Први поправни колоквијум из Линеарне алгебре 2

21.01.2019. године

1. [**10 поена**] Нека је $L : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ пресликавање дато са $L(p) = p - (x-1)p'$.
   (а) Доказати да је пресликавање L линеарно.
   (б) Одредити карактеристичне вредности и карактеристичне векторе пресликавања L.
   (в) Одредити по једну базу и димензију простора $Ker(L)$ и $Im(L)$.
   (г) Да ли је оператор L дијагонализабилан?
   (д) Да ли се простор $\mathbb{R}_3[x]$ може представити као директан збир својих једнодимензионих $L-$инваријантних потпростора? Одговор образложити.

2. [**5 поена**] У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2\alpha & \alpha+2 & 2\alpha \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Показати да је за тачно једну вредност параметра α матрица A дијагонализабилна и за ту вредност одредити $A^n, n \in \mathbb{N}$.

3. [**4 поена**] Нека је линеарни оператор $B : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ дат са
$$B(b_0 + b_1 t + b_2 t^2) = (b_0 + b_1 - 2b_2) + (b_0 + 2b_1 + \beta b_2)t + (-b_0 + 2b_2)t^2, \beta \in \mathbb{R}.$$
   Одредити за које је вредности параметра $\beta \in \mathbb{R}$ оператор B регуларан, па за те вредности одредити матрицу репрезентације оператора B^{-1} у стандардној бази.

4. [**4 поена**] Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & p \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $p \in \mathbb{R}$. Наћи базу и димензију простора $W = \mathcal{L}\{I, A, A^2, \ldots\}$.

Други поправни колоквијум из Линеарне алгебре 2

21.01.2019. године

1. [**5 поена**] Нека је пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ дефинисано са:
$$\langle a + bx + cx^2, \alpha + \beta x + \gamma x^2 \rangle = a\alpha + 2b\beta + 2c\gamma - a\beta - b\alpha - b\gamma - c\beta.$$
   (а) Доказати да је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на $\mathbb{R}_2[x]$.
   (б) Одредити једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}_2[x]$ полазећи од стандардне базе.
   (в) Одредити угао између вектора $1 + x$ и $2 - 3x + x^2$.

2. [**3 поена**] Нека су у простору $\mathbb{R}^3$ дати вектори $a_1 = (1, 0, 1), a_2 = (2, -1, 3)$ и линеарне функционеле $\Phi_2(x, y, z) = -x + z, \Phi_3(x, y, z) = -x + y + z$. За вектор $a_3 = (\alpha, \beta, -1)$ одредити $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тако да $\{a_1, a_2, a_3\}$ буде база простора $\mathbb{R}^3$ којој је $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ дуална база, а затим одредити линеарну функционелу $\Phi_1(x, y, z)$.

3. [**6 поена**] У унитарном простору $\mathbb{R}^4$ са стандардним скаларним производом дати су потпростор $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 = 2x_3, x_2 = 2x_4\}$ и вектор $v = (2\lambda, -1, 4 + \lambda, -7), \lambda \in \mathbb{R}$.
   (а) Одредити базу и димензију ортогоналног комплемента $M^\perp$ потпростора M.
   (б) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора v.
   (в) Одредити све вредности параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ тако да важи $d(v, M) = d(v, M^\perp)$.

4. [**5 поена**] Испитати да ли је оператор $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ дефинисан са
$$f(x, y, z) = ((2 - i)x - y, -x + (1 - i)y + z, y + (2 - i)z)$$
   нормалан, па ако јесте извршити ортогоналну дијагонализацију оператора f.

5. (а) [**2 поена**] Доказати да су сопствене вредности хермитског оператора реални бројеви.
   (б) [**2 поена**] Доказати да ако је A хермитски оператор, тада је и B^*AB хермитски оператор за сваки оператор B.