Linearna algebra 2

6. oktobar 2020.

Linearna algebra 2

- Semestar: I
- predavanja: dr Silvana Marinković, e-mail: silvana@kg.ac.rs, Skype Name: silvana.marinkovic
- vežbe: Ljubica Milević
- nedeljni fond časova: 3 + 2
- način polaganja ispita:
  - redovno prisustvo nastavi – 4 poena
  - kolokvijumi – 46 poena (23 + 23)
  - završni ispit – 50 poena
  - Student može izaci na završni ispit ako u predispitnim obavezama osvoji najmanje 26 poena, od čega na svakom kolokvijumu najmanje 8 bodova.
- Literatura:
  - M. Drešević, Elementi linearne algebre, Matematički fakultet, Beograd, 1984.
  - G. Kalajdžić, Linearna algebra, Matematički fakultet, Beograd, 1995.
  - T.S. Blyth and E.F. Robertson, Basic Linear Algebra, Springer, London, 1998.
  - R. Kaye and R. Wilson, Linear Algebra, 1998.

Vektorski prostori-obnavljanje

- $V = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots\}$ neprazan skup,
- $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ i $(F, \oplus, \odot, 0, 1)$ polje,
- $+ : V \times V \to V,\ (x, y) \mapsto x + y, \quad \cdot : F \times V \to V,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x.$

Definicija

Uredjena četvorka $(V, +, \cdot, F)$ je vektorski prostor ako za svako $x, y \in V$ i svako $\alpha, \beta \in F$ važi:

(V_1) $(V, +)$ *je Abelova grupa,*

(V_2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$

(V_3) $(\alpha \oplus \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$

(V_4) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \odot \beta) \cdot x,$

(V_5) $1 \cdot x = x.$

Nazivi i oznake

- Elementi skupa V se zovu vektori.
- Elementi polja F se zovu skalari.
- $+$ je sabiranje vektora, a $\cdot$ množenje vektora skalarom.
- Neutralni u grupi $(V, +)$ označavamo sa 0_V ili samo 0 i zovemo nula vektor.
- Inverzni od x u grupi $(V, +)$ označavamo sa $-x$ i zovemo suprotan vektor od x.
- $\cdot$ obično izostavljamo (umesto $\alpha \cdot x$ pišemo αx)
- Kada god to ne izaziva zabunu umesto oznaka $\oplus$ i $\odot$ (operacije u polju F) koristićemo $+$ i $\cdot$.
- Za nula vektor i nula skalar koristićemo istu oznaku 0, kad god je iz konteksta jasno da li se radi o vektoru ili skalaru.

Osobine sabiranja vektora i množenja skalarom

Teorema

U vektorskom prostoru $(V, +, \cdot, F)$ važi:

(1) $\alpha \cdot 0 = 0, \quad \alpha \in F$

(2) $0 \cdot x = 0, \quad x \in V$

(3) $\alpha \cdot x = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0 \vee x = 0, \quad x \in V, \alpha \in F,$

(4) $\alpha(-x) = -(\alpha x) = (-\alpha)x, \quad x \in V, \alpha \in F$

(5) $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \cdot x = \alpha_1 \cdot x + \cdots + \alpha_n \cdot x,$
$\alpha \cdot (x_1 + \cdots + x_n) = \alpha \cdot x_1 + \cdots + \alpha \cdot x_n,$
$n \in \mathbb{N}, \quad x, x_1, \ldots, x_n \in V, \quad \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n \in F.$

Vektorski potprostori

Definicija

Neka je $(V, +, \cdot, F)$ *vektorski prostor i* U *neprazan podskup od* V. *Ukoliko je* U *i sam vektorski prostor u odnosu na restrikcije operacije* $+$ *i funkcije* $\cdot$, *onda kažemo da je* U *vektorski potprostor prostora* V *i pišemo* $U \leq V$.

Teorema

Neka je $(V, +, \cdot, F)$ vektorski prostor i $\emptyset \neq U \subseteq V$.
Tada $U \leq V$ akko važe uslovi:

(1) $x \in U \wedge \alpha \in F \Rightarrow \alpha \cdot x \in U$ (tj. U je zatvoren za množenje skalarom)

(2) $x \in U \wedge y \in U \Rightarrow x + y \in U$ (tj. U je zatvoren za sabiranje vektora).

Uslovi (1) i (2) su ekvivalentni uslovu

$(1')$ $\quad x, y \in U \wedge \alpha, \beta \in F \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in U$.

Zbir potprostora

Definicija

Ako su U_1 i U_2 potprostori vektorskog prostora V, tada

$$U_1 + U_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1 + x_2 | x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$$

zovemo zbir (suma) potprostora U_1 i U_2.

Teorema

Ako $U_1 \preceq V$ i $U_2 \preceq V$ onda i $U_1 + U_2 \preceq V$.

Napomena. Razlaganje $x = y + z,\ y \in U_1,\ z \in U_2$ vektora x, u opštem slučaju, nije jedinstveno, tj. iz

$$x = y + z \in U_1 + U_2 \quad \text{i} \quad x = y' + z' \in U_1 + U_2,$$

u opštem slučaju, ne sledi $y = y'$ i $z = z'$.
Pokazaćemo da je ovo razlaganje jedinstveno, za svaki $x \in V$, akko $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Definicija

Zbir $U_1 + U_2$ je direktan ako je $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Obeležava se sa $U_1 \oplus U_2$.

Spektralna teorema

Linearna kombinacija vektora

Neka je $(V, +, \cdot, F)$ vektorski prostor.

Definicija

Vektor $x \in V$ *je* *linearna kombinacija vektora* $x_1, \ldots, x_n \in V$ *ako postoje skalari* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ *takvi da je*

$$x = \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n.$$

Example

Vektor $(1, 2, -3) \in \mathbb{R}^3$ je linearna kombinacija vektora $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ jer

$$\begin{aligned} (1, 2, -3) &= (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, -3) \\ &= 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) - 3 \cdot (0, 0, 1) \end{aligned} .$$

Example

Pokažimo da vektor $(1,2,3)$ nije linearna kombinacija vektora $(1,1,1),(1,1,0),(1,1,2)$.
Potražimo $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ takve da je

$$
\begin{aligned}
& (1,2,3) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,2) \\
\Leftrightarrow\quad & (1,2,3) = (\alpha,\alpha,\alpha) + (\beta,\beta,0) + (\gamma,\gamma,2\gamma) \\
\Leftrightarrow\quad & (1,2,3) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\gamma) \\
\Leftrightarrow\quad & \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & = & \alpha+\beta+\gamma \\ 2 & = & \alpha+\beta+\gamma \\ 3 & = & \alpha+2\gamma \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Ovaj sistem jednačina nema rešenje (1=2), pa $(1,2,3)$ nije linearna kombinacija vektora $(1,1,1),(1,1,0),(1,1,2)$.

Linearna zavisnost vektora

Definicija

1. Skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\}$ je linearno zavisan ako postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da je $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$, tj.

$$(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F)\ (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \wedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)).$$

2. Skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\}$ je linearno nezavisan ako nije linearno zavisan, tj.

$$(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F)(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0).$$

Definicija

(i) *Beskonačan skup vektora $S \subseteq V$ je linearno zavisan ako je bar jedan njegov konačan podskup linearno zavisan.*

(ii) *Beskonačan skup vektora $S \subseteq V$ je linearno nezavisan ako je svaki njegov konačan podskup linearno nezavisan.*

Teorema

(1) *Svaki nadskup linearno zavisnog skupa vektora je linearno zavisan.*

(2) *Svaki podskup linearno nezavisnog skupa vektora je linearno nezavisan.*

(3) *Svaki skup koji sadrži nula vektor je linearno zavisan.*

Često se za utvrđivanje linearne zavisnosti koristi kriterijum dat sledećom teoremom.

Teorema

Skup vektora $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n > 1$, *je linearno zavisan akko se bar jedan od njih izražava kao linearna kombinacija ostalih.*

Linearni omotač skupa vektora

Neka je $(V, +, \cdot, F)$ vektorski prostor nad poljem F.

Definicija

Neka je $\emptyset \neq S \subseteq V$. Skup svih konačnih linearnih kombinacija vektora skupa S se zove linearni omotač (pokrivač) ili lineal nad skupom S i označava sa $\mathcal{L}(S)$, tj.

$$\mathcal{L}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n | n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in S,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\right\}.$$

Teorema

Ako je $\emptyset \neq S \subseteq V$, tada je $\mathcal{L}(S)$ najmanji potprostor vektorskog prostora V koji sadrži skup S.

Definicija

Ako je $\mathcal{L}(S) = V$ kažemo da skup S generiše prostor V, a skup S se zove generatorni skup (generatrisa) prostora V.

Baza vektorskog prostora

Neka je $(V, +, \cdot, F)$ vektorski prostor i $\emptyset \neq B \subseteq V$.

Definicija

Skup vektora B je baza prostora V ako je linearno nezavisan i generiše prostor V, tj.

(B_1) $\mathcal{L}(B) = V$

(B_2) B je linearno nezavisan skup vektora.

Teorema (karakterizacija baze)

Skup $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ je baza prostora V akko svaki $x \in V$ ima jedinstvenu reprezentaciju $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, gde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, tj.

$$(\forall x \in V)(\exists_1 (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n)\ x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n. \qquad (*)$$

Posledica

Ako vektorski prostor V ima konačnu bazu, onda svaka njegova baza ima isti broj vektora.

Definicija

Dimenzija vektorskog prostora V se obeležava sa $\dim V$ i definiše na sledeći način:

(1) *Ako je $V = \{0\}$, onda $\dim V = 0$.*

(2) *Ako prostor V ima bazu od n elemenata, onda $\dim V = n$.*

(3) *Ako prostor nema konačnu bazu, onda $\dim V = \infty$.*

Ako je $\dim V \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onda je V konačnodimenzionalan vektorski prostor.

Example

Dati su skupovi vektora
$T_1 = \{(1,2,3),(2,4,5)\}$,
$T_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1),(1,2,3)\}$,
$T_3 = \{(1,1,1),(2,0,2),(0,1,0)\}$,
$T_4 = \{(2,0,0),(2,2,0),(2,2,2)\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.
Koji od datih skupova su
(i) linearno nezavisni
(ii) generatorni za $\mathbb{R}^3$
(iii) baza za $\mathbb{R}^3$?

Example

Za svaki od datih potprostora prostora $\mathbb{R}^3$ odrediti po jednu bazu i dimenziju:

- $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = z\}$
- $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$
- $U_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + z^2 = 0\}$
- $U_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = y + z\}$

Teorema

Svaki linearno nezavisan skup vektora konačno dimenzionog prostora V je ili baza ili se može proširiti do baze tog prostora.

Example

Ukoliko je moguće, proširiti do baze sledeće skupove vektora:
(i) $\{1, x+2\}$ u prostoru $R_2[x]$
(ii) $\{(1,1),(2,2)\}$ u prostoru $\mathbb{R}^2$.

Teorema 8.

Neka je $(V, +, \cdot, F)$ konačnodimenzioni vektorski prostor i neka su U, U_1, U_2 njegovi potprostori. Tada

(1) $dimU \leq dimV$,

(2) $dimU = dimV \;\Rightarrow\; U = V$,

(3) $dim(U_1 + U_2) = dimU_1 + dimU_2 - dim(U_1 \cap U_2)$ - Grasmanova formula.
Posebno, ako $V = U_1 \oplus U_2$, onda $dimV = dimU_1 + dimU_2$.

Linearna preslikavanja vektorskih prostora

Definicija

Preslikavanje $f : V \to U$ *je* *linearno preslikavanje (homomorfizam)* *vektorskog prostora* $(V, +_V, \cdot_V, F)$ *u vektorski prostor* $(U, +_U, \cdot_U, F)$ *ako važi:*

1. $f(x +_V y) = f(x) +_U f(y) \quad (x, y \in V)$ - *aditivnost*
2. $f(\alpha \cdot_V x) = \alpha \cdot_U f(x) \quad (x \in V, \alpha \in F)$ - *homogenost.*

Uslovi 1. i 2. su ekvivalentni uslovu
$1'.\quad f(\alpha \cdot_V x +_V \beta \cdot_V y) = \alpha \cdot_U f(x) +_U \beta \cdot_U f(y) \quad (x, y \in V, \alpha, \beta \in F)$ - linearnost

Dokažimo da je svako linearno preslikavanje konačnodimenzionog vektorskog prostora potpuno određeno slikama baznih vektora.

Osnovni stav linearne algebre

Ako je $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ baza vektorskog prostora V_1 i $y_1, \ldots, y_n$ proizvoljni vektori prostora V_2, tada postoji tačno jedno linearno preslikavanje $f : V_1 \to V_2$ tako da je

$$f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n.$$

Example

Odrediti linearno preslikavanje $f : R^2 \to R^3$ takvo da važi
$f(1,0) = (2,-1,0), \quad f(1,1) = (3,-1,-2)$.

$$\begin{aligned}
& B = \{(1,0),(1,1)\} \text{ je baza prostora } R^2 \\
& \Leftrightarrow \ (\forall (x,y) \in R^2)(\exists_1 (\alpha,\beta) \in R^2)\ (x,y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1) \\
& \Leftrightarrow (x,y) = (\alpha+\beta,\beta) \\
& \Leftrightarrow x = \alpha+\beta,\ y = \beta \quad \text{(sistem jednačina po } \alpha \text{ i } \beta) \\
& \Leftrightarrow \beta = y,\ \alpha = x - y \\
& \Leftrightarrow (x,y) = (x-y)\cdot(1,0) + y\cdot(1,1) \\
& \Rightarrow f(x,y) = f((x-y)\cdot(1,0) + y\cdot(1,1)) \\
& \qquad\qquad = (x-y)\cdot f(1,0) + y\cdot f(1,1) \\
& \qquad\qquad = (x-y)\cdot(2,-1,0) + y\cdot(3,-1,-2) \\
& \qquad\qquad = (2x-2y,-x+y,0) + (3y,-y,-2y) \\
& \qquad\qquad = (2x+y,-x,-2y).
\end{aligned}$$

Teorema

Neka je $f : V_1 \to V_2$ linearno preslikavanje. Tada:f je izomorfizam akko f čuva bazu.

Teorema

Ako su V_1 i V_2 konačno dimenzioni vektorski prostori nad istim poljem F, tada

$$V_1 \cong V_2 \Longleftrightarrow dimV_1 = dimV_2.$$

Definicija

Neka je $f : V_1 \to V_2$ linearno preslikavanje. Tada

- $kerf \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V_1 | f(x) = 0\}$ *se zove* *jezgro* *homomorfizma f*
- $Imf \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) | x \in V_1\}$ *se zove* *slika* *homomorfizma f.*

Neke osobine jezgra i slike linearnog preslikavanja su date sledećom teoremom.

Teorema

Neka je $f : V_1 \to V_2$ linearno preslikavanje.Tada

(1) $Imf \leq V_2$.

(2) f je "na" akko $Imf = V_2$.

(3) $kerf \leq V_1$.

(4) f je 1-1 akko $kerf = \{0\}$.

(5) $f : V_1 \cong V_2$ akko $kerf = \{0\}$ i $Imf = V_2$.

(6) Ako je V_1 konačno dimenzioni vektorski prostor, tada su $kerf$ i Imf konačne dimenzije i važi

$$dimV_1 = dim(kerf) + dim(Imf).$$

Example

Za data linearna preslikavanja odrediti $Kerf$ i Imf:

(i) $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$

(ii) $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $D(p) = p'$

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, 0, y - z)$

(iv) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, u) = (x + y, y - z, x + u)$

Za svako od datih preslikavanja odrediti da li je injektivno i da li je sirjektivno.

Definicija matrice

Neka je $(F, +, \cdot, 0, 1)$ polje, $n, m \in \mathbb{N}$.

Definicija

Matrica tipa $m \times n$ nad poljem F je svako preslikavanje

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \to F.$$

Ako je $A(i, j) = a_{ij} \in F$, matricu A zapisujemo u obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ili kraće, } A = \|a_{ij}\|_{m \times n}.$$

Skalari a_{ij} se zovu elementi matrice,
$v_i = [a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}]$ je i-ta vrsta $(i \in \{1, \dots, m\})$,

$$k_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \text{je } j\text{–ta kolona} \quad (j \in \{1, \dots, n\}) \text{ matrice } A.$$

Prvi indeks označava broj vrste, a drugi indeks broj kolone u kojoj se element nalazi. Matrica tipa $m \times n$ ima m vrsta i n kolona.

$M_{m\times n}(F)$ - skup svih matrica tipa $m \times n$ nad poljem F
Ako je $m = n$ (broj vrsta jednak broju kolona) kažemo da je A kvadratna matrica reda n.
$M_n(F)$ - skup svih kvadratnih matrica reda n nad poljem F.

Definicija

Neka su $A = \|a_{ij}\|,\ B = \|b_{ij}\| \in M_{m\times n}(F)$. *Tada*

$$A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall i \in \{1,\ldots,m\})(\forall j \in \{1,\ldots,n\})\ a_{ij} = b_{ij}.$$

Na skupu $M_{m\times n}(F)$ definišemo binarnu operaciju sabiranje matrica na sledeći način:

Definicija

Ako su $A = \|a_{ij}\|,\ B = \|b_{ij}\| \in M_{m\times n}(F)$, *tada*

- $A + B \overset{\text{def}}{=} \|a_{ij} + b_{ij}\|_{m\times n}$,
- *Matrica* $0 \overset{\text{def}}{=} \|0\|$ *(tj. svi elementi su jednaki 0) se zove nula*

Definišemo i množenje matrice skalarom.

Definicija

Neka $A = \|a_{ij}\| \in M_{m\times n}(F)$ *i* $\lambda \in F$. *Tada*

$$\lambda \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} \|\lambda a_{ij}\|_{m\times n}.$$

Osobine množenja matrice skalarom date su sledećom teoremom.

Teorema

Ako $A, B \in M_{m\times n}(F)$ i $\lambda, \mu \in F$ onda

(1) $\lambda(A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

(2) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

(3) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$

(4) $1 \cdot A = A$.

Posledica

$(M_{m\times n}(F), +, \cdot, F)$ je vektorski prostor dimenzije mn.

Množenje matrica

Definicija

Ako $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$, $B = \|b_{ij}\|_{n\times p}$, *tada*

$$A \cdot B = \|c_{ij}\|_{m\times p} \quad \text{gde je} \quad c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \ \text{tj.}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}$$

Definicija

Kvadratna matrica $I_n = \|\delta_{ij}\| \in M_n(F)$, *gde* $\delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, *tj. se zove* *jedinična matrica* *reda n.*

Teorema

Važe sledeće jednakosti (pod uslovom da svi navedeni proizvodi postoje):

(1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ - asocijativnost množenja matrica

(2) $A \cdot I_n = A = I_m \cdot A, \quad A \in M_{m \times n}(F)$

(3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$

(4) $\lambda \cdot (AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B).$

Posledica.

Struktura $(M_n(F), +, \cdot)$, gde je $+$ sabiranje matrica, a $\cdot$ množenje matrica, je nekomutativan prsten sa jedinicom I_n.

Napomena.

Prsten $M_n(F)$ ima delioce nule, jer postoje nenula matrice čiji je proizvod nula matrica.

Example

Za $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U semigrupi $(M_n(F), \cdot)$ induktivno definišemo stepen kvadratne matrice A:

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad \ldots, \quad A^{m+1} = A^m \cdot A, \ (m \in \mathbb{N}).$$

Transponovana matrica

Definicija

Ako je $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ *onda se matrica*

$$A^T \stackrel{\text{def}}{=} \|a_{ji}\|_{n\times m}$$

se zove transponovana matrica matrice A.

Drugim rečima, A^T se dobija iz A, pišući, redom, vrste od A kao kolone od A^T.

Teorema

(1) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$

(2) $(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top$

(3) $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$

(4) $(A^\top)^\top = A$.

Simetrične i kososimetrične matrice

Definicija

Kvadratna matrica $A \in M_n(F)$ *je*

- *simetrična ako je* $A^T = A$,
- *kososimetrična ako je* $A^T = -A$.

Example

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{je simetrična, jer} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \text{je kososimetrična, jer}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicija determinante kvadratne matrice

Definicija

Neka je $A = \|a_{ij}\| \in M_n(F)$. *Determinantu matrice* A *definišemo na sledeći način*

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{def}{=} \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Teorema

- $det(A^T) = detA$.
- Ako se matrica B dobija iz A permutacijom τ vrsta (kolona) matrice A, onda je $detB = sgn(\tau)detA$.
- $B = v_{ij}(A) \quad \Rightarrow \quad detB = -detA$, tj. ako dve vrste (kolone) matrice zamene mesta njena determinanta menja znak.
- Ako su dve vrste (kolone) matrice A jednake, onda je njena determinanta jednaka 0 (uz uslov da $char(F) \neq 2$).
- $B = v_i^{\lambda}(A) \quad \Rightarrow \quad detB = \lambda detA$, tj. determinanta se množi skalarom tako što se svi elementi jedne vrste (kolone) pomnože tim skalarom.
- $det(\lambda A) = \lambda^n detA$.
- $B = v_{ij}^{\lambda}(A) \quad \Rightarrow \quad detA = detB$,tj. ako sve elemente neke vrste (kolone) matrice A pomnožimo skalarom i dodamo odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone) matrice A, determinanta matrice A se neće promeniti.
- $det(AB) = detA \cdot detB$

Definicija

Neka je $A = \|a_{ij}\| \in M_n(F)$.

- *Sa* M_{ij} *označimo matricu reda* $n-1$ *dobijenu iz* A *izostavljanjem* i*-te vrste i* j*-te kolone,*
- $\det M_{ij}$ *ćemo zvati* ***minor*** *elementa* a_{ij},
- $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ ***kofaktor*** *elementa* a_{ij}, *tj.*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & -- & a_{ij} & -- & a_{in} \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Teorema (Laplace)

Ako je $A = \|a_{ij}\| \in M_n(F)$, tada

(1) $detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, \ldots, n)$ (razvoj determinante po i-toj vrsti)

(2) $detA = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, \ldots, n)$ (razvoj determinante po j-toj koloni).

Definicija

Neka je $A = \|a_{ij}\| \in M_n(F)$ *i* $A_{ij} = (-1)^{i+j} detM_{ij}$ *kofaktor elementa* a_{ij}. *Tada se matrica* $adjA \stackrel{\text{def}}{=} \|A_{ij}\|^T$ *zove* *adjungovana matrica* *matrice* A.

Posledica

Kvadratna matrica $A \in M_n(F)$ je regularna akko $detA \neq 0$.
U tom slučaju važi

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA.$$