Linearna algebra 2

27. oktobar 2020.

Dijagonalizacija linearnog operatora i kvadratne matrice

Neka je $(V, +, \cdot, F)$ konačnodimenzioni vektorski prostor i $f : V \to V$ linearni operator.

Definicija

Linearni operator $f : V \to V$ je dijagonalizabilan (dopušta dijagonalizaciju) ako postoji baza B prostora V takva da je $[f]_B$ dijagonalna matrica. Tada kažemo da baza B dijagonalizira operator f.

Example

Ako $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)$ onda sopstveni vektori čine bazu $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ i

$$[f]_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

pa je f dijagonalizabilan i baza B dijagonalizira f.

Definicija

Kvadratna matrica $A \in M_n(F)$ je dijagonalizabilna *ako je slična nekoj dijagonalnoj matrici, tj. ako postoji regularna matrica $P \in M_n(F)$ takva da je matrica $B = P^{-1}AP$ dijagonalna.*

Teorema 1.

Linearni operator f je dijagonalizabilan akko je matrica $[f]_B$ dijagonalizabilna, gde je B proizvoljna baza prostora V.

Dokaz

($\rightarrow$) Neka je B proizvoljna baza prostora V i neka je f dijagonalizabilan

$\Rightarrow$ postoji baza B' takva da je $[f]_{B'}$ dijagonalna matrica

$\Rightarrow$ $[f]_B \overset{s}{\sim} [f]_{B'}$ (jer su matrice reprezentacije linearnog operatora u dvema bazama slične matrice)

$\Rightarrow$ $[f]_B$ je dijagonalizabilna.

($\leftarrow$) Neka je $[f]_B \overset{s}{\sim} A$, gde je A dijagonalna matrica. Tada postoji regularna matrica P takva da je $A = P^{-1}[f]_B P$.

Neka je B' baza prostora V takva da je P matrica prelaza iz B u B'.

Tada $[f]_{B'} = P^{-1}[f]_B P = A$, pa je f dijagonalizabilan operator.

Posledica

Matrica $A \in M_n(F)$ je dijagonalizabilna akko je operator
$f_A : M_{n\times 1}(F) \to M_{n\times 1}(F), \quad f_A(X) = AX$ dijagonalizabilan.

Teorema 2.

Linearni operator f je dijagonalizabilan akko prostor V ima bazu koju čine sopstveni vektori operatora f. Tada je $[f]_B = diag[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$.

Dokaz

$(\to)$ Neka je $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ baza prostora V koja dijagonalizira operator f, tj.

$$[f]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Tada: $x_i \neq 0$ (jer je bazni vektor) i $f(x_i) = a_{ii} \cdot x_i$, za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$,
pa je svako x_i sopstveni vektor, tj. B je baza sastavljena od sopstvenih vektora.

($\leftarrow$) Neka je $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ baza koju čine sopstveni vektori. Tada $f(x_i) = \lambda_i \cdot x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, gde $\lambda_i \in Sp(f)$, pa je matrica reprezentacije

$$[f]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dijagonalna matrica. Dakle, f je dijagonalizabilan.

Na osnovu prethodne teoreme, problem dijagonalizacije linearnog operatora (kvadratne matrice) se svodi na nalaženje baze sastavljene od sopstvenih vektora linearnog operatora (kvadratne matrice).

Matrice koje dopuštaju dijagonalizaciju se lako mogu stepenovati.

Example

Odrediti A^n, ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$f_A : M_{2\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 1}(\mathbb{R}), \quad f_A(X) = A \cdot X, \quad [f_A]_e = A$$

$$Sp(A) = \{-2, 3\}$$
$$\lambda_1 = -2 : \ (M_{2\times 1}(\mathbb{R}))_{\lambda_1} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$
$$\lambda_2 = 3 : \ (M_{2\times 1}(\mathbb{R}))_{\lambda_2} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$$

$B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$ (sopstveni vektori čine bazu), $[f_A]_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,

$A = [f_A]_e = P \cdot [f_A]_B \cdot P^{-1}$, gde je $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ matrica prelaza iz baze e u B

$$A^n = (P[f_A]_B P^{-1})^n = P \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = \dots$$

Teorema 3.

Sopstveni vektori pridruženi različitim sopstvenim vrednostima linearnog operatora su linearno nezavisni.

Dokaz

Neka su:

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, gde $\lambda_i \neq \lambda_j$, za $i \neq j$ - različite sopstvene vrednosti
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - sopstveni vektori pridruženi, redom, navedenim sopstvenim vrednostima

Pokažimo da je skup $\{x_1, \ldots, x_n\}$ linearno nezavisan indukcijom po n.

- Za $n = 1$ skup $\{x_1\}$ je linearno nezavisan,jer je $x_1 \neq 0$.
- Pretpostavimo da je skup $\{x_1, \ldots, x_n\}$ linearno nezavisan i dokažimo linearnu nezavisnost skupa $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$.

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0 && (*)\\
&\Rightarrow f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = f(0)\\
&\Rightarrow \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) = 0\\
&\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n x_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0. && (**)
\end{aligned}$$

Množenjem $(*)$ sa $-\lambda_{n+1}$ i dodavanjem $(**)$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})x_1 + \cdots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})x_n = 0 \\
&\Rightarrow \ \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = 0, \ldots, \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0 \ \text{(po indukc. hipotezi)} \\
&\Rightarrow \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0 \quad \text{jer } \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j \\
&\Rightarrow \alpha_{n+1} \underbrace{x_{n+1}}_{\neq 0} = 0 \text{ (zamenom u } (*)) \\
&\Rightarrow \alpha_{n+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Posledica

- Ako je $dimV = n$ i linearni operator $f : V \to V$ ima n različitih sopstvenih vrednosti, onda je f dijagonalizabilan.
- Matrica $A \in M_n(F)$ koja ima n različitih sopstvenih vrednosti je dijagonalizabilna.

Da uslov iz gornje Posledice nije potreban za dijagonalizabilnost pokazuje primer identičnog endomorfizma 1_V koji je dijagonalizabilan iako ima samo jednu sopstvenu vrednost ($\mathrm{Sp}(1_V) = \{1\}$).

Dakle, ostaje da se reši problem dijagonalizabilnosti u slučaju kada sopstveni polinom ima vešestruke korene.

Neka je $\lambda_0 \in Sp(f)$, gde je $f : V \to V$ linearni operator.

Definicija

(1) *Algebarski multiplicitet (višestrukost) sopstvene vrednosti λ_0 (u oznaci $am(\lambda_0)$) je red korena λ_0 sopstvenog polinoma $p_f(\lambda)$.*

(2) *Geometrijski multiplicitet sopstvene vrednosti λ_0 (u oznaci $gm(\lambda_0)$) je dimenzija sopstvenog potprostora V_{λ_0}.*

Example

Za $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (-3x + y - z, -7x + 5y - z, -6x + 6y - 2z)$ dobijamo da je

$$p_g(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4),$$

$$Sp(g) = \{-2, 4\}.$$

- Za $\lambda_1 = -2$ je $\mathbb{R}^3_{\lambda_1} = \mathcal{L}\{(1, 1, 0)\}$, pa je $am(\lambda_1) = 2$, $gm(\lambda_1) = 1$.
- Za $\lambda_2 = 4$ je $\mathbb{R}^3_{\lambda_2} = \mathcal{L}\{(0, 1, 1)\}$, pa je $am(\lambda_2) = 1$, $gm(\lambda_2) = 1$.

Primetimo da sopstveni vektori $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ operatora g ne čine bazu, tj. g nije dijagonalizabilan.

Teorema 4.

Za svako $\lambda_0 \in Sp(f)$ važi $1 \leq gm(\lambda_0) \leq am(\lambda_0)$.

Dokaz

Iz $V_{\lambda_0} \neq \{0\}$ sledi da je $dimV_{\lambda_0} \geq 1$, tj $gm(\lambda_0) \geq 1$.
Neka je $gm(\lambda_0) = dimV_{\lambda_0} = r$ i $B = \{x_1, \ldots, x_r\}$ jedna baza za V_{λ_0}. Proširimo je do baze $B' = \{x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\}$ prostora V. Tada

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & = & \lambda_0 x_1 \\ & \vdots & \\ f(x_r) & = & \qquad\qquad \lambda_0 x_r \\ f(y_1) & = & \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{n1}x_r + \beta_{11}y_1 + \cdots + \beta_{s1}y_s \\ & \vdots & \end{array}$$

pa je

$$[f]_{B'} = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & \ldots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & C \\ 0 & \ldots & \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & D \end{array}\right], \quad \text{gde je } C = ||\alpha_{ij}||_{r\times s}, D = ||\beta_{ij}||_{s\times s}.$$

Dalje sledi

$$p_f(\lambda) = \left| \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & C \\ 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & \\ \hline & 0 & & D - \lambda I_r \end{array} \right| = (\lambda_0 - \lambda)^r \cdot det(D - \lambda \cdot I_s),$$

pa je

$$am(\lambda_0) \geq r = gm(\lambda_0).$$

Algoritam dijagonalizabilnosti sadržan je u sledećoj teoremi.

Teorema 5.

Neka je $f : V \to V$ linearni operator, $n = dimV$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in F$,
$p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$, $m_1 + \dots + m_r = n$ i $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$
(tj. $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ su sopstvene vrednosti algebarskog multipliciteta $m_1, \dots, m_r$, respektivno).
Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(1) f je dijagonalizabilan,

(2) $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$,

(3) $n = dimV_{\lambda_1} + \dots + dimV_{\lambda_r}$,

(4) $(\forall i = 1, 2, \dots, r)\ m_i = dimV_{\lambda_i}$ (tj. $am(\lambda_i) = gm(\lambda_i)$).

Dokaz

- (1) $\rightarrow$ (2) Neka je f dijagonalizabilan. Tada postoji baza B koju čine sopstveni vektori takva da je $[f]_B$ dijagonalna matrica. Bazu B možemo prikazati u obliku $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$, gde je B_i baza za V_{λ_i} $(i = 1, \ldots, r)$. Odatle je
$$V = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r}.$$
Iz linearne nezavisnosti sopstvenih vektora koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima, sledi da je gornja suma potprostora direktna/ Dakle $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$.
- (2)$\rightarrow$(3) $n = dimV = dimV_{\lambda_1} + \cdots + dimV_{\lambda_r}$ (jer je suma direktna).
- (3)$\rightarrow$(4) Iz $\begin{array}{lcl} n & = & m_1 + \cdots + m_r \\ n & = & dimV_{\lambda_1} + \cdots + dimV_{\lambda_r} \end{array}$ oduzimanjem dobijamo
$$0 = \underbrace{(m_1 - dimV_{\lambda_1})}_{\geq 0} \cdots + \underbrace{(m_r - dimV_{\lambda_r})}_{\geq 0},$$
odakle sledi
$$m_1 = dimV_{\lambda_1}, \ldots, m_r = dimV_{\lambda_r}.$$

(4)$\rightarrow$(1) Napravino bazu prostora V koja dijagonalizira f. Neka su $B_1, \ldots, B_r$ baze, redom, prostora $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_r}$ i neka je

$$U \stackrel{def}{=} V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$$

Iz $U \leq V$ i $dimU = dimV_{\lambda_1} + \cdots + dimV_{\lambda_r} = m_1 + \cdots + m_r = n = dimV$ sledi $U = V$, pa je $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ baza prostora V koju čine sopstveni vektori. Dakle, f je dijagonalizabilan i važi

$$[f]_B = diag[\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r}].$$

Algoritam dijagonalizabilnosti:

Da bi linearni operator $f : V \to V$ bio dijagonalizabilan potrebno je i dovoljno da:

(1) Svi koreni sopstvenog polinoma p_f pripadaju polju F,

(2) Za svaku sopstvenu vrednost $\lambda \in Sp(f)$ važi

$$am(\lambda) = gm(\lambda)$$

(algebarski multiplicitet jednak geometrijskom multiplicitetu).

Bazu B koja dijagonalizuje operator f dobijamo kao $B_1 \cup \cdots \cup B_r$, gde su B_i baze sopstvenih potprostora V_{λ_i}.