

Глава 1

Диференцијални рачун

1.1 Основне теореме диференцијалног рачуна

Нека је дата функција $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ и $x_0 \in E$.

За $f(x_0)$ се каже да је локални екстремум функције f ако постоји $\delta > 0$ тако да је $x_0 + \Delta x \in E$ и $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ сталног знака за свако $\Delta x \in (-\delta, \delta)$.

Теорема 1.1. (Фермаова теорема) *Нека функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ има у тачки $x_0 \in (a, b)$ локални екстремум. Ако постоји $f'(x_0)$, тада је $f'(x_0) = 0$.*

Доказ. Пошто функција f у тачки $x_0 \in (a, b)$ има локални екстремум, тада је $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ сталног знака. Не умањујући општост претпоставимо да је овај израз ненегативан. Даље је

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

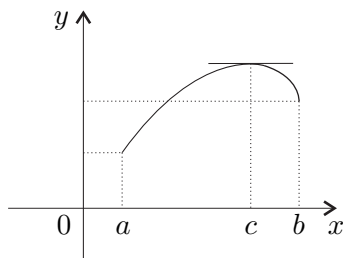
док је

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Пошто постоји извод $f'(x_0)$, закључујемо да је $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$, а то је могуће једино ако је $f'(x_0) = 0$.

□

Геометријска интерпретација Фермаове теореме: ако крива $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, у тачки $x_0 \in (a, b)$ има локални екстремум и постоји



Слика 1.1.

тангента на криву у тој тачки, тада је та тангента паралелна са x -осом (видети слику 1.1).

Теорема 1.2. (Ролова теорема) *Ако је функција f непрекидна на одсечку $[a, b]$, диференцијабилна на интервалу (a, b) и $f(a) = f(b)$, тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f'(c) = 0$.*

Доказ. Пошто је функција f непрекидна на одсечку $[a, b]$, на основу Вајерштрасове теореме, функција f достиже на одсечку $[a, b]$ своју највећу вредност M и своју најмању вредност m , тј. постоје $x_1, x_2 \in [a, b]$ тако да је $f(x_1) = \min_{x \in [a, b]} f(x) = m$ и $f(x_2) = \max_{x \in [a, b]} f(x) = M$.

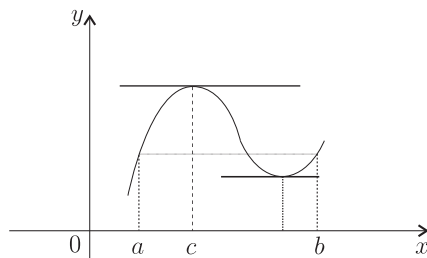
1° Ако је $M = m$, тада је функција f константна на одсечку $[a, b]$ и $f(x) = f(a)$, $x \in [a, b]$. Самим тим је $f'(x) = 0$ за свако $x \in (a, b)$, па је c произвољна тачка из интервала (a, b) .

2° Ако је $M \neq m$, тада је $x_1 \neq x_2$, а због услова $f(a) = f(b)$, бар једна од тачака x_1, x_2 се налази у отвореном интервалу (a, b) . Нека је, на пример, то тачка x_1 . Извод у тачки x_1 постоји, па на основу Фермаове теореме, следи да је $f'(x_1) = 0$. Дакле, $c = x_1$. $\square$

Роловом теоремом се тврди да под одговарајућим условима постоји бар једна тачка $c \in (a, b)$ таква да је тангента криве $y = f(x)$ у тачки $(c, f(c))$ паралелна са x -осом (видети слику 1.2).

Задаци

1.1. Ако је $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 6)$, показати да једначина $f'(x) = 0$ има два реална корена и одредити интервале у којима се они налазе.



Слика 1.2.

1.2. Ако је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција, показати да функција $F(x) = (2x - 1)f(x) + x(x - 1)f'(x)$ има бар једну нулу у интервалу $(0, 1)$.

1.3. Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < a < b$. Ако је функција f непрекидна на $[a, b]$, диференцијабилна на (a, b) и $af(b) = bf(a)$, показати:

$$1^\circ \quad (\exists c \in (a, b)) \quad f'(c) = \frac{f(c)}{c},$$

$$2^\circ \quad (\exists d \in (a, b)) \quad f'(d) = \frac{f(d)}{a + b - d}.$$

1.4. Ако је реална функција f дефинисана и диференцијабилна на скупу $\mathbb{R}$ и $f'(x) \neq 1$, за свако $x \in \mathbb{R}$, показати да функција f има највише једну фиксну тачку. (За тачку $x_0 \in \mathbb{R}$ кажемо да је фиксна тачка функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ако је $f(x_0) = x_0$.)

1.5. Показати да за сваку диференцијабилну функцију $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која има бар једну нулу постоји $c \in \mathbb{R}$ тако да је $cf'(c) + f(c) = 0$.

1.6. Показати да за сваки низ реалних бројева $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ једначина

$$a_n \cos nx + a_{n-1} \cos(n-1)x + \dots + a_1 \cos x = 0$$

има бар једно решење у интервалу $(0, \pi)$.

1.7. Ако низ $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ задовољава услов

$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0,$$

показати да једначина $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ има бар један реалан корен између бројева 0 и 1.

1.8. Ако је непрекидна функција $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна на $(0, +\infty)$ и $f(0) = 1$, $|f(x)| \leq e^{-x}$, $x \geq 0$, показати да постоји $c > 0$ тако да је $f'(c) = -e^{-c}$.

1.9. Нека је функција f дефинисана на $\mathbb{R}$ и нека

1° има непрекидан извод реда $n - 1$ на $[x_1, x_2]$,

2° има извод n -тог реда на (x_1, x_n) ,

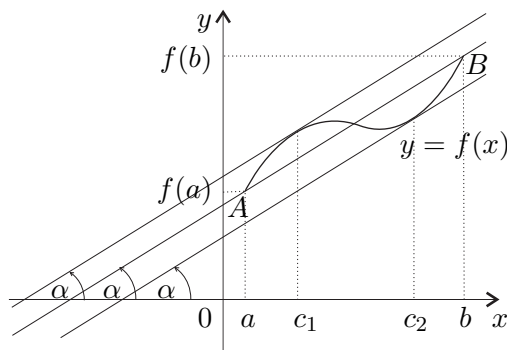
3° $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$,

при чему је $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Показати да постоји $c \in (x_0, x_n)$ тако да је $f^{(n)}(c) = 0$.

Теорема 1.3. (Лагранжова теорема) *Ако је функција f непрекидна на одсечку $[a, b]$ и диференцијабилна на интервалу (a, b) , тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$, тј.*

$$(1.1) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Геометријско тумачење Лагранжове теореме: количник на левој страни једнакости (1.1) једнак је тангенсу угла α који сечица AB криве $y = f(x)$ заклапа са x -осом, што значи да постоји бар једна тачка $c \in (a, b)$ таква да је тангента криве $y = f(x)$ у тачки $(c, f(c))$ паралелна сечици AB (видети слику 1.3).



Слика 1.3.

Последица 1.1. *Ако за функцију $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, важи да је $f'(x) = 0$ за свако $x \in (a, b)$, тада је f константна функција на (a, b) .*

Последица 1.2. Ако је $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$) за свако $x \in (a, b)$, тада је f растућа (не опадајућа) функција на (a, b) . Ако је $f'(x) < 0$ ($f'(x) \leq 0$) за свако $x \in (a, b)$, тада је f опадајућа (не растућа) функција на (a, b) .

Последица 1.3. Нека је функција f непрекидна на одсечку $[a, b]$ и диференцијабилна на интервалу (a, b) . Ако постоји коначна или бесконачна гранична вредност $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$, онда постоји и $f'_+(a)$ и важи једнакост

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x).$$

Слично, ако постоји коначна или бесконачна гранична вредност $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$, онда постоји и $f'_-(b)$ и важи једнакост $f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$.

Последица 1.4. Ако функција f има извод (коначан или бесконачан) у свакој тачки интервала (a, b) , онда f' може имати само прекиде друге врсте.

Задаци

1.10. У којој је тачки тангента криве $y = 4 - x^2$ паралелна тетиви AB где је $A(-2, 0)$ и $B(1, 3)$?

1.11. Доказати неједнакости:

$$1^\circ \quad |\sin a - \sin b| \leq |a - b|,$$

$$2^\circ \quad \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \quad 0 < b < a,$$

$$3^\circ \quad pb^{p-1}(a-b) < a^p - b^p < pa^{p-1}(a-b), \quad 0 < b < a, \quad p > 1,$$

$$4^\circ \quad qa^{q-1}(a-b) < a^q - b^q < qb^{q-1}(a-b), \quad 0 < b < a, \quad q < 1.$$

1.12. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Ако је f непрекидна на $[0, 1]$ и диференцијабилна на $(0, 1)$, показати да постоји $c \in (a, b)$ тако да је

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}(f'(c) + f'(1-c)).$$

1.13. Ако је функција f дефинисана и диференцијабилна за свако $x > 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, показати да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$.

1.14. Ако функција има у коначном или бесконачном интервалу (a, b) ограничен извод, показати да је f равномерно непрекидна на (a, b) .

1.15. Испитати равномерну непрекидност функција:

$$1^\circ \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ на } \mathbb{R},$$

$$2^\circ \quad f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ на } \mathbb{R},$$

$$3^\circ \quad f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in [0, 1), \text{ на интервалу } (0, +\infty).$$

1.16. 1° Ако је $f'(x) = 0$ за свако $x \in (a, b)$, показати да је f константна функција на (a, b) .

2° Ако је $f^{(n+1)}(x) = 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, показати да је тада f полином степена мањег или једнаког n .

1.17. Показати да је:

$$1^\circ \quad 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x, \quad |x| > 1,$$

$$2^\circ \quad \operatorname{arctg} x = c + \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

1.18. Одредити све реалне функције које задовољавају услов да је за свако $x, y \in \mathbb{R}$ испуњено $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$.

1.19. Ако је функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна на $[a, b]$, диференцијабилна на (a, b) , $f(a) = a$ и $f(b) = b$, показати да постоје бројеви s, t такви да је $a < s < t < b$ и $\frac{1}{f'(s)} + \frac{1}{f'(t)} = 2$.

Теорема 1.4. (Кошијева теорема) *Ако су функције f и g непрекидне на одсечку $[a, b]$, диференцијабилне на интервалу (a, b) и ако је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$, тада постоји тачка $c \in (a, b)$ тако да је*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказ. Посматрајмо функцију $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дату са

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Ова функција задовољава све услове Ролове теореме, па постоји тачка $c \in (a, b)$ тако да је $F'(c) = 0$, тј. $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}g'(c) = 0$. Како је $g'(c) \neq 0$, добијамо тражену једнакост. $\square$

Задаци

1.20. Ако је f диференцијабилна на $[a, b]$, $ab > 0$, показати да постоји $c \in (a, b)$ да је $\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c)$.

1.21. Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке a и нека постоји $f''(a)$. Показати да је $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a)$.

1.22. Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ако је $f \in C^2[a, b]$ и $f'(a) = f'(b) = 0$, показати да постоји $c \in (a, b)$ да је $|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$.

1.2 Лопиталова правила

Теорема 1.5. Нека функције $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, задовољавају следеће услове:

1° диференцијабилне су на (a, b) ,

2° $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$, $\left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty \right)$,

3° $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$.

Ако постоји коначна или бесконачна гранична вредност $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

тада постоји и $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ и важи

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказаћемо наведену теорему за неодређеност облика $\frac{0}{0}$ и $a > -\infty$. *Доказ.* Пошто је $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$, можемо дефини-

сати функције $\tilde{f}, \tilde{g} : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \\ 0, & x = a \end{cases}, \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (a, b) \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Функције $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ задовољавају услове Кошијеве теореме на сваком сегменту $[a, x]$, $a < x < b$. Дакле, на сваком интервалу (a, x) , постоји $c = c(x)$ да је

$$\frac{\tilde{f}'(c)}{\tilde{g}'(c)} = \frac{\tilde{f}(b) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(b) - \tilde{g}(a)},$$

што се своди (због дефиниције функција $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$) на $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Када $x \rightarrow a^+$, тада $c = c(x) \rightarrow a^+$. По претпоставци постоји $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, па постоји и гранична вредност $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ и једнаке су.

Закључујемо да важи $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

□

Пример 1.2.1.

$$1^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{3/2}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{2}x^{1/2}}{\frac{1}{1+x}} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}(1+x) = 0.$$

$$2^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}.$$

$$3^\circ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sin \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2}}{\cos \frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 1.2.2.

$$1^\circ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

$$2^\circ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Пример 1.2.3.

$$1^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

$$3^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

Пример 1.2.4. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2)^{\frac{1}{1+x-e^x}}$.

Ако је $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{1+x-e^x}}$, онда је $\ln y = \frac{\ln(1 - x^2)}{1 + x - e^x}$. Применом Лопиталовог правила добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{1 + x - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{1 - e^x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1 - e^x)(1 - x^2)} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - x^2} = 2. \end{aligned}$$

Добијамо да је $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2)^{\frac{1}{1+x-e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln y} = e^2$.

Задаци

1.23. Применом Лопиталовог правила одредити следеће граничне вредности.

$$1^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}; \quad 2^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3};$$

$$3^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - \cos ax}{e^{bx} - \cos bx}; \quad 4^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}; \quad 5^\circ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1);$$

$$6^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right); \quad 7^\circ \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right); \quad 8^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3};$$

$$9^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x; \quad 10^\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos ax)^{1/x^2}; \quad 11^\circ \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

Задаци за самосталан рад

1.24. Ако је функција f непрекидна на $[a, b]$, диференцијабилна на (a, b) и ако је $f(a) = f(b) = 0$, тада за свако $\lambda \in \mathbb{R}$ постоји $c \in (a, b)$ тако да је $f'(c) = \lambda f(c)$.

Упуцтво: Посматрати функцију $F(x) = e^{-\lambda x} f(x)$ и проверити услове Ролове теореме.

1.25. Нека су функције f и g непрекидне на $[a, b]$, диференцијабилне на (a, b) и различите од константне функције на (a, b) . Ако је $f + g \neq 0$ на (a, b) и $f'g - fg' = 0$ на (a, b) , тада је $\frac{f}{g}$ константна функција на (a, b) . Доказати.

Упуцтво: Посматрати функцију $F(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)}$ и искористити последицу 1.1 Лагранжове теореме.

1.26. Доказати да ако је функција f непрекидна на $[0, \pi]$ и диференцијабилна на $(0, \pi)$, тада је $f'(c) - f^2(c) < 1$, за неко $c \in (0, \pi)$.

Упуцтво: Посматрати функцију $F(x) = \arctg f(x)$ и искористити Лагранжову теорему.

1.27. Ако је функција f непрекидна на $[0, \infty)$, диференцијабилна на $(0, \infty)$, $f(0) = 0$ и f' расте на $(0, \infty)$, тада је функција $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ такође растућа на $(0, \infty)$. Доказати.

1.28. Ако је функција f непрекидна на $[a, b]$, диференцијабилна на (a, b) , и $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$, доказати да постоји $c \in (a, b)$ тако да је $f'(c) \cdot f(c) = c$.

Упуцтво: Посматрати функцију $F(x) = f^2(x) - x^2$ и проверити услове Ролове теореме.

1.29. Нека функција f задовољава следеће услове:

1° f' је непрекидна на $[a, b]$,

2° f' је диференцијабилна на (a, b) ,

3° $f(a) = f'(a) = 0$, $f(b) = 0$.

Доказати да постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f''(c) = 0$.

1.30. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ сирјективно пресликавање које је диференцијабилно у свакој тачки. Доказати да је $f(c) + cf'(c) = 0$, за неко $c \in \mathbb{R}$.

1.31. Нека су функције $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне на $[a, b]$, а диференцијабилне на (a, b) , тако да је $f(a) = f(b) = 0$, $g(a)g(b) \neq 0$ и $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$, $a < x < b$. Доказати да функција g има бар једну нулу у интервалу (a, b) .

Упуцтво: Користити функцију $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ и Ролову теорему.

1.32. Ако је функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна на $[a, b]$, диференцијабилна на (a, b) и $f(a) = f(b) = 0$, доказати да постоји $c \in (a, b)$ тако да је $2f(c) + f'(c) = 0$.

Упуцтво: Видети задатак 1.24.

1.33. Ако је f непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) , и при томе је $a \cdot b > 0$, показати да постоји $c \in (a, b)$ да је

$$af(b) - bf(a) = (a - b)f(c) - cf'(c).$$

1.34. Ако је f непрекидна на $[1, 2]$ и диференцијабилна на $(1, 2)$, доказати да постоји $c \in (1, 2)$ да је $f(2) - f(1) = \frac{1}{2}c^2 f'(c)$.

Упуцтво: Посматрати функције $F(x) = f(x)$ и $G(x) = \frac{1}{x}$ и искористити Кошијеву теорему.

1.35. Нека је функција f два пута непрекидно диференцијабилна на $[a, b]$ и има три различите нуле у $[a, b]$. Доказати да постоји $c \in (a, b)$ такво да је $f'(c) + f''(c) = 2f'(c)$.

Упуцтво: Посматрати функцију $F(x) = e^{-x}f(x)$ и искористити Ролову теорему.

1.36. Ако је функција $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна на $[0, 1]$, диференцијабилна на $(0, 1)$, доказати да постоји $c \in (0, 1)$ тако да је $f(1) - f(x) = xf'(x)$.

Упуцтво: Посматрати функцију $F(x) = xf(x)$ и искористити Ролову теорему.

1.37. Ако је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција таква да једначина $e^x f(x) = 1$ има бесконачно много решења, онда се између свака њена два решења налази решење једначине $e^x f'(x) = -1$.

Упуцтво: Посматрати функцију $F(x) = f(x) - e^{-x}$ и искористити Ролову теорему.

1.38. Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је f два пута диференцијабилна функција на $[a, b]$. Ако је $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, онда постоји $c \in (a, b)$ такво да је $f''(c) = f(c)$. Доказати.

Упуцтво: Посматрати функцију $F(x) = e^{-x}(f(x) + f'(x))$ и искористити Ролову теорему.

1.39. На интервалима $(-1, 1)$ и $(1, 2)$ одредити тачке у којима су тангенте графика функције $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$ паралелне x -оси.

1.40. Проверити да ли следеће функције задовољавају услове Ролове теореме на датим интервалима.

$$1^\circ \quad f(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{2} \text{ на интервалу } [-1, 1];$$

$$2^\circ \quad f(x) = |x - 1| \text{ на интервалу } [0, 2];$$

$$3^\circ \quad f(x) = \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{n} \sin(nx) \text{ на интервалу } [0, \pi];$$

$$4^\circ \quad f(x) = \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{n} \sin(nx) \text{ на интервалу } [0, \frac{\pi}{2}].$$

1.41. Ако полином $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, са реалним коефицијентима има само реалне корене, тада и изводи полинома P_n , тј. $P'_n, P''_n, \dots, P_n^{(n-1)}$, имају реалне корене. Доказати.

1.42. Ако су изводи функција F_1 и F_2 на неком интервалу једнаки, тј. важи $F_1(x) = F_2(x)$, $x_1, x_2 \in (a, b)$, доказати да је разлика те две функције једнака константи.

1.43. Ако је извод функције f ограничен на интервалу (a, b) , тада је f униформно непрекидна на (a, b) .

1.44. Испитати да ли се Кошијева теорема може применити на следеће функције:

$$1^\circ \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3, \quad x \in [-1, 1],$$

$$2^\circ \quad f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = x^3, \quad x \in [-1, 1].$$

1.45. Користећи Лагранжову теорему доказати следеће неједнакости:

$$1^\circ \quad |\sin ax - \sin ay| \leq |a| \cdot |x - y|, \quad a \neq 0, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$2^\circ \quad |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$3^\circ \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0,$$

$$4^\circ \quad e^x > 1 + x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$5^\circ \quad e^x > ex, \quad x > 1$$

$$6^\circ \quad \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} < \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0.$$