Нумеричка интеграција

Татјана Томовић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Крагујевац.

Мотивација

- Израчунавање многих физичких величина (површина, запремина, дужина пређеног пута, момент инерције,...) своди се управо на проблем израчунавања одређеног интеграла дате функције.

Мотивација

- Израчунавање многих физичких величина (површина, запремина, дужина пређеног пута, момент инерције,...) своди се управо на проблем израчунавања одређеног интеграла дате функције.
- Њутн-Лајбницова формула: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где је F примитивна функција за функцију f, не може се увек успешно применити.

Мотивација

- Израчунавање многих физичких величина (површина, запремина, дужина пређеног пута, момент инерције,...) своди се управо на проблем израчунавања одређеног интеграла дате функције.
- Њутн-Лајбницова формула: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где је F примитивна функција за функцију f, не може се увек успешно применити.
- Навешћемо неке од тих случајева:
  - функција f се не може представити помоћу коначног броја елементарних функција (на пример, када је $f(x) = e^{-x^2}$);
  - примена Њутн-Лајбницове формуле често доводи до врло сложеног израза, чак и код израчунавања интеграла једноставних функција:

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{a^2 + a\sqrt{2} + 1}{a^2 - a\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{2} - a} + \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{2} + a} \right);$$

Нумеричка интеграција

Нумеричка интеграција

- код интеграције функција, чије су вредности познате само на дискретном скупу тачака.

Нумеричка интеграција

- код интеграције функција, чије су вредности познате само на дискретном скупу тачака.

- Један пример античке нумеричке интеграције је Грчка квадратура круга. Тај процес је омогућио Архимеду да дође до доње и горње границе броја π.

Нумеричка интеграција

   - код интеграције функција, чије су вредности познате само на дискретном скупу тачака.
- Један пример античке нумеричке интеграције је Грчка квадратура круга. Тај процес је омогућио Архимеду да дође до доње и горње границе броја π.
- Нумеричком интеграцијом функција добијају се приближне вредности одређених интеграла на основу низа вредности подинтегралне функције по одређеној формули.

Нумеричка интеграција

  - код интеграције функција, чије су вредности познате само на дискретном скупу тачака.
- Један пример античке нумеричке интеграције је Грчка квадратура круга. Тај процес је омогућио Архимеду да дође до доње и горње границе броја π.
- Нумеричком интеграцијом функција добијају се приближне вредности одређених интеграла на основу низа вредности подинтегралне функције по одређеној формули.
- Формуле за нумеричко израчунавање једноструких интеграла називају се квадратурне формуле, за израчунавање двоструких интеграла кубатурне формуле итд.

Нумеричка интеграција

- Квадратурна формула са n тачака је формула облика

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{1}$$

где збир

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

представља апроксимацију интеграла $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, а $R_n(f) = I(f) - Q_n(f)$ је одговарајући остатак квадратурне формуле.

Нумеричка интеграција

- Квадратурна формула са n тачака је формула облика

(1) $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f),$$

где збир

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

представља апроксимацију интеграла $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, а $R_n(f) = I(f) - Q_n(f)$ је одговарајући остатак квадратурне формуле.

- Ако претпоставимо да функција $f(x)$ припада неком простору X ($X = \mathbb{C}[a,b]$, $X = \mathbb{C}^n[a,b]$...) тада нумеричку интеграцију можемо посматрати као апроксимацију функционеле $I : X \to \mathbb{R}$, помоћу функционеле $Q_n : X \to \mathbb{R}$.

Нумеричка интеграција

- Нека је тежинска функција $w(x)$ интеграбилна и ненегативна на интервалу (a, b), таква да може имати вредност нула само на скупу мере нула.

Нумеричка интеграција

- Нека је тежинска функција $w(x)$ интеграбилна и ненегативна на интервалу (a, b), таква да може имати вредност нула само на скупу мере нула.
- Квадратурна формула са n тачака је формула облика

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f). \tag{2}$$

Нумеричка интеграција

- Нека је тежинска функција $w(x)$ интеграбилна и ненегативна на интервалу (a,b), таква да може имати вредност нула само на скупу мере нула.
- Квадратурна формула са n тачака је формула облика

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f). \tag{2}$$

- x_k се зову чворови, а A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, су тежински коефицијенти.

Нумеричка интеграција

- Нека је тежинска функција $w(x)$ интеграбилна и ненегативна на интервалу (a, b), таква да може имати вредност нула само на скупу мере нула.
- Квадратурна формула са n тачака је формула облика

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f). \tag{2}$$

- x_k се зову чворови, а A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, су тежински коефицијенти.
- Код већине квадратурних формула чворови $x_k \in [a, b]$, тј. важи $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$.

Нумеричка интеграција

- Нека је тежинска функција $w(x)$ интеграбилна и ненегативна на интервалу (a, b), таква да може имати вредност нула само на скупу мере нула.
- Квадратурна формула са n тачака је формула облика

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f). \tag{2}$$

- x_k се зову чворови, а A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, су тежински коефицијенти.
- Код већине квадратурних формула чворови $x_k \in [a, b]$, тј. важи $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$.
- Ако је $x_1 = a$ и $x_n = b$, тада се каже да је *квадратурна формула затвореног типа*, а у осталим случајевима је *отвореног типа*.

Класе квадратурних формула и степен тачности

- У простору X уочимо m линеарно независних елемената $v_1, v_2, \ldots, v_m$ и са X_m означимо линеал над овим елементима.

Класе квадратурних формула и степен тачности

- У простору X уочимо m линеарно независних елемената $v_1, v_2, \dots, v_m$ и са X_m означимо линеал над овим елементима.
- Два приступа за одређивање параметара x_k и A_k, $k = 1, 2, \dots, n$.

Класе квадратурних формула и степен тачности

- У простору X уочимо m линеарно независних елемената $v_1, v_2, \ldots, v_m$ и са X_m означимо линеал над овим елементима.
- Два приступа за одређивање параметара x_k и A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

1° Чворови x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, се фиксирају унапред, а коефицијенти A_k се одређују из услова максималне тачности на простору X_m, тј. из услова $R_n(f) = 0$, за свако $f \in X_n$. Због линеарности функционеле $R_n(f)$, добијамо $R_n(v_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, тј.

$$I(v_i) = \sum_{k=1}^{n} A_k v_i(x_k), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Класе квадратурних формула и степен тачности

2° Параметри A_k, x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, се одређују из услова максималне могуће тачности, тј. из услова $R_n(f) = 0$ за свако $f \in X_{2n}$, односно $R_n(v_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Параметри A_k, x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, су решења нелинеарног система

$$I(v_i) = \sum_{k=1}^{n} A_k v_i(x_k), \quad i = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{3}$$

Класе квадратурних формула и степен тачности

2° Параметри A_k, x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, се одређују из услова максималне могуће тачности, тј. из услова $R_n(f) = 0$ за свако $f \in X_{2n}$, односно $R_n(v_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Параметри A_k, x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, су решења нелинеарног система

(3) $$I(v_i) = \sum_{k=1}^{n} A_k v_i(x_k), \quad i = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Квадратурне формуле добијене на овај начин су Gauss-Christoffel-овог типа.

Класе квадратурних формула и степен тачности

- Најчешће се користе квадратурне формуле које имају алгебарски степен тачности, тј. код којих је $v_i = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $X_m = \mathcal{P}_{m-1}$.

Класе квадратурних формула и степен тачности

- Најчешће се користе квадратурне формуле које имају алгебарски степен тачности, тј. код којих је $v_i = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $X_m = \mathcal{P}_{m-1}$.
- Квадратурна формула (2) има алгебарски степен тачности d ако је $R_n(f) = 0$ за свако $f \in \mathcal{P}_d$, и бар за једно $g \in \mathcal{P}_{d+1}$ важи $R_n(g) \neq 0$.

Класе квадратурних формула и степен тачности

- Најчешће се користе квадратурне формуле које имају алгебарски степен тачности, тј. код којих је $v_i = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $X_m = \mathcal{P}_{m-1}$.
- Квадратурна формула (2) има алгебарски степен тачности d ако је $R_n(f) = 0$ за свако $f \in \mathcal{P}_d$, и бар за једно $g \in \mathcal{P}_{d+1}$ важи $R_n(g) \neq 0$.
- Алгебарски степен тачности квадратурних формула добијених поступком 1° је не мањи од $n-1$, док је код Gauss-Christoffel-ових квадратурних формула најмање $2n-1$.

Пример

Посматрајмо $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. *Нека је* $Q_3(f) = \sum_{k=1}^{3} A_k f(x_k)$ *и* $v_i = x^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

a) Изаберимо чворове еквидистантно, тј. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$. Коефицијенте A_1, A_2 и A_3 одређујемо из услова максималне алгебарске тачности, тј. из система

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 2 \\ -A_1 + A_3 &= 0 \\ A_1 + A_3 &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Добијамо $A_1 = A_3 = 1/3$ и $A_2 = 4/3$.

Класе квадратурних формула и степен тачности

б) Чворове x_1, x_2,x_3, и коефицијенте A_1, A_2 и A_3 одређујемо из услова максималне алгебарске тачности, тј. из система

$$
\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 &= 2 \\
A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 &= 0 \\
A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 &= \frac{2}{3} \\
A_1x_1^3 + A_2x_2^3 + A_3x_3^3 &= 0 \\
A_1x_1^4 + A_2x_2^4 + A_3x_3^4 &= \frac{2}{5} \\
A_1x_1^5 + A_2x_2^5 + A_3x_3^5 &= 0.
\end{aligned}
$$

Добијамо $x_1 = \sqrt{3/5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3/5}$, $A_1 = A_3 = 5/9$ и $A_2 = 8/9$.

Класе квадратурних формула и степен тачности

- Код квадратурних формула затвореног типа нумерација чворова обично почиње од нуле, па су тада квадратурне формуле облика

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_{n+1}(f).$$

Класе квадратурних формула и степен тачности

- Код квадратурних формула затвореног типа нумерација чворова обично почиње од нуле, па су тада квадратурне формуле облика

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_{n+1}(f).$$

- Једноставнији начин за конструкцију квадратурних формула заснива се на примени интерполације. Формуле добијене на овај начин се називају *квадратурне формуле интерполационог типа.*

Класе квадратурних формула и степен тачности

- Код квадратурних формула затвореног типа нумерација чворова обично почиње од нуле, па су тада квадратурне формуле облика

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_{n+1}(f).$$

- Једноставнији начин за конструкцију квадратурних формула заснива се на примени интерполације. Формуле добијене на овај начин се називају *квадратурне формуле интерполационог типа.*
- Нека су познате вредности функције f у тачкама x_k, $k = 0, 1, \ldots, n (\in [a, b])$, тј. $f_k \equiv f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Класе квадратурних формула и степен тачности

- Код квадратурних формула затвореног типа нумерација чворова обично почиње од нуле, па су тада квадратурне формуле облика

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_{n+1}(f).$$

- Једноставнији начин за конструкцију квадратурних формула заснива се на примени интерполације. Формуле добијене на овај начин се називају *квадратурне формуле интерполационог типа.*
- Нека су познате вредности функције f у тачкама x_k, $k = 0, 1, \ldots, n (\in [a, b])$, тј. $f_k \equiv f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
- $\mathrm{Lagrange}$-ов интерполациони полином је облика

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)},$$

где је $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Класе квадратурних формула и степен тачности

- Када заменимо функцију f одговарајућим Lagrange-овим интерполационим полиномом и интегралимо добијамо

$$A_k = \frac{1}{\omega'(x_k)} \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_k)} w(x)\,\mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Newton-Cotes-ове формуле

- Квадратурне формуле затвореног типа у којима су чворови еквидистантни са кораком $h = (b-a)/n$, тј. $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Newton-Cotes-ове формуле

- Квадратурне формуле затвореног типа у којима су чворови еквидистантни са кораком $h = (b - a)/n$, тј. $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
- Посматраћемо случај када је $w(x) = 1$.

Newton-Cotes-ове формуле

- Квадратурне формуле затвореног типа у којима су чворови еквидистантни са кораком $h = (b-a)/n$, тј. $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
- Посматраћемо случај када је $w(x) = 1$.
- Ако уведемо смену $x - x_0 = ph$ и ознаку $x^{(s)} = x(x-1)\cdots(x-s+1)$ (тзв. уопштени степен) добијамо

$$A_k = (b-a)H_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где је

$$H_k \equiv H_k(n) = \frac{(-1)^{n-k}}{n!n}\binom{n}{k}\int_0^n \frac{p^{(n+1)}}{p-k}\,\mathrm{d}p.$$

Newton-Cotes-ове формуле

- Квадратурне формуле затвореног типа у којима су чворови еквидистантни са кораком $h = (b-a)/n$, тј. $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
- Посматраћемо случај када је $w(x) = 1$.
- Ако уведемо смену $x - x_0 = ph$ и ознаку $x^{(s)} = x(x-1)\cdots(x-s+1)$ (тзв. уопштени степен) добијамо

$$A_k = (b-a)H_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где је

$$H_k \equiv H_k(n) = \frac{(-1)^{n-k}}{n!n}\binom{n}{k}\int_0^n \frac{p^{(n+1)}}{p-k}\,\mathrm{d}p.$$

- H_k су Newton-Cotes-ови коефицијенти и за њих важе једнакости $H_k = H_{n-k}$ и $\sum_{k=0}^n H_k = 1$.

Newton-Cotes-ове формуле $(n = 1)$

- Очигледно је $x_0 = a$, $x_1 = b$ и $H_0 = H_1 = 1/2$, па добијамо формулу

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + R_2(f)$$

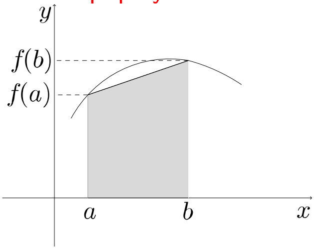
која је позната трапезна формула.

Newton-Cotes-ове формуле ($n = 1$)

- Очигледно је $x_0 = a$, $x_1 = b$ и $H_0 = H_1 = 1/2$, па добијамо формулу

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + R_2(f)$$

која је позната трапезна формула.

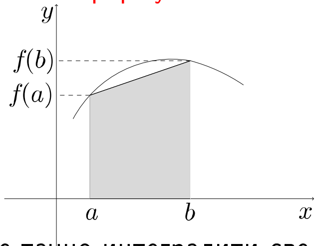


Newton-Cotes-ове формуле ($n = 1$)

- Очигледно је $x_0 = a$, $x_1 = b$ и $H_0 = H_1 = 1/2$, па добијамо формулу

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + R_2(f)$$

која је позната трапезна формула.



Трапезна формула неће тачно интегралити све полиноме степена 2. Заиста

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2\,\mathrm{d}x \neq \frac{b-a}{2}(a^2 + b^2).$$

Newton-Cotes-ове формуле $(n = 2)$

- Очигледно је $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = b$ и $H_0 = H_2 = 1/6$, $H_1 = 4/6$, па добијамо формулу

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + R_3(f)$$

која је позната Simpson-ова формула.

Newton-Cotes-ове формуле ($n = 2$)

- Очигледно је $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = b$ и $H_0 = H_2 = 1/6$, $H_1 = 4/6$, па добијамо формулу

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + R_3(f)$$

која је позната Simpson-ова формула.

- Simpson-ова формула тачно интеграли и полиноме степена 3. Заиста, вредност интеграла за $f(x) = x^3$ је

$$\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{b^4 - a^4}{4},$$

док по Simpson-овој формули, за $f(x) = x^3$ добијамо

$$\frac{b-a}{6}\left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right) = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Newton-Cotes-ове формуле

- У општем случају Newton-Cotes-ове формуле су облика

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\sum_{k=0}^{n} H_k f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + R_{n+1}(f),$$

где су

$$H_k \equiv H_k(n) = \frac{(-1)^{n-k}}{n!n}\binom{n}{k}\int_0^n \frac{p^{(n+1)}}{p-k}\,\mathrm{d}p, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Уопштене квадратурне формуле

Пример

Посматрајмо интеграл

$$\int_{-5}^{5} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,5 \approx 2.7468015338903172$$

У следећој табели су дате апроксимације датог интеграла применом Newton-Cotes-ових формула.

Ред формуле n	Апроксимација интеграла	Грешка
1	0.3846153846153846[2]	2.36218614927464711
2	6.79487179487179487	-4.04807026098176315
3	2.08144796380090498	0.66535357008912674
4	2.37400530503978780	0.37279622885024392
5	2.30769230769230769	0.43910922619772403
6	3.87044867347079978	-1.12364713958076805
7	2.89899440974837875	-0.15219287585834703
8	1.50048890712791179	1.24631262676211993
9	2.39861789784183472	0.34818363604819700
10	4.67330055565349876	-1.92649902176346704
11	3.24477294027858525	-0.49797140638855353
12	-0.31293651575343889	3.05973804964347061
13	1.91979721683238891	0.82700431705764282
14	7.89954464085193082	-5.15274310696189909
15	4.15555899270655713	-1.40875745881652541

Ред формуле n	Апроксимација интеграла	Грешка
1	0.38461538461538462	2.36218614927464711
2	6.79487179487179487	-4.04807026098176315
3	2.08144796380090498	0.66535357008912674
4	2.37400530503978780	0.37279622885024392
5	2.30769230769230769	0.43910922619772403
6	3.87044867347079978	-1.12364713958076805
7	2.89899440974837875	-0.15219287585834703
8	1.50048890712791179	1.24631262676211993
9	2.39861789784183472	0.34818363604819700
10	4.67330055565349876	-1.92649902176346704
11	3.24477294027858525	-0.49797140638855353
12	-0.31293651575343889	3.05973804964347061
13	1.91979721683238891	0.82700431705764282
14	7.89954464085193082	-5.15274310696189909
15	4.15555899270655713	-1.40875745881652541

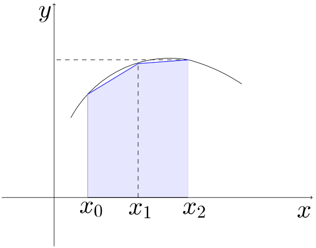
Очигледно је да апроксимације не конвергирају према правој вредности интеграла.

Уопштене квадратурне формуле

- Ако интервал $[a, b]$ поделимо на низ подинтервала, рецимо једнаке дужине, и на сваком подинтервалу применимо Newton-Cotes-ову формулу нижег реда добијамо уопштене квадратурне формуле.

Уопштене квадратурне формуле

- Ако интервал $[a, b]$ поделимо на низ подинтервала, рецимо једнаке дужине, и на сваком подинтервалу применимо Newton-Cotes-ову формулу нижег реда добијамо уопштене квадратурне формуле.
- На пример, за посматрану функцију, примена уопштене трапезне квадратурне формуле са 2 подинтевала би изгледала овако:



Уопштене квадратурне формуле

- Интервал $[a, b]$ поделимо на n подинтервала облика $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где је $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Уопштене квадратурне формуле

- Интервал $[a, b]$ поделимо на n подинтервала облика $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где је $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
- Нека си тачке x_k еквидистатне, тј. нека је сваки подинтервал дужине $h = (b - a)/n$ и $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Уопштене квадратурне формуле

- Интервал $[a, b]$ поделимо на n подинтервала облика $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где је $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
- Нека си тачке x_k еквидистатне, тј. нека је сваки подинтервал дужине $h = (b-a)/n$ и $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
- Уопштена трапезна формула

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right) + \widetilde{R}_n^T(f).$$

Уопштене квадратурне формуле

- Интервал $[a, b]$ поделимо на n подинтервала облика $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, где је $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
- Нека си тачке x_k еквидистатне, тј. нека је сваки подинтервал дужине $h = (b - a)/n$ и $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$.
- Уопштена трапезна формула

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right) + \widetilde{R}_n^T(f).$$

- Нека је сада $h = (b - a)/2n$ и $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Уопштене квадратурне формуле

- Интервал $[a,b]$ поделимо на n подинтервала облика $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где је $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
- Нека си тачке x_k еквидистатне, тј. нека је сваки подинтервал дужине $h = (b-a)/n$ и $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
- Уопштена трапезна формула

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right) + \widetilde{R}_n^T(f).$$

- Нека је сада $h = (b-a)/2n$ и $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.
- Уопштена Simpson-ова формула

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = &\frac{h}{3}\big(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1})\\ &+2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n-2}) + f_{2n}\big) + \widetilde{R}_n^S(f).\end{aligned}$$

Пример

Израчунати вредност интеграла

$$\int_1^2 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

коришћењем уопштене $Simpson$*-ове формуле за* $2n = 10$*. Наћи стварну вредност грешке.*

Уопштене квадратурне формуле

Пример

Израчунати вредност интеграла

$$\int_1^2 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

коришћењем уопштене $Simpson$*-ове формуле за* $2n = 10$*. Наћи стварну вредност грешке.*

Вредност интеграла коришћењем уопштене $\mathrm{Simpson}$-ове формуле је:

$$\begin{aligned} I_S = & \frac{0.1}{3}(f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)) \\ & + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)) + f(x_{10})). \end{aligned}$$

Уопштене квадратурне формуле

Пример

Израчунати вредност интеграла

$$\int_1^2 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

коришћењем уопштене $Simpson$*-ове формуле за* $2n = 10$*. Наћи стварну вредност грешке.*

Вредност интеграла коришћењем уопштене $\mathrm{Simpson}$-ове формуле је:

$$\begin{aligned} I_S =& \frac{0.1}{3}(f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)) \\ &+ 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)) + f(x_{10})). \end{aligned}$$

Стварна вредност интеграла је

$$I = \int_1^2 x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \approx 0.3297530326.$$

Уопштене квадратурне формуле

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0	0.3678794412
1	1.1	0.3661581921
2	1.2	0.3614330543
3	1.3	0.3542913309
4	1.4	0.3452357495
5	1.5	0.3346952402
6	1.6	0.3230344288
7	1.7	0.3105619909
8	1.8	0.2975379988
9	1.9	0.2841803765
10	2.0	0.2706705665

На основу вредности из табеле добијамо $I_S = 0.3297526998$.

Уопштене квадратурне формуле

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0	0.3678794412
1	1.1	0.3661581921
2	1.2	0.3614330543
3	1.3	0.3542913309
4	1.4	0.3452357495
5	1.5	0.3346952402
6	1.6	0.3230344288
7	1.7	0.3105619909
8	1.8	0.2975379988
9	1.9	0.2841803765
10	2.0	0.2706705665

На основу вредности из табеле добијамо $I_S = 0.3297526998$. Стварна вредност грешке је

$$I - I_S = 3.328 \cdot 10^{-7}.$$

Уопштене квадратурне формуле

Пример

Израчунати вредност интеграла

$$\int_0^1 \sin(17\pi x)\,\mathrm{d}x$$

коришћењем уопштене трапезне формуле. Број подинтервала удвостручити у сваком следећем кораку. Грешка треба бити мања или једнака од 10^{-1}.

Уопштене квадратурне формуле

Стварна вредност интеграла је $I \approx 0.0374482219039753$7.

Уопштене квадратурне формуле

Стварна вредност интеграла je $I \approx 0.03744822190397537$.

n	Апроксимација интеграла
2	0.5000000000000000
4	0.6035533905932736
8	0.62841743651573102
16	-0.00615571270982277
32	0.02832334903184835
64	0.03524943518639310
128	0.03690335412408047

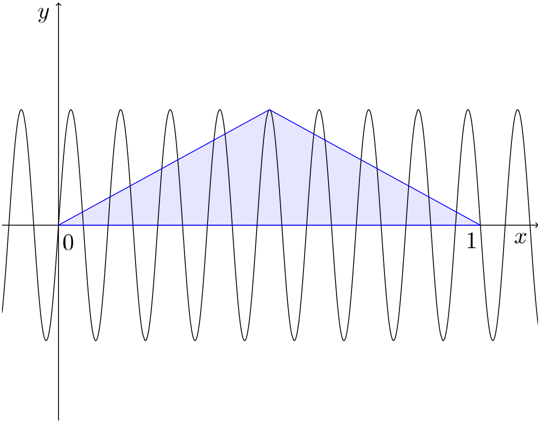
Уопштене квадратурне формуле

Стварна вредност интеграла је $I \approx 0.03744822190397537$.

n	Апроксимација интеграла
2	0.5000000000000000
4	0.6035533905932738
8	0.6284174365157310
16	-0.0061557127098227
32	0.0283233490318483
64	0.0352494351863931
128	0.0369033541240804

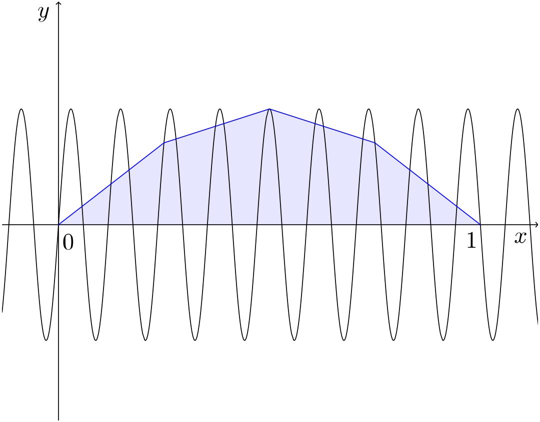
Требало би почети интеграцију са најмање 17 подинтервала.

Уопштене квадратурне формуле



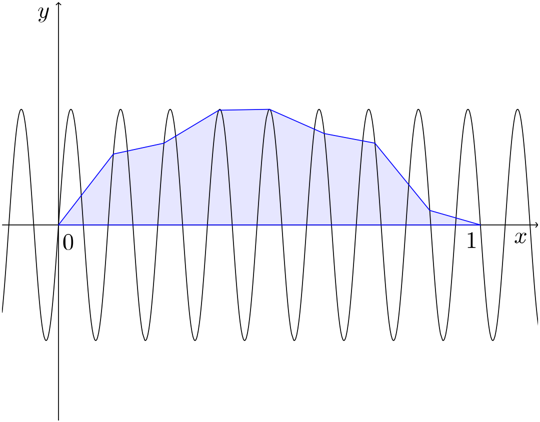
Слика: Уопштена квадратурна формула са 2 подинтервала

Уопштене квадратурне формуле



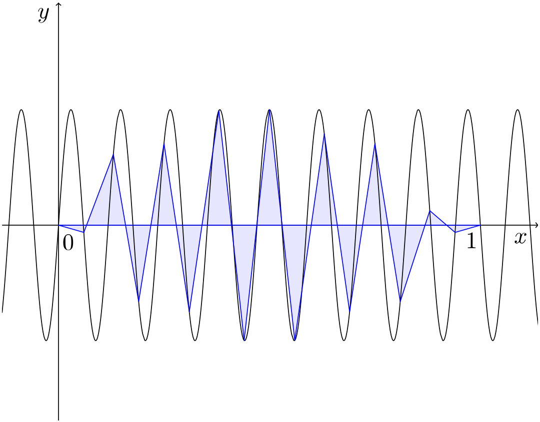
Слика: Уопштена квадратурна формула са 4 подинтервала

Уопштене квадратурне формуле



Слика: Уопштена квадратурна формула са 8 подинтервала

Уопштене квадратурне формуле



Слика: Уопштена квадратурна формула са 16 подинтервала

ХВАЛА

НА ПАЖЊИ!!!