Поправни колоквијум из Линеарне алгебре 2

16.01.2018. године

Први колоквијум

1. Нека је $f: \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x]$ линеарно пресликавање дато са $f(p) = -2p + (3x-1)p'$.

а) [**3 поена**] Одредити карактеристичне вредности и карактеристичне векторе пресликавања f.

б) [**1 поен**] Одредити матрицу преласка пресликавања f из стандардне базе простора $\mathbf{R}_2[x]$ у базу коју чине карактеристични вектори.

в) [**3 поена**] Одредити све $f-$инваријантне потпросторе простора $\mathbf{R}_2[x]$. Да ли се простор $\mathbf{R}_2[x]$ може представити као директан збир својих једнодимензионих $f-$инваријантних потпростора? Одговор образложити.

2. [**5 поена**] Нека је $A = \begin{bmatrix} 1+2\ i & 1+\ i \\ -\ i & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$. Наћи A^{10}.

3. Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ и линеаран оператор $L : M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ дефинисан са $L(X) = AX - XA$.

а) [**2 поена**] Одредити по једну базу и димензију простора $KerL$ и ImL.

б) [**3 поена**] Одредити карактеристичне вредности и карактеристичне векторе оператора L. Да ли је L дијагонализабилан?

в) [**2 поена**] У зависности од $\alpha \in \mathbf{R}$ испитати регуларност оператора $L + \alpha I$.

4. У простору $M_3(\mathbf{R})$ дата је матрица $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ и потпростор $W = \mathcal{L}\{I, A, A^2, \ldots\}$.

а) [**3 поена**] Одредити базу и димензију потпростора W у зависности од параметра α.

а) [**1 поен**] Наћи бар једно α за које је $dimW = 2$ и израчунати A^4 за добијено α.

Други колоквијум

1. Нека је пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle$ дефинисано са:

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

а) [**1 поен**] Испитати да ли је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на $\mathbf{R}[x]$.

б) [**1 поен**] Доказати да је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на $\mathbf{R}_3[x]$.

в) [**3 поена**]Одредити једну ортонормирану базу потпростора $U = \{p \in \mathbf{R}_3[x] | p(-1) = p(1)\}$.

г) [**4 поена**] Наћи ортогоналну пројекцију, ортогоналну допуну и растојање полинома $(1+x)^2$ од потпростора U.

2. [**3 поена**] Нека је V векторски простор полинома над $\mathbf{R}$ степена мањег или једнаког 2. Нека су затим Φ_1, Φ_2, Φ_3 линеарне функционеле дефинисане са $\Phi_1(f(t)) = \int\limits_0^1 f(t)dt, \Phi_2(f(t)) = \int\limits_0^2 f(t)dt$ и $\Phi_3(f(t)) = f'(-1)$. Наћи базу $\{f_1, f_2, f_3\}$ простора V која је дуална бази $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$.

3. Нека је S самоконјугован, а K косоконјугован оператор на унитарном простору V. Доказати:

а) [**1 поен**] iS и $-iS$ су косоконјуговани оператори;

б) [**1 поен**] iK и $-iK$ су самоконјуговани оператори.

4.[**6 поена**] Испитати да ли је оператор $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ дефинисан са

$$f(x,y,z) = ((2x + 2y - 2z, 2x + 5y - 4z, -2x - 4y + 5z)$$

симетричан и ако јесте извршити ортогоналну дијагонализацију датог оператора.

5. [**3 поена**] За хермитску матрицу $H = \begin{bmatrix} 1 & 2\ i & 4+\ i \\ -2\ i & 2 & 2-6\ i \\ 4-\ i & 2+6\ i & 4 \end{bmatrix}$ наћи несингуларну матрицу P тако да је $P^T H \bar{P}$ дијагонална матрица, а затим наћи њену сигнатуру.