Први колоквијум из Линеарне алгебре 2

18.11.2017. године

1. Нека је $f:\ \mathbf{R}^3 \to\ \mathbf{R}^3$ линеарно пресликавање дато са

$$f(x,y,z)=(x-3y+3z,3x-5y+3z,6x-6y+4z).$$

а) [**4 поена**] Одредити карактеристичне вредности и карактеристичне векторе пресликавања f.

б) [**1 поен**] Одредити матрицу репрезентације пресликавања f у бази коју чине карактеристични вектори.

в) [**2 поена**] Одредити по једну базу и димензију простора $Kerf$ и Imf.

г) [**1 поен**] Да ли се простор $\mathbf{R}^3$ може представити као директан збир својих једнодимензионих $f-$инваријантних потпростора? Одговор образложити.

2. [**3 поена**] Нека линеарни оператор f у стандардној бази простора $\mathbf{R}^3$ има матрицу репрезентације $[f]_e=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Одредити матрицу репрезентације тог оператора у бази $s=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

3. Нека су дате матрице $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ и оператор $L: M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ дефинисан са $L(X)=AXB$.

а) [**2 поена**] Доказати да је L линеарни оператор и одредити му матрицу репрезентације у стандардној бази датог простора.

б) [**4 поена**] Одредити карактеристичне вредности и карактеристичне векторе оператора L. Да ли је L дијагонализабилан?

в) [**1 поен**] Доказати да постоји пресликавање L^{-1}.

4. а) [**3 поена**] Доказати да постоји јединствен природан број c за који матрица $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ c-2 & 0 & c-1 \end{bmatrix}$, $A\in M_3(\mathbf{R})$, не допушта дијагонализацију.

б) [**2 поена**] За $c=2$ одредити базу и димензију простора $W=\mathcal{L}\{I,A,A^2,\ldots\}$.