Први колоквијум из Линеарне алгебре 2

20.11.2018. године

1. Нека је $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ пресликавање дато са

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + y - 3z, x - y + 3z).$$

(а) [**1 поен**] Доказати да је пресликавање f линеарно.

(б) [**4 поена**] Доказати да је оператор f дијагонализабилан, а затим одредити матрицу репрезентације пресликавања f у бази коју чине карактеристични вектори.

(в) [**1 поен**] Одредити матрицу преласка из стандардне базе простора $\mathbb{R}^3$ у базу $s = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

(г) [**1 поен**] Доказати да се простор $\mathbb{R}^3$ може представити као директан збир својих једнодимензионих $f-$инваријантних потпростора.

2. [**5 поена**] Доказати да је матрица $A = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ слична некој дијагоналној матрици, а затим одредити A^{2018}.

3. Нека је линеарни оператор $L : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ дефинисан са

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a - b & 4a - 4b \\ -a + 2b + c & b + c \end{bmatrix}.$$

(а) [**4 поена**] Одредити карактеристичне вредности и карактеристичне векторе оператора L.

(б) [**1 поен**] Испитати да ли је оператор L регуларан.

4. Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.

(а) [**3 поена**] Одредити базу и димензију простора $W = \mathcal{L}\{A^n | n \in \mathbb{N}_0\}$.

(б) [**1 поен**] Израчунати матрицу $B = A^{25} - 4A^{24} + 5A^{23} + 2A^{22}$.

(в) [**2 поена**] Користећи Кејли-Хамилтонову теорему одредити A^{-1}.