Lambda račun

Lamda račun

Jezik za izražavanje primena funkcija

- Definisanje (anonimnih) funkcija
- Primena funkcija

Vrlo formalno zapisivanje, u tesnoj vezi sa mnogim programskim jezicima

Lambda račun

Moderni računari ne mogu da izračunaju ništa više nego Tjurninova mašina – teorijski računar sa beskonačnom memorijom

- Brži su i postoje, ali mogućnosti su im iste

Tjuringove mašine nam omogućavaju da odredimo šta možemo da izračunamo, bez razmišljanja o samoj mašini i načinu računanja

Lambda račun je drugi način izražavanja izračunljivosti

Lambda račun $\xleftrightarrow{\textit{može da se izrazi preko}}$ Tjuringova mašina

Sintaksa

Izrazi u lambda računu su jedino:

- $E \rightarrow ID$
- $E \rightarrow \lambda\, ID\, .\; E$
- $E \rightarrow E\; E$
- $E \rightarrow (E)$

Primeri:

x

$\lambda\, x\, .\; x$

$x\; y$

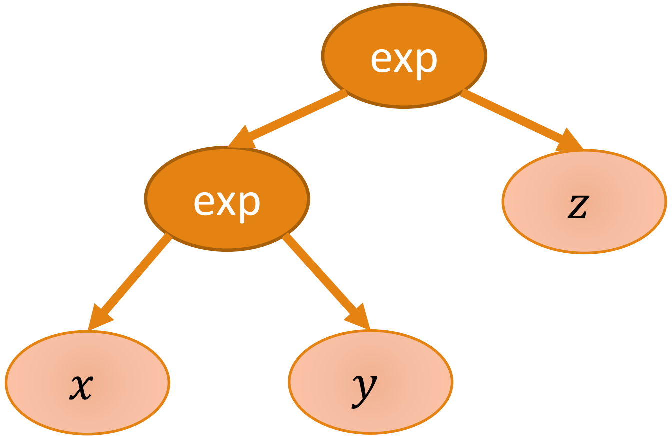
$\lambda\, y.\lambda\, x\, .\, y$

$\lambda\, x\, .\, y\, z$? $\lambda\, x\, .\,(y\, z)$ $(\lambda\, x\, .\, y)\; z$

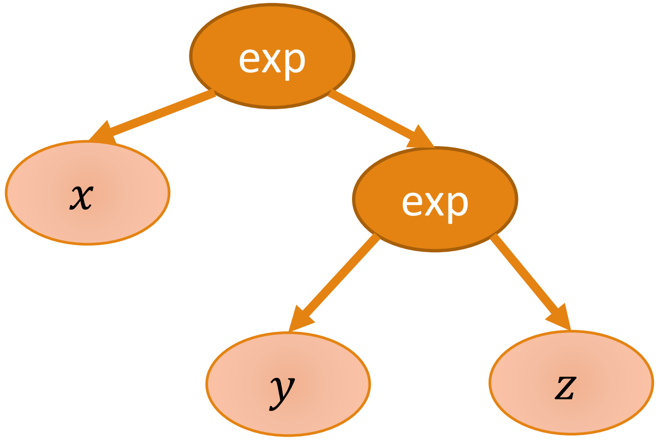
$\text{foo}\ \lambda\ \text{bar}\, .\, \left(\text{foo}\ (\text{bar baz})\right)$

Dvosmislena sintaksa

$x\ y\ z$



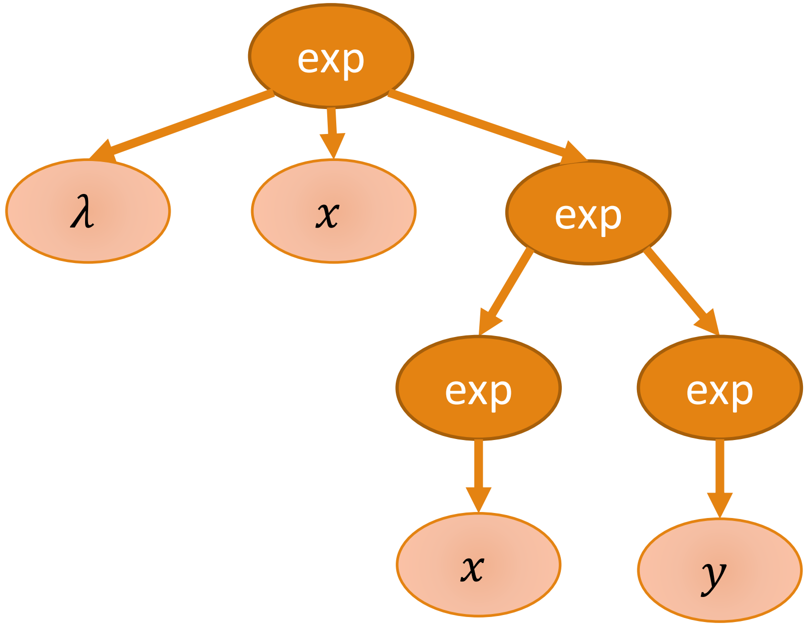
$(x\ y)\ z$



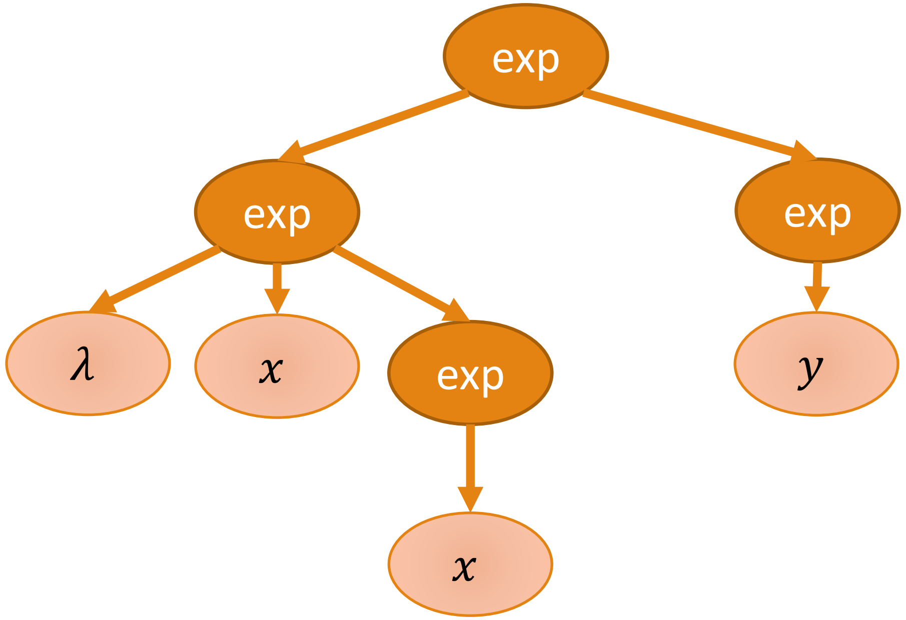
$x\ (y\ z)$

Dvosmislena sintaksa

$\lambda\, x\, .\, x\, y$



$\lambda\, x. (x\, y)$



$(\lambda\, x. x)\, y$

Uklanjanje dvosmislenosti

$E \rightarrow E\ E$ – levo asocijativno

- $x\ y\ z$ je

  $(x\ y)\ z$
- $w\ x\ y\ z$ je

  $\big((w\ x)\ y\big)\ z$

$E \rightarrow \lambda\ ID\ .\ E$ - proširuje se na desno koliko god je moguće

- $\lambda\ x\ .x\ y$ je

  $\lambda\ x\ .(x\ y)$
- $\lambda\ x\ .\lambda\ x\ .x$ je

  $\lambda\ x\ .(\lambda\ x\ .x)$
- $\lambda\ x\ .\lambda\ y\ .\ \lambda\ z\ .x\ y\ z$ je

  $\lambda\ x\ .\Big(\lambda\ y.\Big(\lambda\ z\ .\big((x\ y)\ z\big)\Big)\Big)$

Semantika

Svaki ID je promenljiva (varijabla)

$E \to \lambda\, ID\, .\, E$ je abstrakcija

- ID je promenljiva abstrakcije (metapromenljiva, atribut)
- E je telo abstrakcije

$\Rightarrow$ definisanje nove anonimne funkcije

$E \to E\ E$ je primena

- $E \to E_1\ E_2$ je poziv funkcije E_1 pri čemu je formalni parametar E_2

Primer

Neka je definisana funkcija + i konstanta 1

Kako definisati funkciju koja će parametar funkcije uvećati za 1?

$$\lambda\, x\, .+ x\; 1$$

Šta radi $(\lambda\, x\, .+ x\; 1)\; 2$? Kako?

- Redukcijom (primenom funkcije) se dobija + 2 1 i rezultat 3

Kako definisati funkciju koja sabira tri broja?

- $\lambda\, a\, .\lambda\, b\, .\lambda\, c\, .(+\; ((+\; a)\; b)\; c)$ - foo
- $foo\; 1\; 2\; 3$ → $\big(((foo\; 1)\; 2)\; 3\big)$
- $foo\; 1$ → $\big(\lambda\, a\, .\lambda\, b\, .\lambda\, c\, .(+\; ((+\; a)\; b)\; c)\big)\; 1$ → $\lambda\, b\, .\lambda\, c\, .(+\; ((+\; 1)\; b)\; c)$
- $(foo\; 1)\; 2$ → $\big(\lambda\, b\, .\lambda\, c\, .(+\; ((+\; 1)\; b)\; c)\big)\; 2$ → $\lambda\, c\, .(+\; ((+\; 1)\; 2)\; c)$
- $\big(((foo\; 1)\; 2)\; 3\big)$ → $\big(\lambda\, c\, .(+\; ((+\; 1)\; 2)\; c)\big)\; 3$ → $(+\; ((+\; 1)\; 2)\; 3)$ → $(+\; 3\; 3)$ → 6

Curryjev postupak

1924g, Haskell Brooks Curry – Bilo koja funkcija sa više argumenata može se definisati pomoću funkcije sa jednim argumentom

Slobodne promenljive

$(x\ y\ z)$ vs. $\lambda x\,.\,x$

$\lambda y\,.\,(\lambda x\,.\,x\ y)\ x$

Promenljiva x je slobodna u E ako

- $E = x$
- $E = \lambda y\,.\,E_1$, gde je y različito od x i pri tome je x slobodna promenljiva u E_1
- $E = E_1\ E_2$, gde je x slobodna u E_1 ili slobodna u E_2

Primer

Da li je x slobodna promenljiva u sledećim izrazima

$x\ \lambda x.x$ → $(x)\ (\lambda x.x)$

$(\lambda\, x\, .\, x\ y)\ x$

$\lambda\, x\, .\, y\ x$

Kombinatori

Izraz je kombinator ako nema ni jednu slobodnu promenljivu

$\lambda x . \lambda y . x y x$

$\lambda z . \lambda x . x y z$

Vezane promenljive

Promenljive koje nisu slobodne su vezane

Kojom abstrakcijom je promenljiva vezana?

- $\lambda\, x\, .\, \lambda\, x\, .\, x$

Ako je x slobodna promenljiva u E, tada je vezana sa $\lambda\, x$. u $\lambda\, x\, .\, E$

Ako je pojava x vezana konkretnim $\lambda\, x$. u E, tada je x istim $\lambda\, x$. vezana u $\lambda\, z\, .\, E$,

- Čak i ako je $z = x$
- Dodavanja novih „spoljnih“ apstrakcija ne menja čime je promenljiva vezana

Ako je pojava x vezana konkretnim $\lambda\, x$. u E_1, tada je x istim $\lambda\, x$. vezana u $E_1\ E_2$ i $E_2\ E_1$

- Dodavanje aplikacija ne menja čime je promenljiva vezana

```
int y;
fun(int y) {
    y = 5;
    …
}
```

Primer

$(\lambda\, x\, .\, x\, (\lambda\, y\, .\, x\, y\, z\, y)\, x)\, x\, y$

- $(\lambda\, \boldsymbol{x}\, .\, \boldsymbol{x}\, (\lambda\, y\, .\, \boldsymbol{x}\, y\, \underline{z}\, y)\, \boldsymbol{x})\, \underline{x}\, \underline{y}$

$(\lambda\, x\, .\, \lambda\, y\, .\, x\, y)\, (\lambda\, z\, .\, x\, z)$

- $(\lambda\, \boldsymbol{x}\, .\, \lambda\, y\, .\, \boldsymbol{x}\, y)\, (\lambda\, z\, .\, \underline{x}\, z)$

$(\lambda\, x\, .\, x\, \lambda\, x\, .\, z\, x)$

- $(\lambda\, \boldsymbol{x}\, .\, \boldsymbol{x}\, \lambda\, x\, .\, \underline{z}\, x)$

Ekvivalentnost funkcija

Da li su funkcije $foo(x, y) = x + y$ i $bar(w, z) = w + z$ ekvivalentne?

A $baz(x, y) = y + x$?

$\lambda\, y\, .\, y = \lambda\, x\, .\, x$?

$\lambda\, y\, .\; y\, x = \lambda\, x\, .\; x\, y$?

- $foo(a) = a + x$ i $bar(x) = x + a$
  - $x = 10 \quad a = -10 \quad foo(5)? \quad bar(5)?$
  - Nije poznat kontekst (opseg dostižnosti) slobodnih promenljivih
- $foo(a) = a + x$ i $bar(b) = b + x$
  - Figuriše ista slobodna promenljiva

$\lambda\, x\, .\, x = \lambda\, x\, .\, x$

α-ekvivalencija

Dve funkcije koje se razlikuju samo u imenima vezanih promenljivih su α-ekvivalentne

$E_1 =_\alpha E_2$

Promena imena promenljivih

- Find and replace?
- $\lambda x . x \lambda y . x y z$
  - Može li se x preimenovati u foo?
  - Može li se y preimenovati u bar?
  - Može li se y preimenovati u x?
  - Može li se x preimenovati u z?

Operator preimenovanja

$E\{y/x\}$

- $x\{y/x\} = y$
- $z\{y/x\} = z$, ako je $x \neq z$
- $(E_1\ E_2)\ \{y/x\} = (E_1\{y/x\})\ (E_2\{y/x\})$
- $(\lambda\, x\,.\, E)\{y/x\} = (\lambda\, y\,.\, E\ \{y/x\})$
- $(\lambda\, z\,.\, E)\{y/x\} = (\lambda\, z\,.\, E\ \{y/x\})$ ako je $x \neq z$

Operator preimenovanja

Primer

$\big((\lambda\, x\,.\, x\ (\lambda\, y\,.\, x\ y\ z\ y)\ x)\ x\ y\big)\ \{bar/x\}$

- $(\lambda\, x\,.\, x\ (\lambda\, y\,.\, x\ y\ z\ y)\ x)\ \{bar/x\}\ (x)\{bar/x\}\ (y)\ \{bar/x\}$
- $(\lambda\, x\,.\, x\ (\lambda\, y\,.\, x\ y\ z\ y)\ x)\ \{bar/x\}\ (x)\{bar/x\}\ y$
- $(\lambda\, x\,.\, x\ (\lambda\, y\,.\, x\ y\ z\ y)\ x)\ \{bar/x\}\ bar\ y$
- $(\lambda\, bar\,.\, (x\ (\lambda\, y\,.\, x\ y\ z\ y)\ x)\ \{bar/x\})\ bar\ y$
- $(\lambda\, bar\,.\, (bar\ (\lambda\, y\,.\, x\ y\ z\ y)\{bar/x\}bar)\ )\ bar\ y$
- $(\lambda\, bar\,.\, (bar\ (\lambda\, y\,.\, (x\ y\ z\ y)\{bar/x\})bar)\ )\ bar\ y$
- $\big(\lambda\, bar\,.\, (bar\ \big(\lambda\, y\,.\, (bar\ y\ z\ y)\big)bar)\ \big)\ bar\ y$

α-ekvivalencija

Za sve izraze E i promenljive y koje se ne pojavljuju u E

- $\lambda x\,.\,E =_{\alpha} \lambda y\,.\,(E\,\{y/x\})$

Substitucija

Substitucija je zamena **slobodnih** promenljivih lambda izrazom

$E[x \to N]$, gde su E i N lambda izrazi i x je ime

$(+\ x\ 1)\ [x\ \to 2]$?

- $(+\ 2\ 1)$

$(\lambda\, x\,.+\ x\ 1)[x \to 2]$

- $(\lambda\, x\,.+\ x\ 1)$

$(\lambda\, x\,.\,y\ x)\ [y \to \lambda\, z\,.\,x\ z]$

- $(\lambda\, x\,.\,(\lambda\, z\,.\,x\ z)\ x)$?
- $(\lambda\, w\,.\,(\lambda\, z\,.\,x\ z)\ w)$

Operator substitucije

$E[x \rightarrow N]$

- $x[x \rightarrow N] = N$
- $y[x \rightarrow N] = y, x \neq y$
- $(E_1\ E_2)[x \rightarrow N] = (E_1[x \rightarrow N])\ (E_2[x \rightarrow N])$
- $(\lambda\, x\, .\, E)[x \rightarrow N] = (\lambda\, x\, .\, E)$
- $(\lambda\, y\, .\, E)[x \rightarrow N] = (\lambda\, y\, .\, E\ [x \rightarrow N])$ ako je $x \neq y$ i y nije slobodna varijabla u N
- $(\lambda\, y\, .\, E)[x \rightarrow N] = (\lambda\, y'.\, E\{y'/y\}\ [x \rightarrow N])$ ako je $x \neq y$ i y je slobodna varijabla u N, a y' novo ime promenljive

Primeri

$(\lambda\, x\, .\, x)\ [x \rightarrow foo]$

- $(\lambda\, x\, .\, x)$

$(+\ 1\ x)[x \rightarrow 2]$

- $(+\ [x \rightarrow 2]\ 1\ [x \rightarrow 2]\ x\ [x \rightarrow 2])$
- $(+\ 1\ 2)$

$(\lambda\, x\, .\, y\ x)\ [y \rightarrow \lambda\, z\, .\, x\ z]$

- $(\lambda\, x\, .\, y\ x)\ \{w/x\}\ \ [y \rightarrow \lambda\, z\, .\, x\ z]$
- $(\lambda\, w\, .\, y\ w)\ [y \rightarrow \lambda\, z\, .\, x\ z]$
- $(\lambda\, w\, .\, (\lambda\, z\, .\, x\ z)\ w)$

Primer

$\left(x\ (\lambda\, y\, .\, x\ y)\right)\ [x \rightarrow y\ z]$

- $(x\ [x \rightarrow y\ z]\ (\lambda\, y\, .\, x\ y)\ [x \rightarrow y\ z])$
- $\left((y\ z)\ (\lambda\, y\, .\, x\ y)\ [x \rightarrow y\ z]\right)$
- $((y\ z)\ \ (\lambda\, y\, .\, x\ y)\ \ \{q/y\}\ [x \rightarrow y\ z])$
- $\left((y\ z)\ (\lambda\, q\, .\, x\ q)\ [x \rightarrow y\ z]\right)$
- $\left((y\ z)\ (\lambda\, q\, .\, (y\ z)\ q)\ \right)$

Izračunavanje

Izračunavanje je niz sekvenci koje se nazivaju β-redukcije

β-redukcija se može primeniti samo na β-reduks (izraz u formi aplikacije)

- $(\lambda\, x\, .\, E)\ N$

β-redukcija se definiše sa:

- $(\lambda\, x\, .\, E)\ N$ se β-redukuje na $E\ [x \to N]$

β normalna forma je izraz u kome nema reduksa

Puna β-redukcija je redukovanje svih reduksa, bez obzira gde se nalaze

Primeri

$(\lambda\, x\, .\, x)\; y$

- $x\; [x \;\to y]$
- y

$\big(\lambda\, x\, .\, x\; (\lambda\, x\, .\, x)\big)\; (u\; r)$

- $\big(x\; (\lambda\, x\, .\, x)\big)\; [x \to (u\; r)]$
- $(u\; r)\; (\lambda\, x\, .\, x)$

$(\lambda\, x\, .\, y)\; \big((\lambda\, z\, .\, z\; z)\; (\lambda\, w\, .\, w)\big)$

- $(\lambda\, x\, .\, y)\; (z\; z)\; [z \to (\lambda\, w\, .\, w)]$
- $(\lambda\, x\, .\, y)\; \big((\lambda\, w\, .\, w)\; (\lambda\, w\, .\, w)\big)$
- $(\lambda\, x\, .\, y)\; (w)\; [w \to (\lambda\, w\, .\, w)]$
- $(\lambda\, x\, .\, y)\; (\lambda\, w\, .\, w)$
- $y\; [x \to (\lambda\, w\, .\, w)]$
- y

Ili

- $y\; [x \to \big((\lambda\, z\, .\, z\; z)\; (\lambda\, w\, .\, w)\big)]$
- y

Primeri

$(\lambda\, x\, .\, x\; x)\; (\lambda\, x\, .\, x\; x)$

- $(x\; x)\; [x \rightarrow (\lambda\, x\, .\, x\; x)]$
- $(\lambda\, x\, .\, x\; x)\; (\lambda\, x\, .\, x\; x)$
- $(x\; x)\; [x \rightarrow (\lambda\, x\, .\, x\; x)]$
- $(\lambda\, x\, .\, x\; x)\; (\lambda\, x\, .\, x\; x)$
- …