Други колоквијум из Нееуклидских геометрија
4.6.2018.

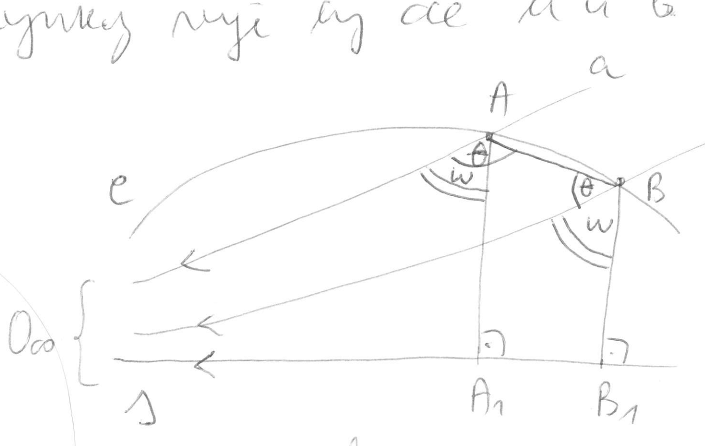
1

(1) Доказати да праве одређене страницама AB, BC, CD, AD Сакеријевог четвороугла ABCD не додирују дату еквидистанту e.

Доказ: Претпоставимо супротно, нека ~~пр~~ праве одређене страницама Сакеријевог четвороугла додирују еквидистанту e. Тада на основу задатка са вежби важи $AB - CD = BC - AD$. Како је $BC = AD$, добијамо да је $AB = CD$. ($AB$ је основица, $CD$ противосновица). Међутим, код Сакеријевог четвороугла важи да је $AB < CD$, што је контрадикција. ∎

(2) Дате су праве a и b које секу еквидистанту e у тачкама A и B и паралелне су са њеном основом s. Испитати да ли тачке A и B припадају фигури коју су се праве a и b.

Решење: Претпоставимо да тачке A и B припадају фигуру које су се a и b. Тада је AB сечица једна-



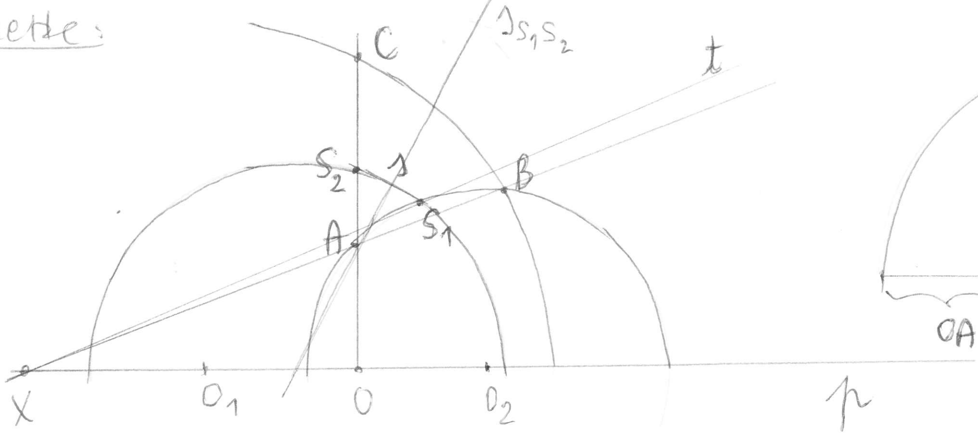

ких нагиба правих a и b, па је $\sphericalangle BAO_\infty \cong \sphericalangle ABO_\infty = \theta$.

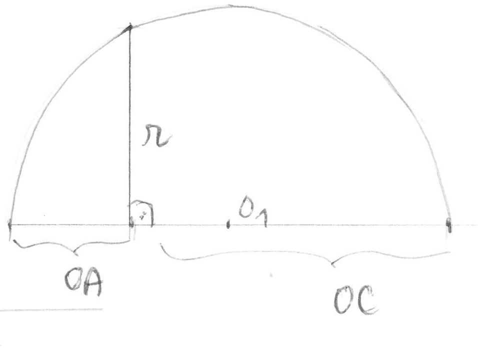
Како је $a \parallel s$ и $b \parallel s$, имамо да је $\sphericalangle B_1BO_\infty$ угао паралелности и $\sphericalangle A_1AO_\infty$ угао паралелности. Ови углови су једнаки, јер је $AA_1 \equiv BB_1$ као њихове еквидистанте.

Нека је $\sphericalangle A_1AO_\infty = \sphericalangle B_1BO_\infty = \omega$. Тада је $\sphericalangle A_1AB = \theta - \omega$ и $\sphericalangle B_1BA = \theta + \omega$. Пошто је четвороугао $A_1B_1BA$ Сакеријев, имамо да је $\cancel{\theta} - \omega = \cancel{\theta} + \omega$, тј. $\omega = 0$, што је контрадикција. Дакле, тачке $A$ и $B$ не припадају хиперциклу чије су осе праве $a$ и $b$. ∎

③ У Поенкареовом полуравнинском моделу дат је $\triangle ABC$ са коначним теменима, чија страница $AC$ припада еуклидској полуправој, а странице $AB$ и $BC$ припадају еуклидским кружним луковима. Конструисати средњу линију $\triangle ABC$, која одговара страници $BC$.

Решење:

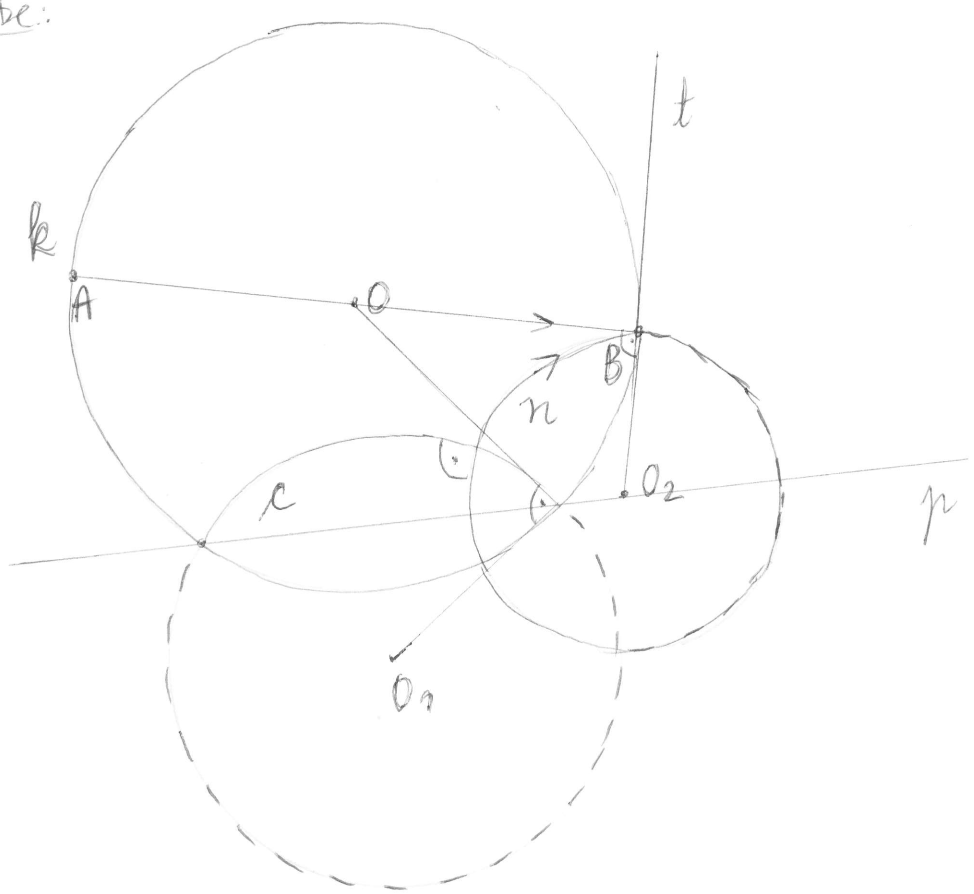



Треба одредити средишта дужи $AB$ и $AC$. Средиште $S_1$ дужи $AB$ конструишемо помоћу праве $AB$ и тангенте из тачке $X$, при чему је $X = AB \cap p$. Додирна тачка $S_1$ тангенте $t$ из тачке $X$ на круг $AB$ је средиште дужи $AB$. Средиште дужи $AC$, тј. тачку $S_2$, добијамо помоћу круга инверзије, чији је полупречник $r = \sqrt{OA \cdot OB}$, где је $O = AC \cap p$. Тада је $S_1S_2$ средња лин∎

4) У Поенкаревом диск моделу, права AB је репрезентована пречником апсолуте, а права c кружним луком, при чему су AB и c хиперпаралелне праве. Конструисати праву n нормалну на c, која је паралелна са правом AB.

Решење:




Конструише се потенцијална оса p кружница k и c. Затим се у тачки B конструише тангента на k. У пресеку p и тангенте је тачка $O_2$. Еуклидски круг $n(O_2, O_2B)$ је h-нормала која је паралелна са AB и h-нормална на h-праву c. ■