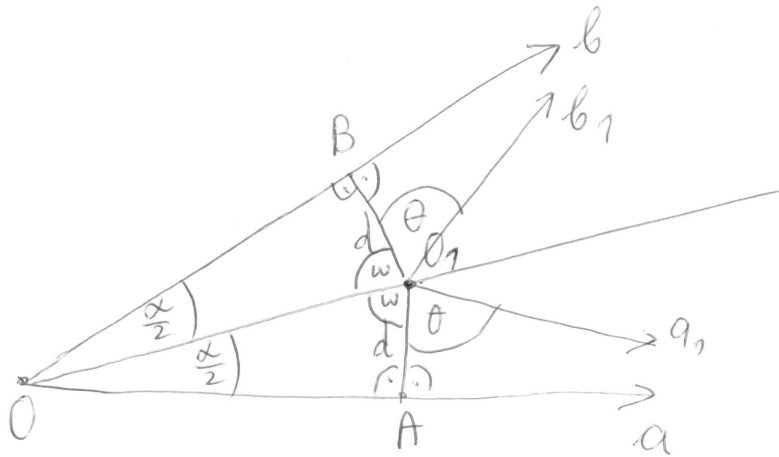


- ① У равни L^2 дати је ситиар $\angle = \angle AOB$ и тачка O_1 на линијару тог $\angle$. Из тачке O_1 повучене су паралеле $\overrightarrow{O_1A_1} \parallel \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{O_1B_1} \parallel \overrightarrow{OB}$. Доказати да је $\angle A_1O_1B_1 > \pi + \angle - 2\pi(d)$.

Доказ:



Нека су A и B поднанија нрмала из O_1 на OA и OB .

$$\text{Из } \triangle OO_1A \text{ имамо } w + \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2w < \pi - \alpha \dots (1)$$

Јако је $\pi(AO_1) = \pi(BO_1) \Leftrightarrow AO_1 = BO_1$, следи да је $\angle AO_1A_1 = \pi(AO_1) = \pi(BO_1) = \angle BO_1B_1 = \theta$. Углас $\angle A_1O_1B_1$ добијате на следећи начин:

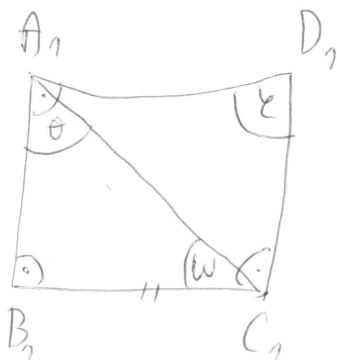
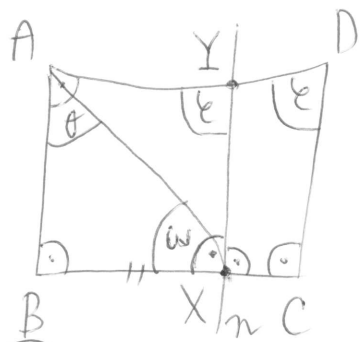
$$\angle A_1O_1B_1 = 2\pi - 2\theta - 2w = 2\pi - 2\pi(d) - 2w$$

Паша је зба релације (1), $-2w > \alpha - \pi$, последња једнакост постаје неједнакост, и

$$\begin{aligned} \angle A_1O_1B_1 &= 2\pi - 2\pi(d) - 2w > 2\pi - 2\pi(d) + \alpha - \pi = \\ &= \pi + \alpha - 2\pi(d). \quad \square \end{aligned}$$

② Докажити да су Ламбертови петобрајци ②
 погодарни ако је $AB = A_1B_1$ и $\angle D = \angle D_1$, где је
 $\angle D$ оштар угао.

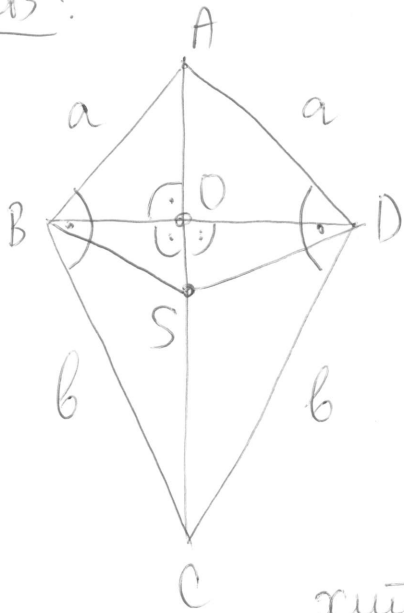
Доказ:



Претпоставимо да је $AB = A_1B_1$ и $\angle D = \angle D_1 = \epsilon$.
 Докажемо да је $BC = B_1C_1$. Претпоставимо, да је
 $BC > B_1C_1$. Тада постоји тачка $X \in BC$, таква да
 је $BX = B_1C_1$. Нека је n ортонала у тачки X на
 BC . Ортонала n не може да сече AB и CD (јер су збир
 угаоа у Δ два већа од π), па зато сече AD у некој
 тачки Y . Тада је $\triangle ABX \cong \triangle A_1B_1C_1$ (сус) $\Rightarrow AX \cong A_1C_1$,
 $\angle BAX = \angle B_1A_1C_1 = \theta$, $\angle BXA = \angle B_1C_1A_1 = \omega$. Сада је
 $\triangle AX Y \cong \triangle A_1C_1D_1$ (усу) $\Rightarrow \angle AYX = \angle A_1D_1C_1 = \epsilon$.
 Тада је у петобрајцу $XC D Y$ збир угаоа 2π , што је
 контрадикција. Закле, није $BC > B_1C_1$. Слично се показује
 да не важи $BC < B_1C_1$. Према томе, $BC = B_1C_1$.
 Сада је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ (сус), одакле је $AC = A_1C_1$.
 Коначно је $\triangle CAD \cong \triangle C_1A_1D_1$ (усу), па је $CD = C_1D_1$,
 и $AD = A_1D_1$. Према томе, $ABCD \cong A_1B_1C_1D_1$. $\square$

③ У хиперболичкој равни L^2 даи је ромб (3)
 $ABCD$ са гва права угла $\angle B = \angle D = 90^\circ$. Дказати
 га је $AC > BD$.

Доказ:

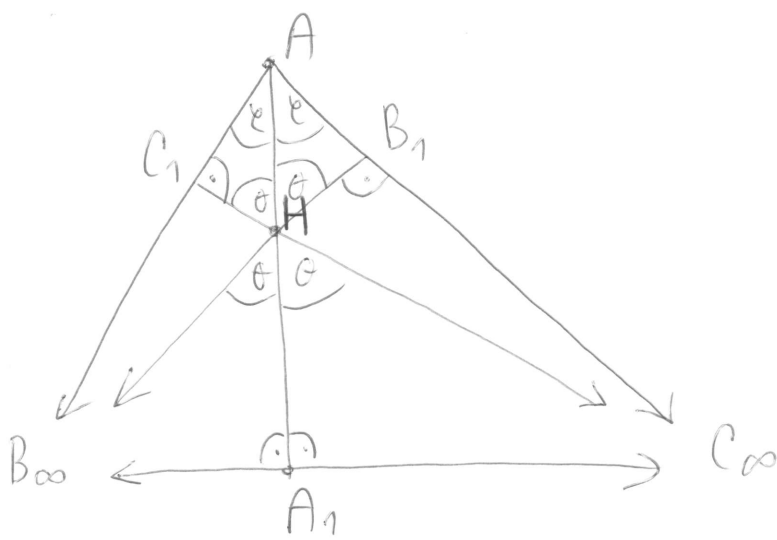


Лог ромба је $AB = AD$ и
 $BC = CD$. С другим га је
 $\triangle ABO \equiv \triangle ADO$ ($OA = OA$, $AB = AD$,
 $\angle ABO = \angle ADO$), следи га
 је $\angle AOB = \angle AOD = 90^\circ$. Нека је
 S средиште AC. По теорети,

хипотенузна теорема је
 мања од правоуглог хипотенузе. Онда је у
 $\triangle ABC$ испуњено $BS < \frac{AC}{2}$. Слично је у $\triangle ACD$,
 $DS < \frac{1}{2} AC$, па је $BS + DS < AC$. ^{Како се}
 Насином теореме хипотенуза мања је од правоуглог, ^{мања}
 га је $BS > BO$ и $DS > DO$, па је $BS + DS >$
 $> BO + DO = BD$. Сага је $BD < BS + DS < AC$. $\square$

④ Даи је $\triangle ABC$ са гва бесконачно далека тачка.
~~у тачки B и C~~ Ако је пресек висина AA_1 и BB_1
 тачка H, дказати га права HC садржи висину
 из тачке C.

Доказ: Дказати га је права HC нормална на
 страну AB .



Претпоставиме да је $HC_\infty \cap AB_\infty = C_1$.

Тако је $AA_1 = AA_1 \Rightarrow \angle(AA_1) = \angle A_1AB_\infty = \angle A_1AC_\infty = \varepsilon$.

Такође је $HA_1 = HA_1$, па је $\angle(HA_1) = \angle A_1HB_\infty = \angle A_1HC_\infty = \theta$. Сада је $\angle A_1HB_\infty = \theta = \angle AHB_1$ (као унакрсни углови) и $\angle A_1HC_\infty = \theta = \angle AHC_1$ (као унакрсни углови). Значи је $\triangle AHB_1 \cong_{\text{УСУ}} \triangle AHC_1$ (јер је $AH = AH$, $\angle HAC_1 = \angle HAB_1 = \varepsilon$, $\angle AHC_1 = \angle AHB_1 = \theta$), па је $\angle AB_1H = 90^\circ = \angle AC_1H$. Јако је $\angle AC_1H$ прав, и тачке H, C_1, C_∞ колинеарне, следи да је $C_\infty C_1$ висина из тачке C_∞ . $\square$