

Odabrana poglavlja algebre i logike

Silvana Marinković

17. oktobar 2019.

Iskazi

Definicija

Rečenice koje imaju smisla i koje su ili tačne ili netačne (samo jedno od ova dva) zovu se **iskazi**.

Example

- "Danas je drugi oktobar." -netačan iskaz
 - " $2+5=7$ "- tačan iskaz
 - " $2 + 4 < 5$ "- netačan iskaz
 - "Rečenica koju sada izgovaram je laž." -nije iskaz.
 - "Da li je danas četvrtak?"
-
- Iskaze označavamo slovima $p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots, p_2, q_2, \dots$
 - Od iskaza gradimo nove iskaze povezujući ih rečima "i", "ili", "nije", "ako...onda", "ako i samo ako", koje nazivamo **logičkim veznicima**.
 - Tačnost novog iskaza određujemo na osnovu tačnosti iskaza od kojih je sagrađen i značenja logičkih veznika u prirodnom jeziku.

Disjunkcija iskaza

Definicija

Disjunkcija redom iskaza p i q je iskaz " p ili q ", u oznaci $p \vee q$, koji je tačan akko je bar jedan od iskaza p ili q tačan.

Primer

- " $2+5=7$ ili $2 + 4 < 5$ " - tačan iskaz
- " $2+5=7$ ili $2 + 4 > 5$." - tačan iskaz
- "Sunce se okreće oko Zemlje ili slon je ptica" -netačan iskaz
- "Nikola ima knjigu ili loptu".
- "Nikola ima ili knjigu ili loptu" -ekskluzivna (jaka) disjunkcija

Konjunkcija iskaza

Definicija

Konjunkcija redom iskaza p i q je iskaz " p i q ", u oznaci $p \wedge q$, koji je tačan akko su oba iskaza p i q tačna.

Example

" $2+5=7$ i $2 + 4 < 5$."- netacan iskaz.

"Djura Jakšić je bio slikar i pesnik" - tačan iskaz.

Implikacija

Definicija

Implikacija redom iskaza p i q je iskaz "ako p onda q ", u oznaci $p \Rightarrow q$, koji je netačan akko i samo ako je iskaz p tačan, a iskaz q netačan.

Iskaz p je **premissa (pretpostavka)**, a iskaz q je **zaključak**.

Example

- "Iz $2 + 5 < 7$ sledi $2 < 3$ " - tačan iskaz.
- "ako je $2 < 3$ onda je $2+5=7$ " -tačan
- "ako je $2 < 3$ onda je $2+5<7$ " -netačan iskaz
- "ako voda mrzne na 100° onda je Beč glavni grad Austrije" -tačan iskaz

Napomena. Matematičku logiku ne interesuje sadržaj iskaza p i q , već samo njihova istinitost. Drugim rečima, istinitost implikacije $p \Rightarrow q$ ne zavisi od značenja iskaza p i q , već samo od njihove istinitosti.

Implikaciju $p \Rightarrow q$ možemo čitati i na sledeći način:

- "iz p sledi q "
- " p povlači q "
- " p implicira q "
- " p je dovoljan uslov za q "
- " q je potreban (neophodan, nužan) uslov za p "
- " q , ako p "
- " p , samo ako q ".

Example

Svakom od sledećih rečenica se tvrdi isto:

- (1) Ako je prirodan broj deljiv sa 4 onda je on deljiv i sa 2.
- (2) Dovoljan uslov da je prirodan broj deljiv sa 2 je da je on deljiv sa 4.
- (3) Potreban uslov da je prirodan broj deljiv sa 4 je da je on deljiv sa 2.
- (4) Broj je deljiv sa 4 samo ako je deljiv sa 2.

Ekvivalencija iskaza

Definicija

Ekvivalencija redom iskaza p i q je iskaz " **p ako i samo ako q** ", u oznaci **$p \Leftrightarrow q$** , koji je tačan ako i samo ako su ili oba iskaza p i q tačna ili oba iskaza netačna.

Example

$2 > 4$ akko $2 + 3 > 4 + 3$. -tačan iskaz

Ekvivalenciju $p \Leftrightarrow q$ možemo čitati i na sledeći način:

- " p je ekvivalentno sa q "
- " p je potreban i dovoljan uslov za q "
- " $\text{ako } p \text{ onda } q \text{ i ako } q \text{ onda } p$ ".

Negacija iskaza

Definicija

Negacija iskaza p je iskaz "**nije p** ", u oznaci $\neg p$, koji je tačan akko je iskaz p netačan.

Example

"Nije $2=2$." - netačan iskaz.

"NIŠ nije glavni grad Srbije." - tačan iskaz

Alfabet iskazne logike

- Iskazna logika nastaje formalizacijom računa sa iskazima.
- Potrebno je odrediti skup simbola (alfabet) koji će se koristiti za građenje formula i pravila po kojima će se formirati formule.
- Sa aspekta sintakse, formule se posmatraju isključivo kao nizovi simbola, ne uzimajući u obzir bilo kakvo njihovo (moguće) značenje.

Definicija

Alfabet iskazne logike se sastoji od sledećih simbola:

- *skup iskaznih slova* (iskaznih promenljivih) $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$,
- *skup logičkih veznika* $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$,
- *skup logičkih konstanti* $\{\top, \perp\}$ (opcionally, logičke konstante mogu, ali ne moraju učestvovati u građenju formula),
- *skup pomoćnih simbola* $\{(,)\}$ (zagrade).

Od ovih simbola po precizno utvrđenim pravilima grade se iskazne formule.

Iskazne formule

Definicija

Iskazne formule se definišu induktivno, na sledeći način:

- ❶ *Iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule.*
- ❷ *Ako su A i B iskazne formule, onda su $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ i $\neg A$ iskazne formule.*
- ❸ *Iskazne formule se dobijaju samo konačnom primenom pravila (1) i (2).*

Example

Sledeći nizovi simbola su iskazne formule:

- $p, q, \top, \perp$
- $(p \wedge \top), \neg q, (\top \vee \perp),$
- $((p \wedge \top) \vee \neg q), (\neg(p \wedge \top)), (\neg q \Leftrightarrow (\top \vee \perp)).$

Sledeći nizovi simbola nisu iskazne formule:

$(p \vee q)(\Rightarrow p), p \wedge \perp \vee \top, (p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3).$

Konvencije

- Iskazne formule označavaćemo velikim latiničnim slovima $A, B, C, \dots$
- Zapis $A = B$ će značiti da su formule A i B sintaksno identične (jednake kao nizovi simbola).
- U svakoj formuli učestvuje samo konačno mnogo iskaznih slova. Zapis $A = A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ će značiti da su sva iskazna slova formule A u skupu $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.
- Da bi se izbeglo gomilanje zagrada, po dogovoru,
 - ▶ brišemo spoljašnje zagrade,
 - ▶ ako su $A_1, \dots, A_n$ iskazne formule, umesto $(\dots ((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \dots \wedge A_{n-1}) \wedge A_n$ pišemo $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$, ili $\bigwedge_{i=1}^n A_i$;
 - ▶ slično i za $\vee$,
 - ▶ veznicima dajemo sledeći prioritet:
 - $\neg$ najjače vezuje,
 - $\wedge$ i $\vee$ slabije vezuju,
 - $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ najslabije vezuju.

Vrlo često ćemo prilikom dokazivanja raznih osobina formula, koristiti tzv. dokaz po složenosti iskaznih formula.

Ako treba dokazati da neka osobina O važi za sve iskazne formule, dovoljno je dokazati da

- tu osobinu imaju sva iskazna slova (baza indukcije), i
- da iz pretpostavne da formule A i B imaju osobinu O sledi da i formule $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $\neg A$ imaju tu osobinu (indukcijski korak).

Semantika iskazne logike

Semantički aspekt iskazne logike govori o značenju iskaznih formula, tj. njihovoj istinitosnoj vrednosti.

Da bi se pravila za određivanje vrednosti iskazne formule precizno formalizovala uvodi se sledeća algebarska struktura:

- dvoelementni skup $\{\top, \perp\}$
- jedna unarna i četiri binarne operacija na datom skupu $\{\top, \perp\}$, koje ćemo označiti sa $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ i koje zadajemo sledećim tablicama

$\vee$	$\top$	$\perp$	$\wedge$	$\top$	$\perp$	$\Rightarrow$	$\top$	$\perp$	$\Leftrightarrow$	$\top$	$\perp$	$\neg$	
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$

Ovako definisana algebra $(\{\top, \perp\}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg)$ se zove **iskazna algebra**.

Valuacija

Definicija

Svako preslikavanje $v : \{p_1, p_2, \dots\} \rightarrow \{\top, \perp\}$ zovemo **valuacija** iskaznih slova (promenljivih).

Ako je p iskazno slovo, za $v(p)$ kažemo da je **vrednost iskaznog slova** p u valuaciji v .

Example

Primeri valuacija: $v = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \dots \\ \top & \perp & \perp & \top & \dots \end{pmatrix},$

$v' = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \dots \\ \top & \top & \top & \top & \dots \end{pmatrix}.$

Vrednost iskazne formule

Definicija

Svakoj iskaznoj formuli A , za datu valuaciju v , pridružujemo vrednost $\hat{v}(A)$ iz skupa $\{\top, \perp\}$ definisanu indukcijom po složenosti formule A , na sledeći način:

ako $A = p_i$	onda $\hat{v}(A) \stackrel{\text{def}}{=} v(p_i),$
ako $A = \top$	onda $\hat{v}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \top,$
ako $A = \perp$	onda $\hat{v}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \perp,$
ako $A = (B \wedge C)$	onda $\hat{v}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{v}(B) \wedge \hat{v}(C),$
ako $A = (B \vee C)$	onda $\hat{v}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{v}(B) \vee \hat{v}(C),$
ako $A = (B \Rightarrow C)$	onda $\hat{v}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{v}(B) \Rightarrow \hat{v}(C),$
ako $A = (B \Leftrightarrow C)$	onda $\hat{v}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{v}(B) \Leftrightarrow \hat{v}(C),$
ako $A = \neg B$	onda $\hat{v}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \neg \hat{v}(B)$

Za $\hat{v}(A)$ kažemo da je **vrednost formule** A za valuaciju v .

Ako je $\hat{v}(A) = \top$, kažemo da je formula A **tačna** za valuaciju v , a ako je $\hat{v}(A) = \perp$, da je **netačna**.

Example

Odrediti $\hat{v}(A)$, ako je $A = p \wedge \neg(q \Rightarrow r)$ i $v = \begin{pmatrix} p & q & r & s & \dots \\ \top & \perp & \perp & \top & \dots \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\hat{v}(A) = \hat{v}(p \wedge \neg(q \Rightarrow r)) &= \hat{v}(p) \wedge \hat{v}(\neg(q \Rightarrow r)) \\ &= \hat{v}(p) \wedge \neg \hat{v}(q \Rightarrow r) \\ &= \hat{v}(p) \wedge \neg(\hat{v}(q) \Rightarrow \hat{v}(r)) \\ &= \top \wedge \neg(\perp \Rightarrow \perp) \\ &= \top \wedge \neg \top \\ &= \top \wedge \perp \\ &= \perp.\end{aligned}$$

Definicija

- (1) Formula A je **zadovoljiva** akko postoji valuacija v takva da je $\hat{v}(A) = \top$.
- (2) Formula A je **tautologija** akko za svaku valuaciju v važi $\hat{v}(A) = \top$.
- (3) Formula A je **poreciva** akko postoji valuacija v takva da je $\hat{v}(A) = \perp$.
- (4) Formula A je **kontradikcija** akko za svaku valuaciju v važi $\hat{v}(A) = \perp$.

Da je formula A tautologija označavamo sa $\models A$.

Example

- Formula $p \vee \neg p$ je tautologija,
- formula $p \vee q$ je zadovoljiva i poreciva,
- formula $p \wedge \neg p$ je kontradikcija.

Spisak važnijih tautologija

- | | |
|---|---------------------------------------|
| (1) $p \Rightarrow p$ | (zakon refleksivnosti za implikaciju) |
| (2) $p \vee \neg p$ | (zakon isključenja trećeg) |
| (3) $\neg(p \wedge \neg p)$ | (zakon neprotivrečnosti) |
| (4) $(\neg p \Rightarrow \perp) \Rightarrow p$ | (svodjenje na apsurd) |
| (5) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ | (zakon dvojne negacije) |
| (6) $p \wedge p \Leftrightarrow p, \quad p \vee p \Leftrightarrow p$ | (zakon idempotencije) |
| (7) $p \vee \perp \Leftrightarrow p, \quad p \vee \top \Leftrightarrow \top$
$p \wedge \top \Leftrightarrow p, \quad p \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$
$(p \Rightarrow \perp) \Leftrightarrow \neg p, \quad (\top \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$ | |
| (8) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ | (zakoni komutacije) |
| (9) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ | (MP-modus ponens) |
| (10) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ | (MT-modus tollens) |
| (11) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ | (Pirsov zakon) |
| (12) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p,$
$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ | (zakoni apsorpcije) |
| (13) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ | (zakon kontrapozicije) |
| (14) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q,$
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ | (De Morganovi zakoni) |
| (15) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ | (zakon uklanjanja implikacije) |
| (16) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ | (zakon uklanjanja ekvivalencije) |

- (17) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r,$
 $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (zakoni asocijacije)
- (18) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$
 $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (zakoni distribucije)
- (19) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ (tranzitivnost implikacije)
- (20) $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ (tranzitivnost ekvivalencije)

Osobine tautologija

Navodimo neke osobine tautologija.

Teorema

Ako je $\models A$ i $\models A \Rightarrow B$ onda je $\models B$.

Dokaz

Neka je

$$\models A \quad \text{i} \quad \models A \Rightarrow B.$$

Tada, za proizvoljnu valuaciju v važi

$$\hat{v}(A) = \top \quad \text{i} \quad \hat{v}(A \Rightarrow B) = \top,$$

pa po definiciji vrednosti formule $A \Rightarrow B$ imamo

$$\hat{v}(A) \Rightarrow \hat{v}(B) = \top,$$

odnosno,

$$\top \Rightarrow \hat{v}(B) = \top,$$

odakle sledi

$$\hat{v}(B) = \top.$$

Dakle, formula B je tačna za proizvoljnu valuaciju v , što znači da je ona tautologija.

Definicija

Formulu

$$A[B_1/p_1, \dots, B_n/p_n]$$

dobijenu zamenom iskaznih slova $p_1, \dots, p_n$ u formuli $A(p_1, \dots, p_n)$ iskaznim formulama, redom $B_1, \dots, B_n$, zovemo **instanca** (izvod) formule $A(p_1, \dots, p_n)$.

Teorema

Sve instance tautologija su takođe tautologije.

Dokaz

Neka je

- $\models A$,
- $A[B_1/p_1, \dots, B_n/p_n]$ instance tautologije A i
- $v : \{p_1, p_2, \dots\} \rightarrow \{\top, \perp\}$ proizvoljna valuacija.

Definišimo

$$v' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n & \dots \\ \hat{v}(B_1) & \dots & \hat{v}(B_n) & \dots \end{pmatrix}.$$

Tada

$$\hat{v}(A[B_1/p_1, \dots, B_n/p_n]) = \hat{v}'(A) = \top.$$

Dakle,

$$\models A[B_1/p_1, \dots, B_n/p_n]. \quad \square$$

Example

Jedna instanca tautologije

$$A(p, q) = (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

je formula

$$(\neg r \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg r))) \Rightarrow (p \wedge \neg r),$$

dobijena zamenom iskaznog slova p formulom $\neg r$ i iskaznog slova q formulom $p \wedge \neg r$.

Prema prethodnoj teoremi i ova formula je tautologija.

Uopšte, za bilo koje iskazne formule B i C formula

$$(B \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow C$$

je instanca tautologije A .

Logički ekvivalentne formule

Definicija

Formule A i B su **logički (semantički) ekvivalentne**, u oznaci $A \equiv B$, akko je $\models A \Leftrightarrow B$, tj. ukoliko $\hat{v}(A) = \hat{v}(B)$, za svaku valuaciju v .

Example

- $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, jer je formula $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ tautologija.
- $p \not\equiv p \vee \neg q$, jer za valuaciju $v = \begin{pmatrix} p & q & r & s & \dots \\ \perp & \perp & \perp & \top & \dots \end{pmatrix}$ važi $\hat{v}(p) = \perp$,
 $\hat{v}(p \vee \neg q) = \top$.

Ekvivalencijske transformacije formula

Neformalno rečeno, to je postupak kada se od jedne formule konstruiše lanac ekvivalentnih formula, tako što se u svakom koraku neka potformula zameni njoj logički ekvivalentnom formulom. To omogućava sledeća teorema.

Teorema zamene

Neka je formula $A \Leftrightarrow B$ tautologija, $F(A)$ formula koja ima kao potformulu formulu A i neka je formula $F(B)$ nastala zamenom formule A u formuli $F(A)$ formulom B . Tada je $F(A) \Leftrightarrow F(B)$ tautologija.

Ili:

Ako $A \equiv B$, onda i $F(A) \equiv F(B)$.

Example

Primenom teoreme zamene i poznatih tautologija dobijamo

$$\begin{aligned} & \neg(p \Rightarrow q) \\ \equiv & \neg(\neg p \vee q) \\ \equiv & \neg\neg p \wedge \neg q \\ \equiv & p \wedge \neg q \end{aligned}$$

pa je

$$\models \neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$$

Metode za dokazivanje tautologija

I Tablični metod

- Istinitosna vrednost date iskazne formule zavisi samo od vrednosti iskaznih slova koja u njoj učestvuju.
- Za formulu $A(p_1, \dots, p_n)$ (sa n iskaznih slova) ima 2^n različitih "kombinacija" vrednosti iskaznih slova.
- Ovaj postupak se sastoji u proveru istinitosne vrednosti formule u svih 2^n slučajeva, što se prikazuje tablicom.

Example

Iz tablice istinitosti za formulu $A = (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	A
T	T	T	⊥	T	T
T	⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥	T	T	T	T	T
⊥	⊥	T	T	T	T

zaključujemo da je ova formula tautologija.

Nedostatak: broj vrsta tablice brzo (eksponencijalno) raste sa porastom broja iskaznih slova u formuli.

II Svodjenje na protivrečnost

- Ako pronađemo valuaciju v za koju je $\hat{v}(A) = \perp$, onda A nije tautologija.
- Ako takve valuacije nema, onda je A tautologija.

Example

Dokažimo da je formula $A = (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ tautologija. Pretpostavimo da postoji valuacija v iskaznih slova za koju je $\hat{v}(A) = \perp$. Tada

$$\begin{aligned} \hat{v}(p \Rightarrow q) = \top \quad & \text{i} \quad \hat{v}((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) = \perp \\ \hat{v}(q \Rightarrow r) = \top, \quad \hat{v}(p \Rightarrow r) = \perp \\ v(p) = \top, \quad v(r) = \perp \\ \hat{v}(q) \Rightarrow \perp = \top \\ v(q) = \perp \end{aligned}$$

$$\hat{v}(p \Rightarrow q) = \top \Rightarrow \perp = \perp$$

Kontradikcija.

Dakle, ne postoji valuacija za koju je vrednost date formule jednaka $\perp$, pa je ova formula tautologija.

III Diskusija po iskaznom slovu

Ovaj metod se zasniva na sledećoj činjenici:

$$\models A(p_1, \dots, p_n) \quad \text{akko} \quad \models A(p_1, \dots, p_{n-1}, \top) \quad \text{i} \quad \models A(p_1, \dots, p_{n-1}, \perp).$$

Example

Dokažimo matematičkom indukcijom po n da je formula

$$((p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (p_n \Rightarrow p) \dots)))$$

tautologija.

- Za $n = 1$ formula $(p_1 \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p)$ je očigledno tautologija.
- Pretpostavimo
 $\models ((p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (p_n \Rightarrow p) \dots)))$,
(indukcijska hipoteza) i dokažimo
- $\models ((p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n+1}) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (p_{n+1} \Rightarrow p) \dots)))$
diskusijom po slovu p_{n+1} .
 - ▶ Za $v(p_{n+1}) = \top$ formula se (zbog $p \wedge \top \Leftrightarrow p$ i $(\top \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$) svodi na formulu iz indukcijske hipoteze, pa je njena vrednost $\top$.
 - ▶ Za $v(p_{n+1}) = \perp$ formula ima vrednost $\top \Leftrightarrow \top$, tj. $\top$.

Hipoteze i posledice

Neka je A iskazna formula i $v : P \rightarrow \{\top, \perp\}$ valuacija iskaznih slova.

Definicija

- (a) Valuacija v je **model za iskaznu formulu** A ako je $\hat{v}(A) = \top$.
- (b) Valuacija v je **model za skup iskaznih formula** $\mathcal{F}$ ako za sve $A \in \mathcal{F}$ važi $\hat{v}(A) = \top$.
- (c) Skup formula $\mathcal{F}$ je **protivrečan** ako nema model, tj. ne postoji valuacija za koju su tačne sve formule iz skupa $\mathcal{F}$.

Teorema 1 (stav kompaktnosti)

Ako svaki konačan podskup skupa iskaznih formula $\mathcal{F}$ ima model, onda i $\mathcal{F}$ ima model.

Uvedimo pojam semantičke rampe $\models$.

Definicija

Formula A je **semantička (logička) posledica** skupa formula $\mathcal{F}$, u oznaci $\mathcal{F} \models A$ ako svaka valuacija v koja je model za $\mathcal{F}$ je i model za A (tj. **za svaku valuaciju za koju su tačne sve formule iz $\mathcal{F}$, tačna je i formula A**). Elementi skupa $\mathcal{F}$ su **hipoteze**, a A je **posledica**.

Example

(1) $\{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models r$

jer za svaku valuaciju v za koju je

$$\begin{aligned} v(p) = \top, \quad \hat{v}(p \Rightarrow q) = \top, \quad \hat{v}(q \Rightarrow r) = \top \\ \rightarrow v(q) = \top \\ \rightarrow v(r) = \top \end{aligned}$$

(2) $\{p \Rightarrow \neg q, p\} \not\models p \wedge q$

jer za valuaciju $v = \begin{pmatrix} p & q & \dots \\ \top & \perp & \dots \end{pmatrix}$ važi

$$\hat{v}(p \Rightarrow \neg q) = \top, \quad v(p) = \top, \quad \text{ali } \hat{v}(p \wedge q) = \perp.$$

(3) Ispitati da li je sledeće zaključivanje ispravno:

- ▶ Mika nije igrao ili Laza nije igrao.
- ▶ Laza je igrao.
- ▶ Dakle, i Mika i Laza su igrali.

Formalizacija: p - "Mika je igrao", q - "Laza je igrao"

Treba ispitati: $\neg p \vee \neg q, \quad q \models p \wedge q$.

$$\hat{v}(\neg p \vee \neg q) = \top, \quad \hat{v}(q) = \top \rightarrow \hat{v}(p) = \perp \rightarrow \hat{v}(p \wedge q) = \perp,$$

pa zaključivanje nije ispravno

Example

Ispitati da li je argumentacija ispravna:

- Ako je Ana otišla, onda je i Tanja otišla.
- Ako je Tanja otišla, onda je i Sofija otišla.
- Ako je Sofija otišla, onda Tanja nije otišla.
- Dakle, ni Tanja ni Ana nisu otišle.

Formalizacija: p - "Ana je otišla", q - "Tanja je otišla", r - "Sofija je otišla".

Treba ispitati: $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, r \Rightarrow \neg q \models \neg p \wedge \neg q$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$r \Rightarrow \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	T	T	$\perp$	$\perp$
T	T	$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$
T	$\perp$	T	$\perp$	T	T	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$
$\perp$	T	T	T	T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T	T	T	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	T	T	T

jedine valuacije za koje su hipoteze tačne su poslednje dve, u tom slučaju je i zaključak tačan, pa je zaključivanje ispravno.

$$\emptyset \models A \quad \text{akko} \quad \models A.$$

Ako je $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ konačan skup, onda umesto $\mathcal{F} \models A$ pišemo $F_1, \dots, F_n \models A$.

Sledeće osobine relacije $\models$ se lako pokazuju:

Teorema 2

- (i) Ako $A \in \mathcal{F}$, onda $\mathcal{F} \models A$.
- (ii) Za svaku formulu A važi $\perp \models A$.
- (iii) Ako je $\mathcal{F} \models A$ i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, onda $\mathcal{F}' \models A$.

Teorema 3

Neka su $A, A_1, \dots, A_n$ iskazne formule. Tada važi:

$$A_1, \dots, A_n \models A \quad \text{akko} \quad \models A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A.$$

Dokaz

($\rightarrow$) Neka je $A_1, \dots, A_n \models A$ i v proizvoljna valuacija iskaznih slova. Tada

ako je $\hat{v}(A_i) = \perp$ za bar jedno $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

- $\rightarrow \hat{v}(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = \perp$
 $\rightarrow \hat{v}(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A) = \perp \Rightarrow \hat{v}(A) = \top$

ako je $\hat{v}(A_i) = \top$, za sve i

- $\rightarrow \hat{v}(A) = \top$ (po pretpostavci $A_1, \dots, A_n \models A$)
 $\rightarrow \hat{v}(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A) = \top \Rightarrow \top = \top$

Dakle, formula $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A$ je tautologija.

($\leftarrow$) Pretpostavimo da je formula $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A$ tautologija.

Neka je v model za skup formula $\{A_1, \dots, A_n\}$

- $\rightarrow \hat{v}(A_i) = \top$, za sve $i \in \{1, \dots, n\}$
- $\rightarrow \hat{v}(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = \top$
- $\rightarrow \hat{v}(A) = \top$, jer je $\hat{v}(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A) = \top$
- $\rightarrow v$ je model i za formulu A .

Dakle, $A_1, \dots, A_n \models A$.

Iz prethodne teoreme i poznate tautologije

$$\models (A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (A_n \Rightarrow A) \dots)))$$

dobijamo sledeću posledicu.

Posledica

$$(1) \quad A_1, \dots, A_n \models A \quad \text{akko} \quad \models A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (A_n \Rightarrow A) \dots))$$

$$(2) \quad A_1, \dots, A_n \models A \quad \text{akko} \quad A_1, \dots, A_{n-1} \models A_n \Rightarrow A.$$

Teorema 4 (semantički stav dedukcije)

$$\mathcal{F}, A \models B \quad \text{akko} \quad \mathcal{F} \models A \Rightarrow B$$

Example

Relaciju

$$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \models p \Rightarrow r$$

primenom prethodnih tvrđenja možemo zapisati na sledeće načine:

- $p \Rightarrow q \models (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- $q \Rightarrow r \models (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- $\models (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- $\models (q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- $\models (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Teorema 5

$A \equiv B$ akko $A \models B$ i $B \models A$.

Dokaz

($\rightarrow$)

$A \equiv B \rightarrow \hat{v}(A) = \hat{v}(B)$, za svaku valuaciju v
 $\rightarrow$ iz $\hat{v}(A) = \top$ sledi $\hat{v}(B) = \top$ i iz $\hat{v}(B) = \top$ sledi $\hat{v}(A) = \top$
 $\rightarrow A \models B$ i $B \models A$

($\leftarrow$) Neka $A \models B$ i $B \models A$, i neka je v proizvoljna valuacija. Tada

- ako $\hat{v}(A) = \top$, onda iz $A \models B$ sledi da je i $\hat{v}(B) = \top$;
- ako $\hat{v}(A) = \perp$, onda i $\hat{v}(B) = \perp$ (jer bi iz $\hat{v}(B) = \top$ i $B \models A$ sledilo $\hat{v}(A) = \top$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom).

Dakle, $\hat{v}(B) = \hat{v}(A)$, za svaku valuaciju v , tj. $A \equiv B$. $\square$

Normalne forme

Definicija

Iskazna slova i negacije iskaznih slova se nazivaju **literalima**.

Definicija

- (1) Iskazna formula A je u **konjunktivnoj normalnoj formi (KNF)** ako je oblika

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n,$$

pri čemu je svaka formula C_i , $(1 \leq i \leq n)$, disjunkcija literala.

- (2) Iskazna formula A je u **disjunktivnoj normalnoj formi (DNF)** ako je oblika

$$D_1 \vee D_2 \vee \cdots \vee D_m,$$

pri čemu je svaka formula D_i , $1 \leq i \leq m$, konjunkcija literala.

Example

Formula $A = (p \Rightarrow q) \vee (\neg p \wedge r)$ nije u KNF, niti u DNF, ali korišćenjem poznatih tautologija lako možemo odrediti njjoj logički ekvivalentnu formulu koja je u KNF ili DNF.

$$\begin{aligned} A = (p \Rightarrow q) \vee (\neg p \wedge r) &\equiv \neg p \vee q \vee (\neg p \wedge r) && \text{DNF} \\ &\equiv (\neg p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) && \text{KNF} \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg p) && \text{KNF} \end{aligned}$$

Svaka iskazna formula ima KNF, ali ona nije jedinstvena. Isto važi i za DNF.

Algoritam dovođenja formule na KNF

- Eliminacija veznika $\Leftrightarrow$ korišćenjem ekvivalencije

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

- Eliminacija veznika $\Rightarrow$ pomoću

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

- Dok god je moguće primenjivati De Morganove zakone

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B,$$

- Eliminacija višestrukih veznika $\neg$ pomoću

$$\neg\neg A \equiv A$$

- Dok god je moguće primenjivati distributivne zakone

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Definicija

Kanonska disjunktivna normalna forma (KDNF) formule $A(p_1, \dots, p_n)$ koja nije kontradikcija, je formula oblika

$$\bigvee_{\alpha: V_{\alpha}(A) = \top} p_1^{\alpha(p_1)} \wedge \dots \wedge p_n^{\alpha(p_n)}.$$

Iz definicije vidimo da je KDNF takva DNF kod koje se u konjunkcijama koje je čine:

- pojavljuje svako učestvujuće iskazno slovo ili njegova negacija
- nijedno slovo se ne pojavljuje zajedno sa svojom negacijom.

Example

- $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r), p \wedge \neg q \wedge r$ - KDNF
- $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r), (p \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q)$ - nisu KDNF.

Slično, svaku formulu koja nije tautologija možemo predstaviti u KKNF.

Definicija

Kanonska konjunktivna normalna forma (KKNF) formule $A(p_1, \dots, p_n)$ koja nije tautologija, je formula oblika

$$\bigwedge_{\alpha: v_{\alpha}(A)=\perp} (p_1^{\neg\alpha(p_1)} \vee \dots \vee p_n^{\neg\alpha(p_n)}).$$