Nedeterministički konačni automati

- Nedeterministički konačni automati (skraćeno NKA) predstavljaju uopštenje konačnih automata
- Pored naredbi oblika:

$$\begin{array}{ll} \texttt{select} & symbol = s_1 \ \underline{\texttt{goto}\ i_1} \\ & symbol = s_2 \ \underline{\texttt{goto}\ i_2} \\ & \vdots \\ & symbol = s_k \ \underline{\texttt{goto}\ i_k} \end{array}$$

nedeterministički automati izvršavaju i naredbe u kojima su podvučene instrukcije zamenjene sa:

$$\texttt{choose goto } i_{m_1} \texttt{ or goto } i_{m_2} \texttt{ or } \cdots \texttt{ or goto } i_{m_j}$$

ili sa STOP.

Formalna definicija nedeterminističkog automata

Дефиниција

Nedeterministički konačni automat je uredjena petorka $\mathbb{M} = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$, *gde je*

- Q *konačan skup stanja,*
- $q_0 \in Q$ *početno stanje,*
- $F \subseteq Q$ *skup završnih stanja,*
- Σ *ulazni alfabet,*
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ *funkcija tranzicije, pri čemu je* $\mathcal{P}(Q)$ *skup svih podskupova od* Q*.*

Izračunavanja NKA

Дефиниција

Neka $\mathbb{M} = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$ *nedeterministički konačni automat.*

- *Računski korak automata* $\mathbb{M}$ *jeste binarna relacija* $\vdash_{\mathbb{M}}$ *na skupu svih konfiguracija* $Q \times \Sigma^*$ *definisana na sledeći način:*

$$qw \vdash_{\mathbb{M}} pv \Leftrightarrow \text{ za neki } s \in \Sigma, w = sv \text{ i } p \in \delta(q, s).$$

- *Izračunavanje automata* $\mathbb{M}$ *je svaki konačan niz konfiguracija* C_0, C_1, ..., C_n, $n \geqslant 1$, *takav da je* $C_i \vdash_{\mathbb{M}} C_{i+1}$, *za svaki* i, $0 \leqslant i < n$.
- *Izračunavanje automata* $\mathbb{M}$ *za ulaz* w *jeste svako izračunavanje* C_0, C_1, ..., C_n *takvo da je* $C_0 = q_0 w$ *i*
  - *i)* $C_n \in Q \times \{\varepsilon\}$ *ili*
  - *ii)* $C_n = qsv$, *za neke* $q \in Q$, $s \in \Sigma$, $v \in \Sigma^*$, *pri čemu je* $\delta(q, s) = \emptyset$ *i* sv *je sufiks ulazne reči* w.

  Tada se konfiguracija C_0 *naziva početna konfiguracija, a* C_n *završna konfiguracija.*

Relacija $\vdash^*_{\mathbb{M}}$

- Refleksivno i tranzitivno zatvorenje relacije $\vdash_{\mathbb{M}}$, tj, relacija $\vdash^*_{\mathbb{M}}$ medju konfiguracijama definisana je sa: $qw \vdash^*_{\mathbb{M}} pv$ akko
  - važi $q = p$ i $w = v$, ili
  - postoji izračunavanje $C_0, C_1, \ldots, C_n$ takvo da je $C_0 = qw$ i $C_n = pv$.

Дефиниција

Neka $\mathbb{M} = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$ nedeterministički konačni automat.

- *Automat $\mathbb{M}$ prihvata reč w, ako postoji izračunavanje $C_0, C_1, \ldots, C_n$ automata $\mathbb{M}$ za ulaz w, takvo da je $C_n \in F \times \{\varepsilon\}$, odnosno ako postoji $p \in F$ tako da $q_0 w \vdash^*_{\mathbb{M}} p$. U suprotnom, automat $\mathbb{M}$ ne prihvata reč w.*
- *Jezik koji prihvata automat $\mathbb{M}$ jeste skup svih reči nad Σ koje prihvata automat $\mathbb{M}$:*

$$
\begin{aligned}
L(\mathbb{M}) &= \{w \in \Sigma^* \mid \mathbb{M} \text{ prihvata reč } w\} \\
&= \{w \in \Sigma^* \mid q_0 w \vdash^*_{\mathbb{M}} p \text{ za neko } p \in F\}.
\end{aligned}
$$

Zatvorenje funkcije tranzicije

Дефиниција

Neka je $(Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$ *neki nedeterministički konačni automat.* *Zatvorenje funkcije* $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ *jeste funkcija* $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ *data sledećim jednakostima:*

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$, $q \in Q$,
- *za* $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$, $s \in \Sigma$:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, ws) &= \{p \in Q \mid \text{ postoji } r \in \hat{\delta}(q, w) \text{ takvo da } p \in \delta(r, s)\} \\ &= \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(r, s). \end{aligned}$$

- Jezik koji prihvata neki NKA opisujemo i na sledeći način:

$$L(\mathbb{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Odnos KA i NKA

Теорема

Za svaki nedeterministički konačni automat $\mathbb{M}$ *postoji konačni automat* $\mathbb{A}$ *takav da je* $L(\mathbb{M}) = L(\mathbb{A})$.

Nedeterministički automati sa ε-prelazom

- Nedeterministički konačni automati sa ε-prelazom predstavljaju uopštenje nedeterminističkih konačnih automata jer je u instrukcijama programa dozvoljeno izostaviiti deo $symbol = s_i$, tj.

$$\begin{array}{ll} \texttt{select} & \vdots \\ & \texttt{choose goto } i_{m_1} \texttt{ or } \cdots \texttt{ or goto } i_{m_j} \text{ (ili } \texttt{STOP}) \\ & \vdots \end{array}$$

- Drugim rečima, ε-NKA može promeniti stanje bez učitavnja simbola.

Formalna definicija ε-NKA

Дефиниција

Nedeterministički konačni automat sa ε-prelazom je uredjena petorka $\mathbb{M} = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$, gde je

- Q *konačan skup stanja,*
- $q_0 \in Q$ *početno stanje,*
- $F \subseteq Q$ *skup završnih stanja,*
- Σ *ulazni alfabet,*
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ *funkcija tranzicije.*

Izračunavanja ε-NKA

Дефиниција

Neka $\mathbb{M} = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$ nedeterministički konačni automat sa ε-prelazom.

- *Računski korak automata $\mathbb{M}$ jeste binarna relacija $\vdash_{\mathbb{M}}$ na skupu svih konfiguracija $Q \times \Sigma^*$ definisana na sledeći način:*

$$qw \vdash_{\mathbb{M}} pv \Leftrightarrow \text{ za neki } s \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, w = sv \text{ i } p \in \delta(q, s).$$

- *Izračunavanje automata $\mathbb{M}$ je svaki konačan niz konfiguracija C_0, C_1, ..., C_n, $n \geqslant 1$, takav da je $C_i \vdash_{\mathbb{M}} C_{i+1}$, za svaki i, $0 \leqslant i < n$.*
- *Izračunavanje automata $\mathbb{M}$ za ulaz w jeste svako izračunavanje C_0, C_1, ..., C_n takvo da je $C_0 = q_0 w$ i*
  - *i) $C_n \in Q \times \{\varepsilon\}$ ili*
  - *ii) $C_n = qsv$, za neke $q \in Q$, $s \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $v \in \Sigma^*$ takve da $\delta(q, s) = \emptyset$.*

  Tada se konfiguracije C_0 naziva početna konfiguracija, a C_n završna konfiguracija.

Relacija $\vdash^*_{\mathbb{M}}$

- Refleksivno i tranzitivno zatvorenje relacije $\vdash_{\mathbb{M}}$, tj, relacija $\vdash^*_{\mathbb{M}}$ medju konfiguracijama definisana je sa: $qw \vdash^*_{\mathbb{M}} pv$ akko
  - važi $q = p$ i $w = v$, ili
  - postoji izračunavanje $C_0, C_1, \ldots, C_n$ takvo da je $C_0 = qw$ i $C_n = pv$.

Дефиниција

Neka $\mathbb{M} = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$ nedeterministički konačni automat sa ε-prelazom.

- *Automat $\mathbb{M}$ prihvata reč w, ako postoji izračunavanje $C_0, C_1, \ldots, C_n$ automata $\mathbb{M}$ za ulaz w, takvo da je $C_n \in F \times \{\varepsilon\}$, odnosno ako postoji $p \in F$ tako da $q_0 w \vdash^*_{\mathbb{M}} p$. U suprotnom, automat $\mathbb{M}$ ne prihvata reč w.*
- *Jezik koji prihvata automat $\mathbb{M}$ jeste skup svih reči nad Σ koje prihvata automat $\mathbb{M}$:*

$$\begin{aligned} L(\mathbb{M}) &= \{w \in \Sigma^* \mid \mathbb{M} \textit{ prihvata reč } w\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid q_0 w \vdash^*_{\mathbb{M}} p \textit{ za neko } p \in F\}. \end{aligned}$$

ε-zatvorenje pdoskupova

- Za svaki ε-NKA $\mathbb{M} = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$, definišemo ε-zatvorenje podskupova od Q:
  - ako je $P \subseteq Q$, ε-zatvorenje skupa P (u oznaci $\overline{P}$) jeste skup svih stanja u koja se može stići ε-strelicama polazeći od nekog stanja iz P.
- Važe sledeća svojstva:
  - $P \subseteq \overline{P}$,
  - ako $p \in P$, onda je $\delta(p, \varepsilon) \subseteq \overline{P}$.
- Podskup P od Q nazivamo *regularnim* ako je $P = \overline{P}$.
- Za svako $P \subseteq Q$, skup $\overline{P}$ regularan.
- Unija regularnih skupova je regularan skup.

Zatvorenje funkcije tranzicije

Дефиницијa

Neka je $(Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$ neki nedeterministički konačni automat sa ε prelazom. Zatvorenje funkcije δ je funkcija $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ definisana sa:

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \overline{\{q\}}$,
- $\hat{\delta}(q, ws) = \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,w)} \overline{\delta(r, s)}$.

- $\hat{\delta}(q, w)$ jeste skup svih stanja u koja se može stići nakon učitavanja reči w polazeći iz stanja q.
- Za sve $q \in Q$ i $w \in \Sigma^*$, skup $\hat{\delta}(q, w)$ regularan.
- Jezik koji prihvata neki ε-NKA opisujemo i na sledeći način:

$$L(\mathbb{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Odnos ε-NKA i KA

Теорема

Za svaki ε-NKA $\mathbb{M}$ postoji KA $\mathbb{A}$ takav da je $L(\mathbb{M}) = L(\mathbb{A})$.

Regularni jezici

Дефиниција

Jezik L nad alfabetom Σ je regularan ako postoji konačan automat $\mathbb{M}$ sa ulaznim alfabetom Σ koji prihvata jezik L, tj. takav da je $L(\mathbb{M}) = L$.

Osnovni regularani jezici alfabeta Σ su $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ i $\{s\}$, $s \in \Sigma$.

Osobine regularnih jezika

Теорема

Skup svih regularnih jezika nad bilo kojim alfabetom Σ zatvoren je za komplement, presek, uniju, nadovezivanje i Klinijevu zvezdicu.

Теорема

Svaki regularan jezik se može predstaviti primenom unije, nadovezivanja i Klinijeve zvezdice na osnovne regularne jezike.

Skup regularnih jezika nad Σ, u oznaci $\mathrm{Reg}(\Sigma)$, može induktivno definisati kao najmanji (u smislu inkluzije) skup takav da:

- $\emptyset, \{\varepsilon\}, \{s\} \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$, za svako $s \in \Sigma$;
- ako $L_1, L_2 \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$, onda $L_1 \cup L_2, L_1 L_2, L_1^* \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$.

Regularni izrazi

- Regularni izrazi nad alfabetom Σ formiraju se na sledeći način:
  - $\emptyset$, ε i s, za svako $s \in \Sigma$, jesu regularni izrazi;
  - ako su α i β regularni izrazi, onda su to i $(\alpha \cup \beta)$ i $(\alpha\beta)$;
  - ako je α regularan izraz, onda je to i α^*.
- Svakom regularnom izrazu α nad Σ, na prirodan način pridružujemo jedan regularan jezik $L(\alpha) \subseteq \Sigma^*$:
  - $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$, $L(s) = \{s\}$, $s \in \Sigma$;
  - $L(\alpha \cup \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$, $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$,
  - $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$.

Теорема

Jezik $L \subseteq \Sigma$ je regularan akko postoji regularan izraz α nad Σ takav da je $L = L(\alpha)$.

Regularni izrazi

Lema

Neka su $K \subseteq \Sigma^+$ i $L \subseteq \Sigma^*$ regularni jezici. Tada jednačina $X = XK \cup L$ ima jedinstveno rešenje $X = LK^*$ koje je regularan jezik.

- Za automat $\mathbb{M} = (\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}, q_0, F, \Sigma, \delta)$ definišimo sledeće skupove:

  $L_i = L(\mathbb{M}_i)$, gde je $\mathbb{M}_i = (\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}, q_0, \{q_i\}, \Sigma, \delta)$, $0 \leqslant i \leqslant n$;
  $K_{ij} = \{s \in \Sigma \mid \delta(q_j, s) = q_i\}$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$.
- Ovi jezici su povezani sledećim jednakostima:

$$(\star) \qquad \begin{cases} L_0 = L_0K_{00} \cup L_1K_{01} \cup \cdots \cup L_nK_{0n} \cup \{\varepsilon\}, \\ L_1 = L_0K_{10} \cup L_1K_{11} \cup \cdots \cup L_nK_{1n}, \\ \vdots \\ L_n = L_0K_{n0} \cup L_1K_{n1} \cup \cdots \cup L_nK_{nn}. \end{cases}$$

- Važi da je $L(\mathbb{M}) = \bigcup_{q_i \in F} L_i$.