A \nsubseteq B\}$. Тада, L је поткомплекс комплекса K.

По Теореми 5.3, за свако $x \in |K|$ постоји јединствен $\sigma_{B_x} \in K$ такав да је $x \in \dot{\sigma}_{B_x}$. Тада, или је $A \subseteq B$ или $A \nsubseteq B$ што имплицира да $x \in \mathrm{st}(\sigma_A)$ или је $x \in |L|$. Овим смо доказали да је $|K| = \mathrm{st}(\sigma_A) \cup |L|$ и да је $\mathrm{st}(\sigma_A) \cap |L| = \emptyset$. Како је $|L|$ затворен (као полиедар) следи да је $\mathrm{st}(\sigma_A)$ отворен скуп. □

Да би нагласили да звезду симплекса σ_A налазимо у комплексу K, уводимо ознаку $\mathrm{st}_K(\sigma_A)$. Непрекидност пресликавања $f : |K| \to |L|$ тополошких простора подразумева да за свако $x \in |K|$ и произвољну околину $\mathcal{V} \subset |L|$ тачке $f(x)$ постоји околина $\mathcal{U} \subset |L|$ тачке x таква да је $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$. Интуитивно је јасно да ће пресликавање $g : |K| \to |L|$ да буде апроксимација пресликавања f ако је $f(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U})$ за све отворене скупове $\mathcal{U} \subset |K|$ јер овакав услов, уз непрекидност пресликавања g, имплицира непрекидност пресликавања f. Мотивисани овом опсервацијом, уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 5.12. *Нека је $f : |K| \to |L|$ непрекидно пресликавање полиедара $|K|$ и $|L|$. Ако постоји симплицијално пресликавање $f_s : |K| \to |L|$ такво да за сваки врх $\{a\}$ комплекса K важи да је $f\big(\mathrm{st}_K(\sigma_{\{a\}})\big) \subseteq \mathrm{st}_L(\sigma_{\{f_s(a)\}})$ тада, f_s зовемо* ***симплицијална апроксимација*** *пресликавања f.*

Како је скуп симплицијалних пресликавања комплекса K и L ограничен (може да их има највише m^n је n број врхова комплекса K а m број врхова комплекса L), закључујемо да егзистенција симплицијалне апрокцимације непрекидног пресликавања $f : |K| \to |L|$ зависи од триангулације комплекса K и L.

На пример, нека су $K = \{\sigma_{\{1,0\}}, \sigma_{\{1\}}, \sigma_{\{0\}}\}$ и $L = \{\sigma_{\{0,\frac{1}{2}\}}, \sigma_{\{\frac{1}{2},1\}}, \sigma_{\{0\}}, \sigma_{\{\frac{1}{2}\}}, \sigma_{\{1\}}\}$ триангулације интервала $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Тада, идентичко пресликавање $\mathbb{1}_I : I \to I$, посматрано као пресликавање $\mathbb{1}_I : |K| \to |L|$, нема симплицијалну апроксимацију јер $\mathbb{1}_I(\mathrm{st}(\sigma_{\{0\}})) = [0,1)$ није подскуп ни једног симплекса комплекса L а самим тим ни једне звезде из $|L|$.

Анализирајмо пресликавања која имају симплицијалну апроксимацију.

Лема 5.9. *Свако симплицијално пресликавање $f : |K| \to |L|$ је само себи симплицијална апроксимација.*

Доказ. Покажимо да је $f(\mathrm{st}_K(\sigma_{\{a\}})) \subseteq \mathrm{st}_L(\sigma_{\{f(a)\}})$ за све врхове $\{a\}$ комплекса K. Нека $x \in \mathrm{st}_K(\sigma_{\{a\}})$. Тада, по дефиницији звезде симплекса, $x \in \dot{\sigma}_A$ где је $a \in A$ и $\sigma_A \in K$. Како је пресликавање f симплицијално, по Леми 5.4 следи да $f(x) \in f(\sigma_A) = \sigma_{f(A)}$ и $\sigma_{f(A)}$ је симплекс комплекса L. Нека је $x = \lambda_0 a + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ где су λ_i $i = 0, 1, \ldots, n$, позитивне барицентричне координате тачке x. По Дефиницији 5.7, важи да је $f(x) = \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_n f(a_n)$ што значи да $x \in \dot{\sigma}_{f(A)}$. Како је $\{f(a)\}$ теме симплекса $\sigma_{f(A)}$, закључујемо да $x \in \mathrm{st}_L(\sigma_{\{f(a)\}})$. □

Опишимо једну једноставну технику за конструкцију симплицијалне апроксимације датог пресилавања. Нека је $V(K)$ скуп свих врхова симплицијалног комплекса K односно нека је:

$$V(K) = \bigcup_{\sigma_A \in K} A.$$

Теорема 5.7. *Ако за непрекидно пресликавање $f : |K| \to |L|$ важи услов*

$$\big(\forall a \in V(K)\big)\big(\exists b \in V(L)\big) f(\mathrm{st}_K\,(\sigma_{\{a\}})) \subseteq \mathrm{st}_L(\sigma_{\{b\}}),$$

тада постоји симплицијална апроксимација $f_s : |K| \to |L|$ пресликавања f.

Доказ. Конструишимо симплицијалну апроксимацију пресликавања f. За свако теме a комплекса K, по претпоставци, постоји теме b комплекса L тако да

$$f\big(\mathrm{st}_K\,(\sigma_{\{a\}})\big) \subseteq \mathrm{st}_L(\sigma_{\{b\}}),$$

па, нека је $f_s(a) = b$ за свако $a \in V(K)$. Докажимо да f_s задовољава услов $(s1)$ Дефиниције 5.7 симплицијалног пресликавања. Нека је $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ где $\sigma_A \in K$ и нека $x \in \dot{\sigma_A}$. Тада, по Леми 5.8,

$$x \in \mathrm{st}(\sigma_{\{a_0\}}) \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{a_1\}}) \cap \cdots \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{a_n\}})$$

што по конструкцији пресликавања f_s имплицира да је

$$\begin{aligned} f(x) &\in f\big(\,\mathrm{st}(\sigma_{\{a_0\}})\big) \cap f\big(\,\mathrm{st}(\sigma_{\{a_1\}})\big) \cap \cdots \cap f\big(\,\mathrm{st}(\sigma_{\{a_n\}})\big) \\ &\subseteq \mathrm{st}(\sigma_{\{f_s(a_0)\}}) \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{f_s(a_1)\}}) \cap \cdots \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{f_s(a_n)\}}). \end{aligned}$$

Отуда, $\mathrm{st}(\sigma_{\{f_s(a_0)\}}) \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{f_s(a_1)\}}) \cap \cdots \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{f_s(a_n)\}}) \neq \emptyset$, што на основу особине (2) Леме 5.8 имплицира да је $\sigma_{\{f_s(a_0), f_s(a_1), \ldots, f_s(a_n)\}} = \sigma_{f_s(A)}$ симплекс симплицијалног комплекса L. То значи да f_s може да се прошири до симплицијалног пресликавања $f_s : |K| \to |L|$ (слично Теореми 5.1, барицентричне координате аргумента су барицентричне координате слике) које је по Дефиницији 5.12 симплицијална апроксимација пресликавања f. $\square$

Сада наводимо главну теорему овог одељка која оправдава термин „апроксимација” Дефиниције 5.12.

Теорема 5.8. *Нека су K и L симплицијални комплекси. Ако је f_s симплицијална апроксимација непрекидног пресликавања $f : |K| \to |L|$, тада је $f_s \simeq f$.*

Доказ. Нека је f_s симплицијална апроксимација пресликавања f. Конструишимо хомотопију преликавања f_s и f односно непрекидно пресликавање $H : |K| \times I \to |L|$ такво да је $H(x, 0) = f(x)$ а $H(x, 1) = f_s(x)$ за све $x \in |K|$.

Нека је $x \in |K|$ произвољно. Тада, по Теореми 5.3 постоји јединствени симплекс $\sigma_A \in K$ такав да $x \in \dot{\sigma}_A$ где је $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Како $x \in \mathrm{st}(\sigma_{\{a_i\}})$ следи да је $f(x) \in f\big(\,\mathrm{st}(\sigma_{\{a_i\}})\big) \subseteq \mathrm{st}(\sigma_{\{f_s(a_i)\}})$ за све $i = 0, 1, \ldots, n$ Отуда,

$$f(x) \in \mathrm{st}(\sigma_{\{f_s(a_0)\}}) \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{f_s(a_0)\}}) \cap \cdots \cap \mathrm{st}(\sigma_{\{f_s(a_n)\}}).$$

По Теореми 5.3, тачка $f(x)$ припада интериору симплекса $\sigma_B \in L$ и звезди $\mathrm{st}(\sigma_{\{f_s(a_i)\}})$ за све $i = 0, 1, \ldots, n$, закључујемо да је $\{f_s(a_0), f_s(a_1), \ldots, f_s(a_n)\} = f_s(A) \subseteq B$. Како је f_s симплицијално пресликавање следи да је $f_s(x) \in f_s(\sigma_A) = \sigma_{f_s(A)} \subseteq \sigma_B$. Дакле, $f_s(x)$ и $f(x)$ припадају симплексу $\sigma_B \in L$ који је конвексан скуп што значи да и дуж која спаја $f_s(x)$ и $f(x)$ тј. скуп $\{(1-t)f(x) + tf_s(x) \mid t \in I\}$ припада симплексу σ_B.

Отуда, можемо да дефинишемо непрекидно пресликавање $H : |K| \times I \to |L|$ са

$$H(x, t) = (1-t)f(x) + tf_s(x), \quad x \in |K|, t \in I$$

која представља хомотопију пресликавања f и f_s. $\square$

Дакле, симплицијална апроксимација не мења класу пресликавања у односу на релацију „бити хомотопан”. Ово је врло значајна особина јер ако успемо да конструишемо триангулацију тополошких простора X и Y такву да свако непрекидно пресликавање $f : X \to Y$ има симплицијалну апроксимацију, уместо хомотопске класификације свих непрекидних пресликавања простора X у простор Y, довољно је да извршимо хомо хомотопску класификацију симплицијалних пресликавања њихових триангулација којих у крјањој линији има коначно много. Испоставља се да је за ово довољна било која триангулација простора Y уз довољно ситну барицентричну поделу простора X.

Теорема 5.9. (***Теорема о симплицијалној апроксимацији***) *Нека $f : |K| \to |L|$ непрекидно пресликавање. Тада постоји барицентрична подела $K^{(r)}$ комплекса K таква да пресликавање $f : |K^{(r)}| \to |L|$ има симплицијалну апроксимацију.*

Доказ. Да би обезбедили егзистенцију симплицијалне апроксимације пресликавања $f : |K| \to |L|$, конструишимо довољно ситну триангулацију простора $|K|$ тако да буде испуњен услов Теореме 5.7.

Нека је $\mathcal{V} = \{\mathrm{st}_L(\sigma_{\{b\}}) \mid b \in V(L)\}$ фамилија свих звезда симплицијалног комплекса L. Како су звезде отворени скупови у релативној топологији простора $|L|$ а пресликавање f непрекидно, фамилија $f^{-1}(\mathcal{V}) = \{f^{-1}\big(\mathrm{st}_L(\sigma_{\{b\}})\big) \mid b \in V(L)\}$ је отворени покривач простора $|K|$. Како је $|K|$ компактан а његова топологија индукована Еуклидском метриком, $f^{-1}(\mathcal{V})$ има Лебегов број $\lambda > 0$. Тада, по Теореми 5.2, постоји $r \in \mathbb{N}$ односно барицентрична подела $K^{(r)}$ таква да је $||K^{(r)}|| < \frac{\lambda}{2}$. То значи да за сваки врх $a \in V(K^{(r)})$ важи да је $\mathrm{diam}\,\big(\mathrm{st}_K(\sigma_{\{a\}})\big) < \lambda$ (доказати). Отуда, за свако $a \in V(K)$, скуп $\mathrm{st}_K(\sigma_{\{a\}})$ је садржан у неком скупу покривача $f^{-1}(\mathcal{V})$ што имплицира да за свако $a \in V(K)$ постоји $b \in V(L)$ тако да је

$$f\big(\mathrm{st}_K(\sigma_{\{a\}})\big) \subseteq \mathrm{st}_L(\sigma_{\{b\}})$$

што је по Теореми 5.7 довољно за егзистенцију симплицијалне апроксимације пресликавања f. □

Дакле, симплицијална апроксимација чува хомотопске инваријанте непрекидног пресликавања. Покажимо да симплицијална пресликавања могу да послуже и као аналитичке апроксимације непрекидних функција.

Последица 5.1. *Нека је $f : |K| \to |L|$ непрекидно пресликавање. Тада, за произвољно $\epsilon > 0$, постоје $r, s \in \mathbb{N}$ и симплицијална апроксимација $f_s : |K^{(r)}| \to |L^{(s)}|$ пресликавања f таква да за све $x \in |K|$ важи $||f(x) - f_s(x)|| < \epsilon$.*

Доказ. Нека је $L^{(s)}$ барицентрична подела комплекса L таква да је $||L^{(s)}|| < \epsilon$. По Теореми о симплицијалној апроксимацији 5.9, постоји $r \in \mathbb{N}$ односно барицентрична подела $K^{(r)}$ комплекса K и симплицијално пресликавање $f_s : |K^{(r)}| \to |L^{(s)}|$ које је симплицијална апроксимација непрекидног пресликавања f. Како за свако $x \in |K|$ тачке $f(x)$ и $f_s(x)$ припадају истом симплексу полиедра $|L^{(s)}|$, следи да је њихово растојање $||f(x) - f_s(x)||$ мање од дијаметра симплекса комплекса $L^{(s)}$ којем припадају. По Дефиницији 5.10, дијаметар сваког симплекса комплекса $L^{(s)}$ је мањи од норме $||L^{(s)}||$ која је по конструкцији мања од ϵ. □

Дакле, свако непрекидно пресликавање тополошких простора који имају триангулацију може довољно добро да се апроксимира симплицијалним пресликавањем које је потпуно одређено својим комбинаторним својствима. Оваква трансформација непрекидног пресликавања у симплицијално пресликавање обезбеђује врло лепу везу између комбинаторике и топологије као што илуструје следећи пример.

Пример 5.5. *Нека су $m, n \in \mathbb{N}$ произвољни такви да је $m \neq n$. Доказати да тада важе следећа својства:*

(1) *сфере S^n и S^n нису хомотопни простори;*

(2) $\mathbb{R}^n \not\simeq \mathbb{R}^m$.

Решење. Полиедар симплицијалног комплекса $K(\sigma^n) \setminus \{\sigma^n\}$ је скуп $\mathbb{S}^n$ који зовемо полиедрална сфера јер по Примеру 5.2 знамо да је $\mathbb{S}^n \approx S^n$

(1) Довољно је да покажемо да $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{S}^m$ нису хомотопни тополошки просостори. Нека је на пример $n < m$. Претпоставимо супротно, тј. да постоје хомотопске еквиваленције $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ и $g : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ такве да је $g \circ f \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$. Како је f пресликавање полиедара, оно има симплицијалну апроксимацију $f_s : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$. Како је $n < m$, прескикавање f_s није „на” јер $\mathbb{S}^m$ има више врхова. На основу Последице 1.2, f_s је хомотопно неком константном пресликавању e_{y_0} где $y_0 \in \mathbb{S}^m$. Сада је $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n} \simeq g \circ f \simeq g \circ e_{y_0} = e_{x_0}$ где $x_0 \in \mathbb{S}^n$. Тако добијамо да је $\mathbb{S}^n$, а самим тим и S^n, контрактибилан простор што није могуће.

(2) Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ хомотопска еквиваленција и нека је $f(0) = 0$ (ако то није случај, пресликавање $f + c$ је такође хомотопска еквицаленција која за добро одабрано c испуњава овај услов). Тада, f је хомотопска еквиваленција простора $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Како је S^n деформациони ратракт простора $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, хомотопија $H : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ која то обезбеђује је дата са

$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{||x||} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, t \in I,$$

закључујемо да је $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^n$. На сличан начин добијамо да је $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \simeq S^m$. Сада, из $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ следи $S^n \simeq S^m$ што није могуће. $\square$

6 Фундаментална група симплицијалних комплекса

У овом поглављу, описаћемо технике за тачунање фундаменталне групе простора који имају триангулацију користећи комбинаторну структуру триангулација односно одговарајућих симплицијалних комплекса. Посебну олакшицу у раду са триангулацијама простора нам обезбеђује Теорема о симплицијалној апроксимацији 5.9 јер пут у полиедру, односно његову хомотопску класу, можемо да посматрамо као класу једног симплицијалног пресликавања.

6.1 Група ивица

Пут $\alpha : I \to |K|$, као непрекидно пресликавање, има своју симплицијалну апроксимацију $\alpha_s : |L| \to |K|$ где је L нека триангулација интервала $I = [0, 1]$ и знамо да је $\alpha \simeq \alpha_s$. Како је $\alpha_s(L)$ једнодимензионални поткомплекс симплицијалног комплекса K, слика $\alpha_s(I)$ је потпуно одређена низом темена комплекса K кроз које пут α_s пролази. Мотивисани овом опсервацијом, уводимо једну специјалну класу путева полиедра $|K|$.

Нека је K симплицијални комплекс и $a_0 \in V(K)$ неко истакнуто теме.

Дефиниција 6.1. *Низ темена $\alpha = a_0a_1 \dots a_n$ комплекса K такав да за све $i = 0, 1, \dots, n-1$ симплекс $\sigma_{\{a_i,a_{i+1}\}}$ припада комплексу K називамо* ***ивични пут****. Ако је $a_0 = a_n$, тада α зовемо ивична петља у a_0. Ивични пут $\alpha^{-1} = a_na_{n-1} \dots a_1a_0$ зовемо инверзни пут пута α. За ивичне путеве $\alpha = a_0a_1 \dots a_n$, $\beta = a_na_{n+1}a_{n+2} \dots a_m$ дефинишемо ивични пут*

$$\alpha \cdot \beta = a_0a_1 \dots a_na_na_{n+1} \dots a_m$$

који зовемо производ ивичних путева α и β.

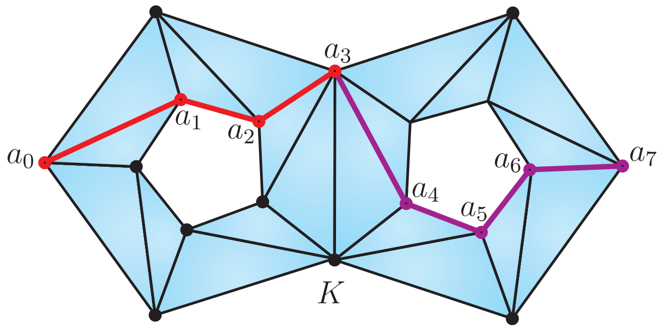

График 39: Ивични путеви комплекса K и њихов производ.

Приметимо да сваком ивичном путу $\alpha = a_0a_1 \dots a_n$ одговара симплицијално пресликавање $\alpha_s : |L| \to |K|$ за неку триангулацију L интервала I које представља пут простора $|K|$ у класичном смислу. Такође, производу ивичних путева одговара класичан производ путева односно одговарајућих симплицијалних пресликавања. Сада наводимо неколико очигледних особина производа ивичних путева.

Лема 6.1. *Нека су α, β и γ ивични путеви симплицијалног комплекса K.*

(1) *Ако је дефинисан производ ивичних путева $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$, тада је дефинисан производ $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ и важи да је $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.*

(2) *Ако је дефинисан производ $\alpha \cdot \beta$ тада је дефинисан и производ $\beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}$ и важи $(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}$.*

Претходни резултати илуструју погодности које пружа комбинаторна анализа ивичних путева јер наведене особине производа класичних путева важе само за класе еквиваленције у односу на релацију „бити хомотопан”. Дефинишимо једну релацију еквиваленције на фамилији ивичних путева.

Дефиниција 6.2. (***Еквивалентни ивични путеви***) *Нека су α и β ивични путеви;*

($\simeq$) *Ивични пут α је елементарно еквивалентан ивичном путу β, пишемо $\alpha \simeq \beta$, ако је испуњен бар један од услова:*

- ($e1$) $\alpha = a_0 \dots a_i a_i \dots a_n$ *и* $\beta = a_0 \dots a_i \dots a_n$*;*
- ($e2$) $\alpha = a_0 \dots a_i a_j a_k \dots a_n$ *и* $b = a_0 \dots a_i a_k \dots a_n$ *а симплекс* $\sigma_{\{a_i, a_j, a_k\}}$ *припада комплексу* K.

($\sim$) *Ивични пут α је еквивалентан ивичном путу β, пишемо $\alpha \sim \beta$, ако постоји низ ивичних путева $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ такав да је $\alpha \simeq \alpha_1 \simeq \alpha_2 \simeq \dots \simeq \alpha_k \simeq \beta$.*

Релација „бити елвивалентан ивични пут” $\sim$ је релација еквиваленције (доказати). Нека је $\pi(K, a_0)$ фамилија свих класа еквиваленције ивичних петљи у темену a_0. Производ класа фамилије $\pi(K, a_0)$ уводимо на стандардан начин

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta] \text{ где } [\alpha], [\beta] \in \pi(K, a_0).$$

Лема 6.2. *Нека су $[\alpha], [\beta] \in \pi(K, a_0)$ класе одређене ивичним путевима α и β. Тада важе следећа својства.*

(1) *Производ $[\alpha] \cdot [\beta]$ је добро дефинисан (не зависи од представника класе).*

(2) *Производ класа је асоцијативан.*

(3) *Класа $[a_0]$ је јединични елемент структуре $\pi(K, a_0)$.*

(4) *Инверзни елемент класе $[\alpha] \in \pi(K, a_0)$ је елемент $[\alpha^{-1}] \in \pi(K, a_0)$.*

Доказ. (1) Из $\alpha \sim \alpha'$ следи $\alpha \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta$ јер ако је $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ низ ивичних путева такав да је, $\alpha \simeq \alpha_0 \simeq \alpha_1 \simeq \dots \simeq \alpha_n = \alpha'$ тада је $\alpha_0 \cdot \beta, \alpha_1 \cdot \beta, \dots, \alpha_n \cdot \beta$ низ ивичних путева такав да је $\alpha \cdot \beta \simeq \alpha_0 \cdot \beta \simeq \alpha_1 \cdot \beta \simeq \dots \simeq \alpha_n \cdot \beta = \alpha' \cdot \beta$. Аналогно, из $\beta \sim \beta'$ следи $\alpha \cdot \beta \sim \alpha \cdot \beta'$. Отуда, из $\alpha \sim \alpha'$ и $\beta \sim \beta'$ следи

$$\alpha \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta'.$$

Дакле, ако је $\alpha \sim \beta$ и $\alpha' \sim \beta'$, следи да је $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta] = [\alpha' \cdot \beta'] = [\alpha'] \cdot [\beta']$.

(2) Важи због асоцијативности производа ивичних петљи.

(3) Нека је $\alpha = a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_0$ произвољна ивична петља. Тада, по дефиницији елементарне еквиваленције ивичних петљи, прецизније по својству ($e1$), важи

$$\alpha \cdot a_0 = a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_0 a_0 \simeq a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_0 = \alpha,$$

што имплицира да је $\alpha \cdot a_0 \sim \alpha$.

(4) Нека је $\alpha = a_0a_1\dots a_{n-1}a_0$ и $\alpha^{-1} = a_0a_{n-1}\dots a_1a_0$ њена инверзна петља. Тада је

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\alpha^{-1} &= a_0a_1\dots a_{n-1}a_0a_0a_{n-1}\dots a_1a_0\\ &\simeq a_0a_1\dots a_{n-1}a_0a_{n-1}\dots a_1a_0\\ &\simeq a_0a_1\dots a_{n-1}a_{n-1}\dots a_1a_0\\ &\vdots\\ &\simeq a_0a_1a_0\\ &\simeq a_0\end{aligned}$$

јер симплекси $\sigma_{\{a_{n-1},a_0,a_{n-1}\}}, \sigma_{\{a_{n-2},a_{n-1},a_{n-2}\}}, \dots, \sigma_{\{a_1,a_0,a_1\}}$ су, као делови ивичног пута, ивице комплекса K. □

Дакле, алгебарска структура $\big(\pi(K,a_0),\cdot\big)$ је група.

Дефиниција 6.3. *Групу* $\big(\pi(K,a_0),\cdot\big)$ *зовемо* ***група ивица*** *или ивична група симплицијалног комплекса* K.

Слично фундаменталној групи, сваком симплицијалном комплексу одговара група ивица чији су елементи класе еквиваленције ивичних путева. Како је група ивица комбинаторна инваријанта симплицијалног комплекса, природно је да анализирамо слике ивичних путева симплицијалним пресликавањима. Нека $\alpha = a_0a_1\dots a_n$ ивични пут и $f_s : |K| \to |L|$ симплицијално пресликавање. Ивични пут $f_s(\alpha)$ комплекса L дефинишемо са

$$f_s(\alpha) = f_s(a_0)f_s(a_1)\dots f_s(a_n).$$

При том, $f_s(\alpha)$ јесте ивични пут комплекса L јер ако је $\sigma_{\{a_i,a_{i+1}\}}$ ивица комплекса K, тада је $f_s\big(\sigma_{\{a_{i-1},a_i\}}\big) = \sigma_{\{f_s(a_{i-1}),f_s(a_i)\}}$ симплекс комплекса L за све $i = 1,\dots,n$

Лема 6.3. *Ако су* α,β *ивични путеви комплекса* K *такви да је* $\alpha \sim \beta$ *и* $f_s : |K| \to |L|$ *симплицијално пресликавање, тада је* $f_s(\alpha) \sim f_s(\beta)$.

Доказ. Довољно је да докажемо да из $\alpha \simeq \beta$ следи $f_s(\alpha) \simeq f_s(\beta)$. Нека је $\alpha \simeq \beta$, Разликујемо два случаја:

- ако је $\alpha = a_0\dots a_ia_i\dots a_n$ и $\beta = a_0\dots a_i\dots a_n$ тада, њхове слике симплицијалним пресликавањем f_s су ивични путеви $f_s(\alpha) = f_s(a_0)\dots f_s(a_i)f_s(a_i)\dots f_s(a_n)$ и $f_s(\beta) = f_s(a_0)\dots f_s(a_i)\dots f_s(a_n)$ који су елементарно еквивалентни;

- ако је $\alpha = a_0\dots a_ia_ja_k\dots a_n$ и $b = a_0\dots a_ia_k\dots a_n$ а симплекс $\sigma_{\{a_i,a_j,a_k\}}$ припада комплексу K, тада је $f_s(\alpha) = f_s(a_0)\dots f_s(a_i)f_s(a_j)f_s(a_k)\dots f_s(a_n)$ и $f_s(\beta) = f_s(a_0)\dots f_s(a_i)f_s(a_j)\dots f_s(a_n)$ а симплекс $f_s(\sigma_{\{a_i,a_j,a_k\}}) = \sigma_{\{f_s(a_i),f_s(a_j),f_s(a_k)\}}$ припада комплексу L због својства (s_1) Дефиниције 5.7 што опет имплицира да је $f_s(\alpha) \simeq f_s(\beta)$.

Отуда, произвољном низу елементарних еквиваленција $\alpha_0 \simeq \alpha_1 \simeq \dots \simeq \alpha_n$ одговара низ елементарних еквиваленција $f_s(\alpha_0) \simeq f_s(\alpha_1) \simeq \dots \simeq f_s(\alpha_n)$ што значи да из $\alpha \sim \beta$ следи $f_s(\alpha) \sim f_s(\beta)$. □

На основу претходне леме, ако је $f_s : |K| \to |L|$ симплицијално пресликавање, оно индукује хомоморфизам $f_s : \big(\pi(K,a_0),\cdot\big) \to \big(\pi(L,f_s(a_0)),\cdot\big)$ ивичних група дат са $f_s([\alpha]) = [f_s(\alpha)]$ за $[\alpha] \in \pi(K,a_0)$.

Поставља се питање каква својства симплицијалног комплекса су одређена његовом групом ивица, специјално који симплицијални комплекси имају изоморфне ивичне групе. Сада ћемо да опишемо поступак којим се од симплицијалног комплекса добија његов поткомплекс који има изоморфну групу ивица.

Дефиниција 6.4. (***Колапсирање***) *За $(n-1)-$страну σ_B n-симплекса $\sigma_A \in K$ кажемо да је слободна ако σ_B није страна ни једног другог симплекса комплекса K. Ако је σ_B слободна страна симплекса $\sigma_A \in K$, тада $K_1 = K \setminus \{\sigma_A, \sigma_B\}$ је симплицијални комплекс, а поступак којим од комплекса K добијамо K_1 зовемо елементарно колапсирање.*

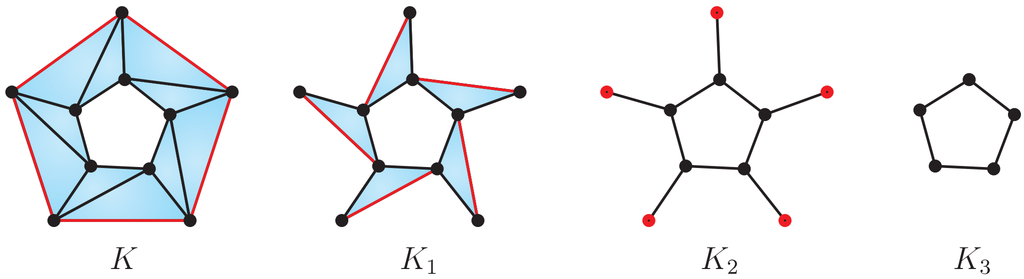

График 40: Колапсирање комплекса K, црвени симплекси су слободни.

Елементарним колапсирањем се не мењају хомотопске инваријанте симплицијалног комплекса као што илуструје следећа лема.

Лема 6.4. *Ако се симплицијални комплекс K_1 добија елементарним колапсирањем од комплекса K, тада је $|K_1|$ деформациони ретракт простора $|K|$.*

Доказ. Нека је $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ и нека је σ_A слободна страна симплекса $\sigma_{A\cup\{a_n\}}$. Тада, за барицентар $\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}_A = \frac{1}{n}(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})$ симплекса $\sigma_{A\setminus\{a_n\}}$, и свако $i = 0, 1, \ldots, n-1$ скуп $A_i = (A\setminus\{a_i\})\cup\{\widehat{\sigma}, a_n\}$ је афино независан. Отуда, симплицијални комплекс

$$L = \bigcup_{i=0}^{n-1} K(\sigma_{A_i})$$

је триангулација симплекса $\sigma_{A\cup\{a_n\}}$ таква да је $L \cap K = L \cap (K \setminus \{\sigma_A, \sigma_{A\cup\{a_n\}}\})$. Сада

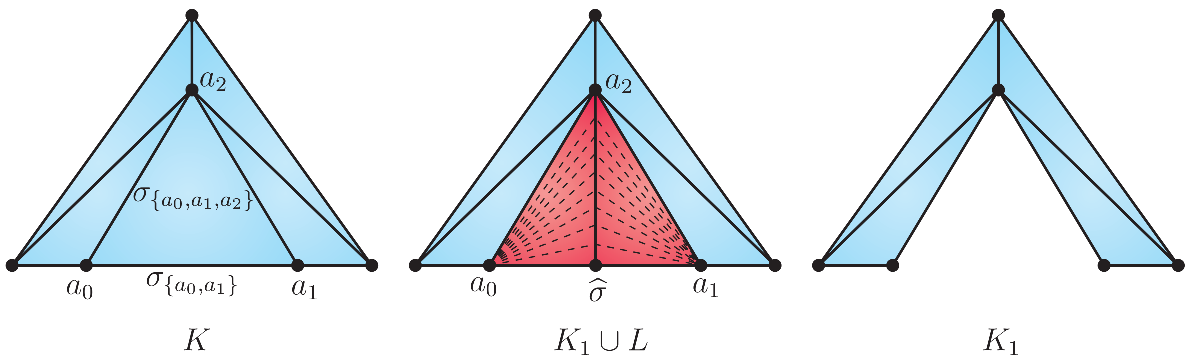

График 41: Илустрација доказа.

можемо да дефинишемо хомотопију $H : |L| \times I \to |L|$:

$$H(x,t) = tf_{s1}(x) + (1-t)f_{s2}(x)$$

где су f_{s1} и f_{s2} симплицијална пресликавања одређена са:

$$f_{s1} : \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \widehat{\sigma} \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \widehat{\sigma} \end{pmatrix}, \quad f_{s1} : \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \widehat{\sigma} \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Пресликавање H је деформациона ретракција полиедра $|L|$ на потскуп $|L \cap K| = |K(\sigma_{A\cup\{a_n\}}) \setminus \{A \cup \{a_n\}, A\}|$ који је триангулација границе симплекса $\sigma_{A\cup\{a_n\}}$ без интериора симплекса σ_A. То значи да можемо да дефинишемо хомотопију $G : |K| \times I \to |K|$

$$G(x,t) = \begin{cases} x, & x \in |K_1| \\ H(x,t), & x \in \sigma_{A\cup\{a_n\}} \end{cases}, \quad x \in |K|, t \in I$$

која представља деформациону ретракцију полиедра $|K|$ на потпростор $|K_1|$. □

Дакле, колапсирањем симплицијалног комплекса K добијамо његов деформациони ретракт. Ако симплицијални комплекс може да се колапсирањем сведе на неко своје теме кажемо да је **колапсибилан**.

Последица 6.1. *Ако је полиедар $|K|$ колапсибилан, онда је и контрактибилан.*

Доказ. Следи из чињенице да су простор и његов деформациони ретракт хомотопски еквивалентни и транзитивности хомотопске еквиваленције простора. □

Испитајмо како колапсирање симплицијалног комплекса утиче на групу ивица.

Лема 6.5. *Нека се комплекс K елементарно колапсира на теме a_0. Тада, ако је α произвољна ивична петља у тачки a_0, важи да је $\alpha \sim a_0$.*

Доказ. Приметимо да избацивање из комплекса K симплекса димензије веће од 2 не утиче на групу ивица. Нека се комплекс K_1 добија од комплекса K избацивањем симплекса $\sigma_{\{a_i,a_j,a_k\}}$ и његове слободне стране $\sigma_{\{a_i,a_j\}}$. Ако је $\alpha = a_0 \dots a_i a_j \dots a_0$ произвољна ивична петља која пролази кроз страницу $\sigma_{\{a_i,a_j\}}$ она је елементарно еквивалентна петљи $a_0 \dots a_i a_k a_j \dots a_0 = \alpha_1$ а α_1 је ивична петља комплекса K_1. Настављајући поступак, добијамо да је $\alpha \simeq \alpha_1 \simeq \dots \simeq \alpha_k \simeq a_0$, односно $\alpha \sim a_0$. □

Из доказа претходне леме је јасно да ако се K_1 добија елементарним коплапсирањем од комплекса K, тада је $\pi(K_1, a_0) \cong \pi(K_1, a_0)$ (при том $a_0 \in V(K_1)$).

Сада наводимо кључну теорему овог поглавља.

Теорема 6.1. *Нека је K симплицијални комплекс. Фундаментална група $\pi_1(|K|, a_0)$ полиедра $|K|$ и ивична група $\pi(K, a_0)$ комплекса K су изоморфне.*

Доказ. Конструишимо одговарајући изоморфизам. Свакој ивици $\sigma_{\{a_i,a_j\}} \in K$ односно ивичном путу $a_i a_j$ одговара класичан пут $u_{ij} : I \to \sigma_{\{a_i,a_j\}}$ дат са

$$u_{ij}(t) = (1-t)a_i + t a_j \quad t \in [0,1].$$

Дефинишимо пресликавање $\Phi : \pi(K, a_0) \to \pi_1(|K|, a_0)$ са

$$\Phi([a_0 a_1 \dots a_n a_0]) = [u_{01} \cdot u_{12} \cdot \dots \cdot u_{n-1n} \cdot u_{n0}]$$

за произвољно $[a_0 a_1 \dots a_n a_0] \in \pi(K, a_0)$ (практично, ивичну петљу трансформишемо у класичну петљу). Покажимо да је Φ изоморфизам.

Прво, Φ је хомоморфизам јер за ивичне петље $\alpha = a_0 a_{i_1} \dots a_{i_n} a_0$ и $\beta = a_0 a_{j_1} \dots a_{j_m} a_0$ у темену a_0 важи:

$$\begin{aligned} \Phi([\alpha] \cdot [\beta]) = \Phi([\alpha \cdot \beta]) &= \Phi[a_0 a_{i_1} \dots a_{i_n} a_0 a_0 a_{j_1} \dots a_{j_m} a_0] \\ &= [u_{0i_1} \cdot \dots \cdot u_{i_n 0} \cdot u_{0j_1} \cdot \dots \cdot u_{j_m 0}] \\ &= [u_{0i_1} \cdot \dots \cdot u_{i_n 0}] \cdot [u_{0j_1} \cdot \dots \cdot u_{j_m 0}] \\ &= \Phi([\alpha]) \cdot \Phi([\beta]). \end{aligned}$$

Друго, докажимо да је Φ добро дефинисано. Нека је $\alpha \simeq \alpha'$.

$(e1)$ Ако је $\alpha = a_0 \dots a_i a_i \dots a_0$ а $\alpha' = a_0 \dots a_i \dots a_0$, тада је $u_{ii} = e_{a_i}$ па је

$$\begin{aligned}\Phi([\alpha]) &= [u_{01} \cdot \dots \cdot u_{i-1i} \cdot u_{ii} \cdot \cdot u_{ii+1} \dots \cdot u_{n0}]\\ &= [u_{01} \cdot \dots \cdot \cdot u_{ii} \cdot e_{a_i} \cdot u_{ii+1} \cdot \dots \cdot u_{n0}]\\ &= [u_{01} \cdot \dots \cdot u_{i-1i} \cdot u_{ii+1} \cdot u_{n0}]\\ &= \Phi([\alpha']).\end{aligned}$$

$(e2)$ Нека је $\alpha = a_0 \dots a_i a_j a_k \dots a_0$, $\beta = a_0 \dots a_i a_k \dots a_0$. Тада је $u_{ij} \cdot u_{jk} \sim u_{ik}$ јер симплекс $\sigma_{\{a_i, a_j, a_k\}} \in K$ је контрактибилан простор па су свака два његова пута који повезују исте тачке еквивалентни. Отуда је

$$u_{01} \cdot \dots \cdot u_{ij} \cdot u_{jk} \cdot \dots \cdot u_{n0} \sim u_{01} \cdot \dots \cdot u_{ik} \cdot \dots \cdot u_{n0},$$

а када пређемо на одговарајуће класе еквиваленције добијамо да је $\Phi([\alpha]) = \Phi([\beta])$.

Треће, Φ је „на” пресликавање. Нека је $\alpha : I \to |K|$ произвољна петља у тачки a_0. По Теореми о симплицијалној апроксимацији 5.9, постоји барицентрична подела $I^{(r)}$ интервала $I = [0, 1]$ тачкама $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{m+1} = 1$ и симплицијално пресликавање $\alpha_s : |I^{(r)}| \to |K|$ које је хомотопно пресликавању α. При том, хомотопија $\alpha \sim \alpha_s$ из доказа Теореме 5.9 чува истакнуту тачку a_0 што значи да су петље α и α_s еквивалентне. Ако је $\alpha_s(b_i) = a_i \in V(K)$, можемо да дефинишемо ивичну петљу $\alpha = a_0 a_1 \dots a_n a_0$ такву да је

$$\Phi([\alpha]) = [u_{01} \cdot u_{12} \cdot \dots \cdot u_{n0}] = [\alpha_s] = [\alpha].$$

Дакле, произвољно $[\gamma] \in \pi_1(|K|, a_0)$ је слика неког елемента $[\alpha] \in \pi(K, a_0)$ што доказује да је Φ епиморфизам.

На крају, покажимо да је Φ „1-1” провером језгра пресликавања. Нека је $\alpha = a_0 a_1 \dots a_k a_0 \in \pi(K, a_0)$ ивична петља таква да је $\Phi([\alpha]) = [e_{a_0}] \in \pi_1(|K|, a_0)$ јединични елемент. Одавде следи да је петља $\alpha_s = u_{01} \cdot u_{12} \cdot \dots \cdot u_{k0} : I \to |K|$ еквивалентна константном путу у тачки a_0 што значи да постоји хомотопија $H : I^2 \to |K|$ таква да је

$$\begin{aligned}&H(t, 0) = \alpha_s(t),\\ &H(t, 1) = a_0 = e_{a_0}(t) \text{ за све } t \in I,\\ &H(0, s) = H(1, s) = a_0 \text{ за све } s \in I.\end{aligned}$$

Нека је L триангулација квадрата I^2 приказана на Графику 42. Ако одредимо симплицијалну апроксимацију хомотопије H, она не мора да задовољава услове као хомотопија H, посебно услове на граници где треба да буде константна.

Због тога уводимо помоћну триангулацију L' квадрата I^2 и симплицијално пресликавање $h : |L'| \to |L|$ са

$$h : \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{k+3} & c'_0 & c'_1 & \cdots & c'_{k+3} \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{k+3} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{k+3} \end{pmatrix}.$$

По Теореми о симплицијалној апроксимацији 5.9, пресликавање $H \circ h : |L'| \to |K|$ има симплицијалну апроксимацију $H_s : |L'^{(r)}| \to |K|$ за неку барицентричну поделу $L'^{(r)}$ комплекса L'. Даље, како се полиедар $|L'|$ колапсира на c_0, свака његова барицентрична подела се колапсира на c_0. Отуда, по Леми 6.5, свака ивична петља комплекса $L'^{(r)}$

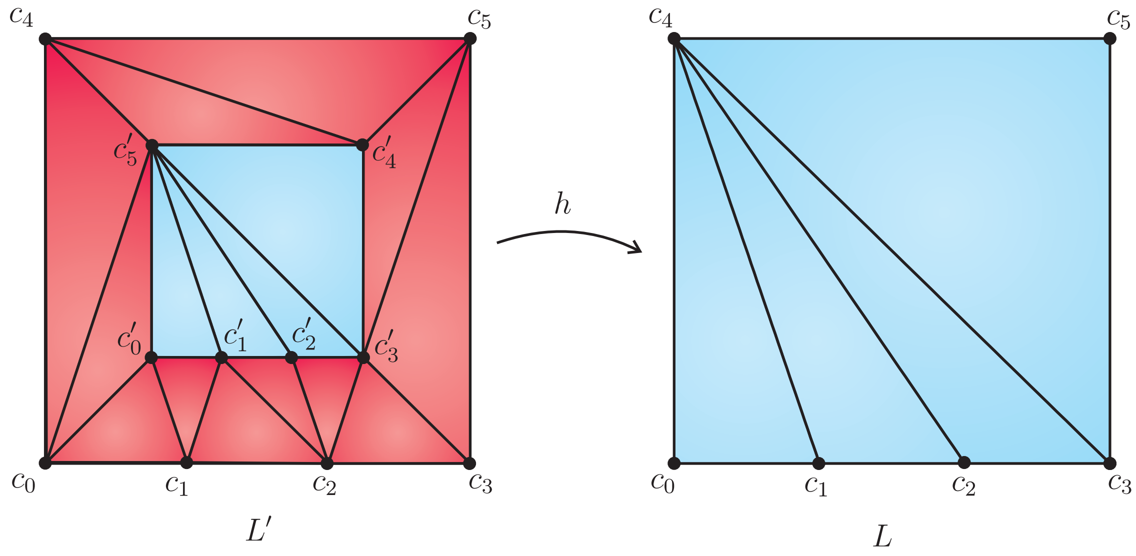

График 42: Триангулације L' и L квадрата I^2 за $n = 3$.

је еквивалентна константној петљи у c_0 а самим тим и петља $\partial L'^{(r)}$ која обилази руб квадрата $|L'^{(r)}|$. По конструкцији пресликавања h односно триангулације L', свако теме које није са доње ивице квадрата $|L'|$ (а самим тим и $|L'^{(r)}|$) пресликавањем H_s се слика у теме a_0. То је зато што се интериори сваког симплекса из њихових звезда пресликавањем $H \circ h$ сликају у a_0. Слично, темена са доње ивице квадрата се сликају у темена ивичног пута α. Отуда, слика ивичне петље $\partial L'^{(r)}$ симплицијалним пресликавањем H_s је ивична петља $\alpha a_0 \cdots a_0 \sim \alpha$ која је по Леми 6.3 еквивалентна петљи $H_s(c_0) = a_0$.

Дакле, из $\Phi([\alpha]) = [a_0]$ следи $\alpha \sim a_0$ што доказује да је хомоморфизам Φ „1-1”. $\square$

Одређивање фундаменталне групе тополошких простора је у најмању руку захтеван проблем. Међутим, ако тополошки простори имају триангулацију, група ивица нам омогућава да знатно једноставније одредимо фундаменталне групе полиедара. Довољно је да приметимо да различитих петљи у скоро сваком тополошком простору има непребројиво док ивичних петљи произвољног симплицијалног комплекса има пребројиво много. Илуструјмо ову олакшицу једним примером.

Пример 6.1. *Одредити фундаменталну групу кружнице S^1.*

Решење. Знамо да је $K = K(\sigma_{\{a_0,a_1,a_2\}}) \setminus \{\sigma_{\{a_0,a_1,a_2\}}\}$ једна триангулација кружнице. Приметимо да за ивични пут $\gamma = a_0a_1a_2a_0$, елемент $[\gamma]$ није тривијалан у групи $\pi(K, a_0)$.

Нека је $[\beta] \in \pi(K, a_0)$ произвољан. Нека је $\alpha = a_{i_0}a_{i_1} \cdots a_{i_n}$ ивична петља у тачки a_0 ($a_{i_0} = a_{i_n} = a_0$) таква да су све остале петље класе $[\beta]$ дужине веће или једнаке од α. Тада, петља α има следеће особине:

- због $(e1)$ Дефиниције 6.2 важи да је $a_{i_{k-1}} \neq a_{i_k}$ за све $k = 1, \ldots, n$;
- не постоји трочлани сегмент $a_{i_{k-1}}a_{i_k}a_{i_{k+1}}$ петље α такав да је $a_{i_{k-1}} = a_{i_{k+1}}$ јер би због особине $(e2)$ Дефиниције 6.2 такав сегмент био елементарно еквивалентан сегменту $a_{i_{k-1}}a_{i_{k+1}}$ зато што симплекс $\sigma_{\{a_{i_{k-1}},a_{i_k},a_{i_{k+1}}\}} = \sigma_{\{a_{i_{k-1}},a_{i_{k+1}}\}}$ припада комплексу K.

Како је $a_{i_0} = a_0$, петља α може да има следеће две форме:

- ако је $a_{i_1} = a_1$ тада је $a_{i_2} = a_2$, $a_{i_3} = a_0$, $a_{i_4} = a_1$ итд. што значи да је α облика

$$\begin{aligned}\alpha &= a_0a_1a_2a_0a_1a_2\cdots a_0a_1a_2a_0\\ &\sim a_0a_1a_2a_0a_0a_1a_2a_0\cdots a_0a_1a_2a_0\\ &= \gamma^n;\end{aligned}$$

- ако је $a_{i_1} = a_2$ тада је $a_{i_2} = a_1$, $a_{i_3} = a_0$, $a_{i_4} = a_2$ итд. што значи да је α облика

$$\begin{aligned}\alpha &= a_0a_2a_1a_0a_2a_1\cdots a_0a_2a_1a_0\\ &\sim a_0a_2a_1a_0a_0a_2a_1a_0\cdots a_0a_2a_1a_0\\ &= (\gamma^{-1})^n.\end{aligned}$$

Како за различите $m, n \in \mathbb{N}$ важи да $[\gamma^n] \neq [\gamma^m]$ (због представника класа најмање дужине) закључујемо да је

$$\pi_1(S^1, x_0) \cong \pi_1(K, a_0) = \langle [\gamma] \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

$\square$

6.2 Група симплицијалног комплекса

У овом одељку представљамо још једну методу за одређивање фундаменталне групе симплицијалних комплкеса. Метода се базира на опсервацији да, ако је L колапсибилан поткомплекс симплицијалног комплекса K, свака ивична петља комплекса L је еквивалентна константној петљи а саим тим и граница сваког $2-$симплекса комплекса K. Ово нам омогућава да, користећи симплицијалну структуру комплекса K, одредимо репрезентацију фундаменталне групе $\pi_1(|K|, a_0)$.

Опишимо технику којом се комбинаторно проверава повезаност путевима полиедра симплицијалног комплекса.

Теорема 6.2. *Нека је K симплицијални комплекс и $|K|$ његов полиедар. Тада, $|K|$ је путевима повезан тополошки простор акко за свака два темена $a, b \in V(K)$ постоји ивични пут $\alpha = \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n$ комплекса K такав да је $a_0 = a$ и $a_n = b$.*

Доказ. $(\Rightarrow)$ Нека је $|K|$ путевима повезан. Претпоставимо супротно, нека постоје темена a и b комплекса K која не могу да се повежу ивичним путем. Тада, свако теме комплекса K припада једном од скупова

- скуп $V' \subseteq V(K)$ темена комплекса K која могу да се повежу са теменом a ивичним путем;
- скуп $V'' = V(K) \setminus S'$.

Како је $V' \cap V'' = \emptyset$, не постоји симплекс $\sigma_A \in K$ такав да је $A \cap V' \neq \emptyset$ и $A \cap V'' \neq \emptyset$ јер би у супротном неко теме из V'' могли да повежемо са a што је у супротности са конструкцијом скупова V' и V''.

То значи да K може да се представи као унија дисјунктних симплицијалних комплекса L и M где је.

$$\begin{aligned}L &= \{\sigma_A \in K \mid A \subseteq V'\},\\ M &= \{\sigma_A \in K \mid A \subseteq V''\}.\end{aligned}$$

Отуда, $|K| = |L| \cup |M|$ и $|L| \cap |M| = \emptyset$ што значи да $|K|$ није повезан и ту долазимо до контрадикције.

($\Leftarrow$) Нека произвољна темена комплекса K могу да се повежу ивичним путем. Покажимо да је $|K|$ путевима повезан. Нека су $x, y \in |K|$ произвољне тачке. Тада, $x \in \sigma_A$ и $y \in \sigma_B$ где $\sigma_A, \sigma_B \in K$. Нека је $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$. Како су симплекси путевима повезани простори, постоји пут $\gamma_1 : I \to \sigma_A$ такав да је $\gamma_1(0) = x$ и $\gamma_1(1) = a_0$ и пут $\gamma_2 : I \to \sigma_B$ такав да $\gamma_2(0) = b_0$ и $\gamma_2(1) = y$. Како су a_0 и b_0 темена комплекса K, по претпоставци, она могу да се повежу ивичним путем $\alpha = a_0 a_1 \dots a_n b_0$. Сада, можемо да дефинишемо симплицијално пресликавање $\alpha_s : |I'| \to |K|$ са

$$\alpha_s : \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_n & t_{n+1} \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n & b_0 \end{pmatrix}$$

где је I' триангулација симплекса I чија су темена t_i, $i = 0, 1, \dots, n+1$ за које важи да је $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1$. Тада, производ $\gamma_1 \cdot \alpha_s \cdot \gamma_2$ је дефинисан и повезује тачке a_0 и b_0. □

У претходном одељку смо описали технику колапсирања симплицијалног комплекса којом се добија њему хомотопски елвивалентан поткомплекс што значајно поједностављује рачунање групе ивица а самим тим и фундаменталне групе датог простора. Да би још више поједноставили рачунање фундаметалне групе, описаћемо методу којом се одређује максимални (у смислу инклузије) колапсибилан поткомплекс датог симплицијалног комплекса.

Дефиниција 6.5. *Једнодимензионални симплицијални комплекс који се колапсира на неко своје теме називамо* ***дрво****.*

Фамилија $\{L \subseteq K \mid L \text{ је дрво}\}$ је парцијално уређен скуп, па он има максимални елемент који називамо максимално дрво. Максимално дрво је посебно погодно за одређивање највећег колапсибилног поткомплекса датог симплицијалног комплекса.

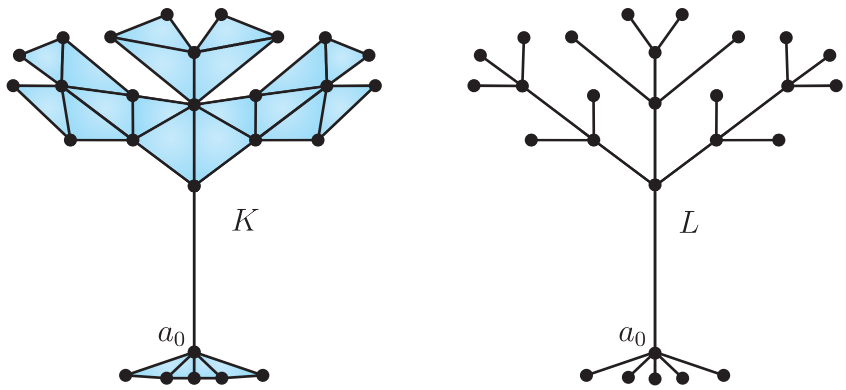

График 43: Симплицијални комплекс K и његово максимално дрво L.

Теорема 6.3. *Нека је $|K|$ повезан. Ако је L максимално дрво комплекса K, тада L садржи сва темена комплекса K.*

Доказ. Нека је L максимално дрво које не садржи теме $b \in V(K)$. По Теореми 6.2, за произвољно теме $a_0 \in V(L)$ постоји ивични пут $\alpha = a_0 a_1 \dots a_n b$ који повезује теме a_0 и b. Нека је a_k прво теме пута α такво да је $a_k \in V(L)$ а $a_{k+1} \notin V(L)$ (овакво теме постоји јер $b \notin V(L)$).

Тада, симплицијални комплекс $L_1 = L \cup \{\sigma_{\{a_k,a_{k+1}\}}, \sigma_{\{a_{k+1}\}}\}$ се колапсира на L јер је $\sigma_{\{a_{k+1}\}}$ слободна страна симплекса $\sigma_{\{a_k,a_{k+1}\}}$. Како се L колапсира на неко теме (јер је дрво) и L_1 се последично колапсира на исто то теме што значи да је и L_1 дрво. Како је $L \subset L_1$, следи да L није максимално дрво што није могуће. Дакле, $b \in V(L)$. $\square$

Последица 6.2. *Нека је $|K|$ повезан. Тада, постоји поткомплекс $L \subseteq K$ такав да L садржи сва темена комплекса K и $|L|$ је контрактибилан .*

Заиста, максимално дрво садржи сва темена комплекса и оно је колапсибилан симплицијални комплекс а његов полиедар је по Последици 6.1 контрактибилан. $\square$

Приметимо да максимално дрво не мора да буде највећи поткомплекс симплицијалног комплекса који је колапсибилан јер дрво је једнодимензионалан поткомплекс. Такође, контрактибилност полиедра $|K|$ не мора да имплицира колапсибилност симплицијалног комплекса K. На пример, било која триангулација лудачке капе није колапсибилан симплицијални комплекс.

Нека је $|K|$ повезан и L поткомплекс комплекса K који садржи сва темена из K (не мора да буде дрво) такав да је $|L|$ контрактибилан (комплекс L постоји јер максимално дрво задовољава наведене услове). Нека g_{ij}, где је $i < j$, означава симплекс $\sigma_{\{a_i,a_j\}} \in K$. Сваком 1-симплексу $\sigma_{\{a_i,a_j\}} \in L$ додељујемо релацију $g_{ij} = 1$. Сваком $2-$симплексу $\sigma_{\{a_i,a_j,a_k\}} \in K$, где је $i < j < k$ додељујемо релацију $g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ik}^{-1} = 1$.

Мотивација за овакву конструкцицу се огледа у чињеници да $|L|$ садржи сва темена комплекса K. Како свака хомотопија на полиедру $|L|$ може да се прошири на полиедар $|K|$, када се изврши контракција полиедра $|L|$ добијамо простор $|K|/|L|$ који је хомотопски еквивалентан полиедру $|K|$ у којем је свако теме комплекса K сада једна тачка. Отуда, сваки 1-симплекс комплекса K у простору $|K|/|L|$ постаје петља. Због тога, све 1-симплексе у комплексу L идентифукујемо са неутралним елементом као и петље које представљају ивице свих 2-симплекса јер је сваки $2-$симплекс сам по себи контрактибилан простор.

Дефиниција 6.6. *Нека је L поткомплекс комплекса K такав да је $|L|$ контрактибилан и $V(L) = V(K)$. Нека је $G = \{g_{ij} \mid \sigma_{\{a_i,a_j\}} \in K\}$, $R_1 = \{g_{ij} = 1 \mid \sigma_{\{a_i,a_j\}} \in L\}$, $R_2 = \{g_{ij} \cdot g_{ik} \cdot g_{ik}^{-1} = 1 \mid \sigma_{\{a_i,a_j,a_k\}} \in K \setminus L\}$.* ***Група симплицијалног комплекса*** *K, у ознаци $G(K)$ је група одређена репрезентацијом*

$$G(K) = \langle G \mid R_1 \cup R_2 \rangle.$$

Како генератори групе $G(K)$ се одговарају 1-симплексима комплекса K, а релације формирају помоћу 2-симплекса, закључујемо да група симплицијалног комплекса K зависи само од $2-$скелета $K^2 \subseteq K$. Како се релације групе $G(K)$ форморају за све 2-симплексе који се не налазе у контрактибилном простору $|L|$, да би презентација групе имала што мање релација, у интересу нам је да одаберемо највећи, у смислу инклузије, контрактибилан потполиедар полиедра $|L|$.

Пример 6.2. *Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$. Одредити групу симплицијалног комплекса полиедралне сфере $\mathbb{S}^n = K(\sigma^n) \setminus \{\sigma^n\}$.*

Решење. Нека је $A = \{a_0, a_1 \ldots, a_{n+1}\}$ и нека је $\mathbb{S}^n = K(\sigma_A) \setminus \{\sigma_A\}$. Уочимо симплекс $\sigma_{\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}}$. Како је $|\mathbb{S}^n| \approx S^n$, полиедар симплицијалног комплека $L = \mathbb{S}^n \setminus \{\sigma_{\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}}\}$ је због Теореме 5.3 хомеоморфан простору $|\mathbb{S}^n| \setminus \dot{\sigma}_{\{a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\}}$ односно тополошком простору $S^n \setminus \operatorname{Int} D^n \approx D^n$ који је контрактибилан. Како сви 1−симплекси комплекса $\mathbb{S}^n$ припадају комплексу L, закључујемо да је $G(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{O}$. □

Као што видимо, група симплицијалног комплекса је значајно једноставнија за рачунање од ивичне групе. Међутим, испоставиће се да је група ивица била само један прелазни теоријски алат.

Теорема 6.4. (***Груӣа симӣлицијалноī комӣлекса и ивична īруӣа комӣлекса су изоморфне***) *Ако је $a_0 \in V(K)$ ӣеме симӣлицијалноī комӣлекса K чији је ӣолиедар ӣовезан, ӣада је $G(K) \cong \pi(K, a_0)$.* .

Доказ. Нека је L поткомплекс комплекса K такав да је $|L|$ контрактибилан и L садржи сва темена комплекса K.

За свако теме a_i комплекса K нека је α_i ивични пут у комплексу L који повезује темена a_0 и a_i (овакав пут постоји јер је контрактибилан простор путевима повезан па важи Теорема 6.2 и по претпоставци L садржи сва темена комплекса K). Нека је g_{ij} произвољан не-тривијалан генератор групе $G(K)$ који одговара симплексу $\sigma_{\{a_i,a_j\}} \in K$. Дефинишимо пресликавање

$$\varphi : G(K) \to \pi(K, a_0) \quad \text{са} \quad \varphi(g_{ij}) = [\alpha_i \cdot a_i a_j \cdot \alpha_j^{-1}].$$

При том, $\varphi(g_{ij})$ не зависи од избора ивичног пута α_i односно α_j јер, по Теореми 6.1, произвољни ивични путеви комплекса L који повезују иста темена су еквивалентни. Да би доказали да φ може да се прошири до хомоморфизма, испитајмо слике релација групе $G(K)$. Симплексу $\sigma_{\{a_i,a_j,a_k\}} \in K \setminus L$ одговара релација $g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ik}^{-1} = 1$ па је

$$\begin{aligned}
\varphi(g_{ij}) \cdot \varphi(g_{jk}) \cdot \varphi(g_{ik}^{-1}) &= [\alpha_i \cdot a_i a_j \cdot \alpha_j^{-1}] \cdot [\alpha_j \cdot a_j a_k \cdot \alpha_k^{-1}] \cdot [\alpha_k \cdot a_k a_i \cdot \alpha_i^{-1}] \\
&= [\alpha_i \cdot a_i a_j \cdot (\alpha_j^{-1} \cdot \alpha_j) \cdot a_j a_k \cdot (\alpha_k^{-1} \cdot \alpha_k) \cdot a_k a_i \cdot \alpha_i^{-1}] \\
&= [\alpha_i \cdot a_i a_j a_j a_j a_k a_k a_k a_i \cdot \alpha_i^{-1}] \\
&= [\alpha_i \cdot a_i a_j a_k a_i \cdot \alpha_i^{-1}].
\end{aligned}$$

Како су a_i, a_j, a_k темена 2-симплекса $\sigma_{\{a_i,a_j\}} \in K$, због својства $(e2)$ Дефиниције 6.2 добијамо да је

$$\begin{aligned}
\varphi(g_{ij}) \cdot \varphi(g_{jk}) \cdot \varphi(g_{ik}^{-1}) &= [\alpha_i \cdot a_i a_k a_i \cdot \alpha_i^{-1}] \\
&= [\alpha_i \cdot a_i a_i \cdot \alpha_i^{-1}] \\
&= [\alpha_i \cdot a_i \cdot \alpha_i^{-1}] \\
&= [\alpha_i \cdot \alpha_i^{-1}] \\
&= [a_0] = 1.
\end{aligned}$$

Дакле, φ чува релације па може да се прошири до хомоморфизма.

Дефинишимо сада хомоморфизам $\psi : \pi(K, a_0) \to G(K)$. Нека је за произвољно $[\alpha] = [a_0 a_1 \ldots a_k a_0] \in \pi(K, a_0)$

$$\psi([\alpha]) = h_{01} \cdot h_{12} \cdot \ldots \cdot h_{k0} \quad \text{где је} \quad h_{ij} = \begin{cases} g_{ij}, & i < j, \\ g_{ij}^{-1}, & j < i, \\ 1, & i = j \text{ или } \sigma_{\{a_i,a_j\}} \in L. \end{cases}$$

Покажимо да је ψ добро дефинисано, тј. да из $\alpha \sim \beta$ следи $\psi([\alpha]) = \psi([\beta])$ за произвољне ивичне петље у темену a_0 комплекса K. Довољно је да проверимо елементарне еквиваленције.

Нека је $\alpha \simeq \beta$. Ако је $\alpha = a_0 \ldots a_i \ldots a_0$ и $\beta = a_0 \ldots a_i a_i \ldots a_0$ тада је

$$\begin{aligned}\psi([\alpha]) &= h_{01} \cdot \ldots \cdot h_{i-1i} \cdot h_{ii} \cdot h_{ii+1} \cdot \ldots \cdot h_{k0} \\ &= h_{01} \cdot \ldots \cdot h_{i-1i} \cdot 1 \cdot h_{ii+1} \cdot \ldots \cdot h_{k0} \\ &= h_{01} \cdot \ldots \cdot h_{i-1i} \cdot h_{ii+1} \cdot \ldots \cdot h_{k0} \\ &= \psi([\beta]).\end{aligned}$$

Ако је $\alpha = a_0 \ldots a_i a_j a_k \ldots a_0$ и $\beta = a_0 \ldots a_i a_k \ldots a_0$ и 2-симплекс σ_{a_i,a_j,a_k} припада комплексу K, у групи $G(K)$ важи да је $h_{ij} \cdot h_{jk} = h_{ik}$. Отуда,

$$\begin{aligned}\psi([\alpha]) &= h_{01} \cdot \ldots \cdot h_{ij} \cdot h_{jk} \cdot \ldots \cdot h_{k0} \\ &= h_{01} \cdot \ldots \cdot h_{ik} \cdot \ldots \cdot h_{k0} \\ &= \psi([\alpha']).\end{aligned}$$

Сада, из $\alpha \simeq \beta$ следи $\psi([\alpha]) = \psi([\beta])$ па, ако је $\alpha \simeq \alpha_1 \simeq \cdots \simeq \alpha_n \simeq \beta$ низ елементарних еквиваленција који обезбеђује релацију $\alpha \sim \beta$, тада је $\psi([\alpha]) = \psi([\alpha_1]) = \cdots = \psi([\alpha_n]) = \psi([\beta])$ а је $\psi([\alpha]) = \psi([\beta])$.

Анализирајмо композиције $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$. Ако је $a_0 a_1 \ldots a_n a_0$ произвољна ивична петља комплекса K, тада је

$$\begin{aligned}\varphi \circ \psi([a_0 a_1 \ldots a_n a_0]) &= \varphi(h_{01} \cdot h_{12} \cdot \ldots \cdot h_{n0}) \\ &= \varphi(h_{01}) \cdot \varphi(h_{12}) \cdot \ldots \cdot \varphi(h_{n0}) \\ &= [\alpha_0 \cdot a_0 a_1 \cdot \alpha_1^{-1}] \cdot [\alpha_1 \cdot a_1 a_2 \cdot \alpha_2^{-1}] \cdot \ldots \cdot [\alpha_n \cdot a_n a_0 \cdot \alpha_0^{-1}] \\ &= [\alpha_0 \cdot a_0 a_1 \cdot \alpha_1^{-1} \cdot \alpha_1 \cdot a_1 a_2 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \ldots \cdot \alpha_n \cdot a_n a_0 \cdot \alpha_0^{-1}] \\ &= [\alpha_0 \cdot a_0 a_1 \ldots a_n a_0 \cdot \alpha_0^{-1}] \\ &= [a_0 a_1 \ldots a_n a_0].\end{aligned}$$

Последња једнакост важи зато што α_0 а самим тим α_0^{-1} може да буде константан ивични пут $\alpha_0 = a_0$.

Даље, за произвољан генератор g_{ij} групе $G(K)$, важи

$$\psi \circ \varphi(g_{ij}) = \psi([\alpha \cdot a_i a_j \cdot \alpha_j^{-1}]) = 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot h_{ij} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot = h_{ij} = g_{ij}$$

зато што су α_i и α_j ивични путеви комплекса L а по конструкцији пресликавања ψ сви њихови сегменти се сликају у једични елемент.

Отуда, $\varphi \circ \psi = \mathbb{1}_{\pi(K,a_0)}$ и $\psi \circ \varphi = \mathbb{1}_{G(K)}$ што имплицира да су оба хомоморфизма изоморфизми. □

Дакле, група симплицијалног комплекса је изоморфна ивичној групи а самим тим и фундаменталној групи његовог полиедра. Како се из структуре симплицијалног комплекса одмах добија репрезентација фундаменталне групе (штавише, метода може да се испрограмира на већини програмских језика), јасно је да је група симплицијалног комплекса значајно једноставнија за израчунавање. Једини проблем је препознавање изоморфних репрезентација група а то је строго алгебарски проблем.

6.3 Фундаментална група симплицијалног комплекса

У овом одељку ћемо да израчунамо фундаменталне групе тополошких простора помоћу групе симплицијалног комплекса који су њихове триангулације. Навешћемо одређене теоријске погодности које нам представљена техника омогућава.

Пример 6.3. *Одредити фундаменталну групу клинасте суме* $\bigvee\limits_{i=1}^{n} S^1$.

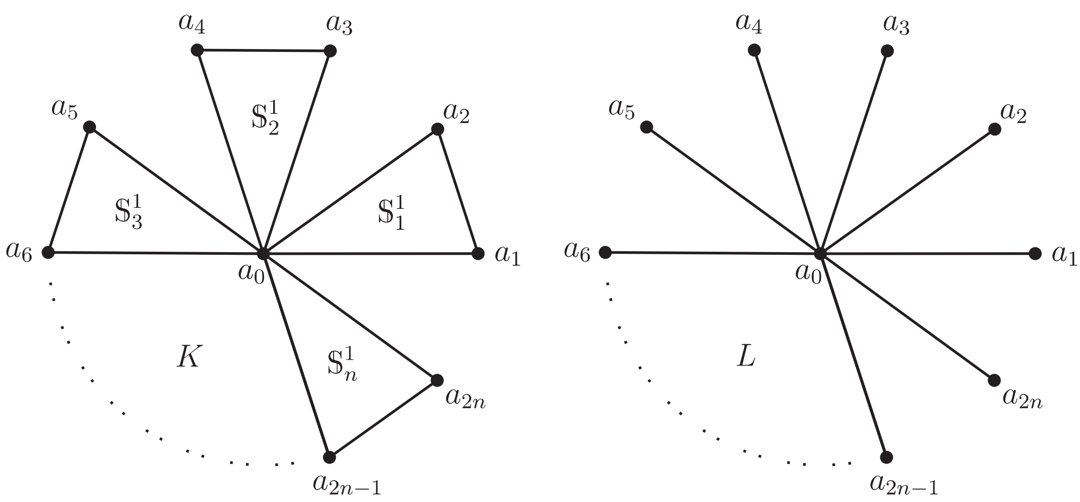

График 44: Триангулација K простора $\bigvee\limits_{i=1}^{n} S^1$ и колапсибилан поткомплекс L.

Решење. Нека је $a_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Уочимо скуп

$$A = \left\{ a_i = \left(\cos \frac{\pi i}{n}, \sin \frac{\pi i}{n} \right) \mid i = 1, \ldots, 2n, \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Тада, за произвољно $i = 1, \ldots, n$, скуп $A_i = \{a_0, a_{2i}, a_{2i+1}\}$ је афино независан што значи да је $\mathbb{S}^1_i = K(\sigma_{A_i}) \setminus \{\sigma_{A_i}\}$ триангулација кружнице. Како је $\mathbb{S}^1_i \cap \mathbb{S}^1_j = \{\sigma_{\{a_0\}}\}$, закључујемо да је

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{S}^1_i$$

триангулација клинасте суме $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$ приказана на Графику 44. Сада, симплицијални комплекс $L = \{\sigma_{\{a_i\}} \mid i = 0, 1, \ldots, 2n\} \cup \{\sigma_{\{a_0, a_i\}} \mid i = 1, \ldots, 2n\}$ је поткомплекс комплекса K који је колапсибилан ($\sigma_{\{a_i\}}$ је слободна страна симплекса $\sigma_{\{a_0,a_i\}}$ за све $i = 1, \ldots, 2n$) па је по Последици 6.1 и контрактибилан. Како комплекс K не садржи ни један $2-$симплекс, а $K \setminus L = \{\sigma_{\{1,2\}}, \sigma_{\{3,4\}}, \ldots, \sigma_{\{2n-1,2n\}}\}$, група симплицијалног комплекса K има репрезентацију

$$G(K) = \left\langle g_{12}, g_{34}, \ldots, g_{2n-1\;2n} \mid \emptyset \right\rangle \cong \mathbb{Z}^n.$$

Отуда, фундаментална група простора $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$ је $\mathbb{Z}^n$. □

Пример 6.4. *Фундаментална група сфере* S^n *је тривијална за* $n \geq 2$.

Заиста, у Примеру 6.2 смо доказали да за $n \geq 2$ важи $G(\mathbb{S}^n) = \mathbb{O}$ где је $\mathbb{S}^n$ полиедрална сфера. □

Група ивица нам омогућава да, у случају када тополошки протори имају триангулације, докажемо тврђења аналогна последицама Ван-Кампенове теореме.

Теорема 6.5. *Нека су* K_1 *и* K_2 *симплицијални комплекси чији су полиедри повезани. Тада, за фундаменталну групу клинасте суме* $|K_1| \vee |K_2|$ *важи*

$$\pi_1(|K_1| \vee |K_2|) \cong \pi_1(|K_1|) * \pi_1(|K_2|).$$

Доказ. Можемо да претпоставимо да су K_1 и K_2 симплицијални комплеки у истом Еуклидском простору $\mathbb{R}^d$ и да је $|K_1| \cap |K_2| = \emptyset$ јер транслацијом темена комплекса K_2 добијамо симплицијални комплекс који има хомеоморфан полиедар.

Докажимо да у простору $\mathbb{R}^d$ за полиедре $|K_1|$ и $|K_2|$ који се не секу важи

$$d\big(|K_1|, |K_2|\big) = \inf_{x \in |K_1|, y \in |K_2|} ||x - y|| = d\big(V(K_1), V(K_2)\big).$$

Како су полиедри компактни скупови, следи да је $d\big(|K_1|, |K_2|\big) = ||x_0 - y_0||$ за неке $x_0 \in |K_1|$, $y_0 \in |K_2|$. Тада, $x \in \sigma_A \in K_1$ и $y \in \sigma_B \in K_2$ што значи да је

$$d\big(|K_1|, |K_2|\big) = d(\sigma_A, \sigma_B\big)$$

Лако се доказује да за симплексе простора $\mathbb{R}^d$ важи $d(\sigma_A, \sigma_B\big) = d(A, B)$.

Нека је $d\big(|K_1|, |K_2|\big) = d(a_0, b_0)$ где $a_0 \in V(K_1)$ и $b_0 \in V(K_2)$. Тада, за симплекс $\sigma_{\{a_0,b_0\}}$ важи $\sigma_{\{a_0,b_0\}} \cap |K_1| = \{a_0\}$ и $\sigma_{\{a_0,b_0\}} \cap |K_2| = \{b_0\}$ што значи да можемо да дефинишемо симплицијалне комплексе

$$K_2' = K_2 \cup \{\sigma_{\{a_0,b_0\}}, \sigma_{\{a_0\}}\}, \quad K_{12} = K_1 \cup K_2 \cup \{\sigma_{\{a_0,b_0\}}\}.$$

Како се K_2' колапсира на K_2, по Леми 6.4 важи да је $|K_2'| \simeq |K_2|$ а како је $|K_2'| \cap |K_1| = \{a_0\}$ следи да је $|K_{12}| \simeq |K_1| \vee |K_2|$.

Нека су $L_1 \subseteq K_1, L_2 \subseteq K_2'$ поткомплекси такви да је $V(L_1) = V(K_1)$ и $V(L_2) = V(K_2')$ а њихови полиедри $|L_1|$ и $|L_2|$ су контрактибилни. Како је $|L_1| \cap |L_2| = |K_1| \cap |K_2'| = \{a_0\}$, закључујемо да је $|L_1| \cup |L_2| = |L_1 \cup L_2|$ контрактибилан. Нека је $L_{12} = L_1 \cup L_2$. Тада,

$$\begin{aligned}
G &= \{g_{ij} \mid \sigma_{\{a_i,a_j\}} \in K_{12}\} = G_1 \cup G_2 \text{ где је}\\
G_1 &= \{g_{ij} \mid \sigma_{\{a_i,a_j\}} \in K_1\},\\
G_2 &= \{g_{ij} \mid \sigma_{\{a_i,a_j\}} \in K_2'\};\\
R_1 &= \{g_{ij} = 1 \mid \sigma_{\{a_i,a_j\}} \in L_{12}\} = R_{11} \cup R_{12} \text{ где је}\\
R_{11} &= \{g_{ij} = 1 \mid \sigma_{\{a_i,a_j\}} \in L_1\},\\
R_{12} &= \{g_{ij} = 1 \mid \sigma_{\{a_i,a_j\}} \in L_2\};\\
R_2 &= \{g_{ij} \cdot g_{ik} \cdot g_{ik}^{-1} = 1 \mid \sigma_{\{a_i,a_j,a_k\}} \in K_{12} \setminus L_{12}\} = R_{21} \cup R_{22} \text{ где је}\\
R_{21} &= \{g_{ij} \cdot g_{ik} \cdot g_{ik}^{-1} = 1 \mid \sigma_{\{a_i,a_j,a_k\}} \in K_1 \setminus L_1\},\\
R_{22} &= \{g_{ij} \cdot g_{ik} \cdot g_{ik}^{-1} = 1 \mid \sigma_{\{a_i,a_j,a_k\}} \in K_2' \setminus L_2\}
\end{aligned}$$

што имплицира да за групу симплицијалног комплекса K_{12} важи

$$\begin{aligned}
G(K_{12}) &= \big\langle G_1 \cup G_2 \mid R_{11} \cup R_{12} \cup R_{21} \cup R_{22} \big\rangle\\
&= \big\langle G_1 \mid R_{11} \cup R_{21} \big\rangle * \big\langle G_2 \mid R_{12} \cup R_{22} \big\rangle = G(K_1) * G(K_2').
\end{aligned}$$

чиме је теорема доказана. □

Сада наводимо теорему за одређивање фундаменталне групе уније два полиедра.

Нека су L и M поткомплекси комплекса K такви да је $K = L \cup M$ и $N = L \cap M$ (приметимо да је N такође поткомплекс комплекса K). Нека су $f : |N| \to |L|$ и $g : |N| \to |M|$ одговарајућа инклузиона пресликавања.

Теорема 6.6. *Нека су $|L|, |M|$ и $|N|$ путевима повезани полиедри и a_0 неко теме комплекса N. Тада, фундаментална група $\pi_1(|K|, a_0)$ се добија од групе $\pi_1(|L|, a_0) * \pi_1(|M|, a_0)$ додавањем релација $(f_*(c)) \cdot (g_*(c))^{-1} = 1$ за сваки елемент c групе $\pi_1(|N|, a_0)$.*

Доказ. Нека је T_N максимално дрво комплекса N. Како је N поткомплекс комплекса L и поткомплекс комплекса M, сличним поступком као у доказу Теореме 6.3, T_N може да се прошири до максималног дрвета T_L комплекса L и максималног дрвета T_M комплекса M тако да је $T_L \cap N = T_M \cap N = T_N$. Сада, симплицијални комплекс $T_K = T_L \cup T_M$ представља дрво које садржи сва темена комплекса K.

Одредимо $\pi_1(|K|, a_0)$ односно групу симплицијалног комплекса $G(K)$. Група $G(L)$ је генерисана елементима g_{ij} који одговарају 1-симплексима фамилије $L \setminus T_L$ додавањем релација $g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ik}^{-1} = 1$ за сваки 2-симплекс из фамилије $L \setminus T_L$, а група $G(M)$ је генерисана елементима h_{ij} који одговарају 1-симплексима фамилије $M \setminus T_M$ додавањем релација $h_{ij} \cdot h_{jk} \cdot h_{ik}^{-1} = 1$ за сваки 2-симплекс фамилије $M \setminus T_M$.

Приметимо да су сви генеретори и релације група $G(L)$ и $G(M)$ генератори и релације групе $G(K)$ због презентације групе симплицијалног комплекса. Отуда, да би од слободног производа $G(L) * G(M)$ добили репрезентацију групе $G(K)$, довољно је да поистоветимо генераторе који одговарају $1-$симплексима пресека $L \cap M = N$ односно да додамо релације $f_*(c) = g_*(c)$ за сваки генератор c групе $G(N)$. $\square$

Пример 6.5. *Користећи групу симплицијалног комплекса, одредити фундаменталне групе:*

- *торуса;*
- *Клајнове боце;*
- *пројективне равни;*
- *лудачке капе.*

Решење. Одредимо фундаменталну групу пројективне равни. Уместо да одређујемо триангулацију пројективне равни у простору, довољно је да одредимо триангулацију диска чијом се идентификацијом добија пројективна раван. Водимо рачуна да се идентификацијом добија симплицијални комплекс. Нека су триангулација пројективне равни K заједно са колапсибилним поткомплексом L приказани на графику испод.

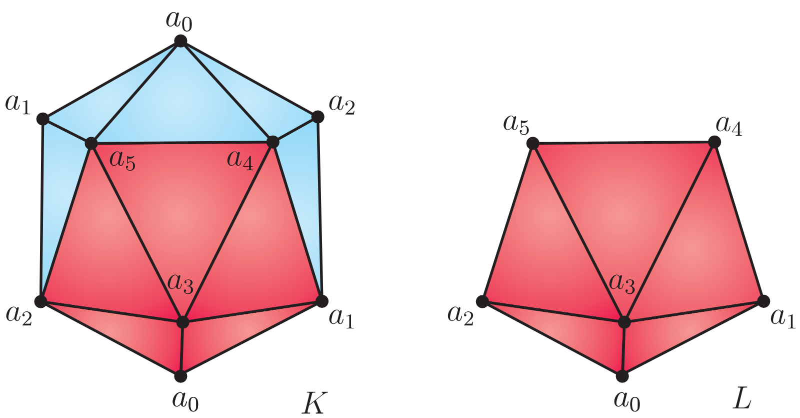

График 45: Триангулација пројективне равни.

Тада, група симплицијалног комплекса K има форму:

$$G(K) = \big\langle g_{01}, g_{02}, g_{04}, g_{05}, g_{12}, g_{15}, g_{24} \mid \\ g_{15} = g_{12}, g_{01}g_{15} = g_{05}, g_{05} = g_{04}, g_{02}g_{24} = g_{04}, g_{12}g_{24} = 1\big\rangle.$$

која се једноставним срећивањем своди на форму:

$$G(K) = \left\langle g_{12} \mid g_{12}^2 = 1 \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

$\square$