

Odabrana poglavlja algebre i logike

24. oktobar 2019.

Formalne teorije

- Istinitosne tablice nam omogućavaju da za proizvoljnu iskaznu formulu ispitamo da li je ona tautologija, da li je zadovoljiva i slično.
- Odnos $\mathcal{F} \models A$ između hipoteza $\mathcal{F}$ i posledice A je definisan značenjem ovih formula u iskaznoj algebri.
- Dakle, radi se o semantičkom pristupu.
- Postoji i potpuno drugačiji pristup, sintaksno-deduktivni, gde se formule posmatraju isključivo kao nizovi simbola, ne ulazeći u njihovo značenje.
- Postupci dokazivanja se izvode po strogo definisanim pravilima, nezavisno od tačnosti formula.
- Na taj način se izbegava neodređenost i nepreciznost (koja proističe iz upotrebe prirodnog jezika), a upotreba intuicije svodi na minimum.

Pre nego što izložimo iskazni račun kao formalnu teoriju, odgovarajuće pojmove ćemo definisati u opštem slučaju.

Definicija

Formalna teorija (deduktivni sistem) $\mathcal{T}$ je uređena četvorka (S, For, Ax, R) gde je:

- S - najviše prebrojiv skup polaznih simbola (**azbuka, alfabet**). Konačni nizovi simbola iz S su **reči**. Skup svih reči označimo sa S^* .
- $For \subseteq S^*$ - **skup formula**. Postoji efektivan postupak kojim se utvrđuje da li je data reč formula ili ne.
- $Ax \subseteq For$ - **skup aksioma**. Ako je dat efektivan postupak za odlučivanje da li je formula aksioma ili ne, kažemo da je teorija **aksiomska**.
- R - konačan skup **pravila izvođenja**. Svako pravilo izvođenja je relacija u skupu For oblika

$$r : \frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{A}$$

gde su $A_1, \dots, A_n, A$ formule iz skupa For .

Dokaz, teorema

Definicija

- 1 Konačan niz formula $B_1, B_2, \dots, B_n$ je **dokaz** (izvođenje, dedukcija) u formalnoj teoriji $\mathcal{T}$ ako za sve $i = 1, \dots, n$
 - ▶ B_i je aksioma ili
 - ▶ B_i je dobijena iz prethodnih formula niza $B_1, B_2, \dots, B_{i-1}$ primenom nekog pravila izvođenja iz R .
- 2 Formula B je **teorema** formalne teorije $\mathcal{T}$, u oznaci $\vdash B$, ako je poslednji član nekog dokaza u $\mathcal{T}$, tj. postoji dokaz $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B$ u formalnoj teoriji $\mathcal{T}$. Skup svih teorema teorije $\mathcal{T}$ obeležavaćemo sa $Th(\mathcal{T})$.
- 3 Formalna teorija $\mathcal{T}$ je **odlučiva** ako postoji efektivni postupak kojim se za proizvoljnu formulu utvrđuje da li je teorema ili ne.

Definicija

Formula A je **sintaksna posledica** (kraće, posledica) skupa formula Γ , u oznaci $\Gamma \vdash A$, ako postoji konačan niz $B_1, \dots, B_{n-1}, B_n$ formula iz For takav da je $B_n = A$ i za svako $i = 1, \dots, n$

- $B_i \in Ax$ ili
- $B_i \in \Gamma$ ili
- B_i je dobijena iz prethodnih članova niza pomoću nekog od pravila izvođenja iz R .

U tom slučaju formule skupa Γ se zovu **hipoteze**, a niz $B_1, \dots, B_n$ dokaz formule B_n iz skupa hipoteza Γ .

Lako vidimo sledeće:

- (1) Ako $\Gamma_1 \vdash A$ i $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, onda $\Gamma_2 \vdash A$.
Specijalno, ako je $\vdash A$ onda je $\Gamma \vdash A$, za svaki skup formula Γ .
- (2) $\Gamma \vdash A$ akko postoji konačan podskup $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ takav da je $\Gamma_1 \vdash A$.

Iskazni račun kao formalna teorija

- Postoji nekoliko različitih načina da se iskazni račun izgradi kao formalna teorija.
- Oni se razlikuju po izboru osnovnih simbola, kao i izboru aksioma i pravila izvođenja.
- Izbor aksioma i pravila izvođenja treba da bude takav da :
 - ▶ budu dokazive sve tautologije (svaka tautologija je teorema)
 - ▶ ne može se dokazati ništa više, sem tautologija (svaka teorema je tautologija)
- Hilbertov sistem, prirodna dedukcija, račun sekvenata...

Izložićemo iskazni račun $\mathcal{Q}$.

Iskazni račun $\mathcal{L}$

Definicija

Iskazni račun $\mathcal{L}$ je formalna teorija $\mathcal{L} = (S, For, Ax, R)$, gde je

- $S = \{\Rightarrow, \neg, (,), p_1, \dots, p_n, \dots\}$ - prebrojiv skup simbola,
- For je skup formula iskaznog računa izgrađenih samo pomoću $\Rightarrow, \neg$,
- Ax sadrži sledeće shema aksiome:

$$Ax1: A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$Ax2: (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$Ax3: (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

- R sadrži samo pravilo izvođenja *modus ponens*

$$MP : \frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

Veznici $\vee, \wedge$ i $\Leftrightarrow$, kao i konstante $\top$ i $\perp$, se uvode definicijama:

$A \wedge B$ je zamena za $\neg(A \Rightarrow \neg B), \dots$

$\top$ je zamena za formulu $(A \Rightarrow A), \dots$

Pojmovi dokaz, teorema, dokaz iz hipoteza, sintaksna posledica definišu se kao u svakoj formalnoj teoriji.

Definicija

- *Dokaz u iskaznom računu $\mathcal{Q}$ je svaki konačan niz formula računa $\mathcal{Q}$ takav da je svaka formula u tom nizu ili aksioma računa $\mathcal{Q}$ ili je dobijena iz prethodnih formula u nizu po pravilu MP.*
- *Teorema iskaznog računa $\mathcal{Q}$ je svaka formula A ovog računa koja je poslednji član nekog dokaza, tj. takva da postoji niz $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, A$ u kojem je svaki član ili aksioma računa $\mathcal{Q}$ ili je formula računa $\mathcal{Q}$ dobijena iz prethodnih članova niza po pravilu MP. Broj n se onda zove dužina dokaza.*
- *Formula A je dokaziva iz skupa formula Γ računa $\mathcal{Q}$, u oznaci $\Gamma \vdash_{\mathcal{Q}} A$, ako postoji konačan niz formula $B_1, \dots, B_{n-1}, B_n$ računa $\mathcal{Q}$, takav da je $B_n = A$ i za svako $i = 1, \dots, n$ važi*
 - ▶ B_i je aksioma računa $\mathcal{Q}$ ili
 - ▶ $B_i \in \Gamma$ ili
 - ▶ B_i je dobijena iz prethodnih članova niza po pravilu MP.

Lema 1

Za svaku formulu $A \in \text{For}$ važi

$$\vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow A.$$

Dokaz

- | | | |
|----|---|---------------|
| 1. | $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ | Ax1 |
| 2. | $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$ | Ax2 |
| 3. | $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ | MP iz 1. i 2. |
| 4. | $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ | Ax1 |
| 5. | $A \Rightarrow A$ | MP iz 3. i 4. |

Teorema 1. (Stav dedukcije)

Za $\Gamma \subseteq \text{For}$, $A, B \in \text{For}$ važi

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B \quad \text{akko} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B.$$

Dokaz

($\leftarrow$) Neka je $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B$ i neka je $B_1, \dots, B_{n-1}, A \Rightarrow B$ izvođenje formule $A \Rightarrow B$ iz skupa formula Γ . Tada iz skupa formula $\Gamma \cup \{A\}$ imamo izvođenje

$$\begin{array}{lll} 1. & B_1 & \\ & \vdots & \\ n-1. & B_{n-1} & \\ n. & A \Rightarrow B & \\ n+1. & A & \text{hipoteza} \\ n+2. & B & \text{MP iz n. i n+1.} \end{array}$$

Dakle, $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{L}} B$.

nastavak dokaza

($\rightarrow$) Neka je $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{Q}} B$. Dokažimo $\Gamma \vdash_{\mathcal{Q}} A \Rightarrow B$ transfinitnom indukcijom po dužini izvođenja n formule B iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$.

Za $n = 1$ izvođenje se sastoji samo iz formule B pa ona može biti ili aksioma ili hipoteza iz Γ ili hipoteza A .

(i) B je aksioma. Tada

- | | |
|--------------------------------------|----------------|
| 1. B | aksioma |
| 2. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ | Ax1 |
| 3. $A \Rightarrow B$ | MP iz 1. i 2., |

pa $\Gamma \vdash_{\mathcal{Q}} A \Rightarrow B$.

(ii) $B \in \Gamma$. Tada

- | | |
|--------------------------------------|----------------|
| 1. B | hipoteza |
| 2. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ | Ax1 |
| 3. $A \Rightarrow B$ | MP iz 1. i 2.. |

pa $\Gamma \vdash_{\mathcal{Q}} A \Rightarrow B$.

(iii) B je formula A . Tada $\vdash_{\mathcal{Q}} A \Rightarrow A$ (Lema 1), a time i $\Gamma \vdash_{\mathcal{Q}} A \Rightarrow A$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve formule čije je izvođenje iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$ dužine $k < n$.

Pokažimo da je tvrđenje tačno i za formulu B čije je izvođenje iz $\Gamma \cup \{A\}$ dužine n .

Neka je to izvođenje $B_1, \dots, B_{n-1}, B$.

Tada B je ili aksioma ili hipoteza iz Γ ili hipoteza A ili je dobijena primenom MP na neka dva prethodna člana u nizu. Prva tri slučaja su potpuno ista kao za $n = 1$.

Proverimo četvrti slučaj. Neka je

1. B_1

$\vdots$

$i.$ B_i

$\vdots$

$j.$ $B_i \Rightarrow B$

$\vdots$

$n.$ B

MP iz $i.$ i $j.$

Tada

$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{Q}} B_i$ dužine dokaza $i < n$

$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{Q}} B_i \Rightarrow B$ dužine dokaza $j < n$

$\rightarrow$ $\Gamma \vdash_{\mathcal{Q}} A \Rightarrow B_i$
 $\Gamma \vdash_{\mathcal{Q}} A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B)$ (po indukcijskoj hipotezi)

Neka su dokazi formula $A \Rightarrow B_i$ i $A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B)$ iz skupa hipoteza Γ :

$$\begin{array}{ll}
 1. & C_1 \\
 & \vdots \\
 p-1. & C_{p-1} \\
 p. & A \Rightarrow B_i \\
 1. & D_1 \\
 & \vdots \\
 q-1. & D_{q-1} \\
 q. & A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B).
 \end{array}$$

Tada iz Γ imamo i izvođenje

$$\begin{array}{ll}
 1. & C_1 \\
 & \vdots \\
 p-1. & C_{p-1} \\
 p. & A \Rightarrow B_i \\
 p+1. & D_1 \\
 & \vdots \\
 p+q. & A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B) \\
 p+q+1. & (A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \quad \text{Ax2} \\
 p+q+2. & (A \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \quad \text{MP iz } p+q \text{ i } p+q+1 \\
 p+q+3. & A \Rightarrow B \quad \text{MP iz } p \text{ i } p+q+2.
 \end{array}$$

Dakle, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B$. $\square$

Lema 2

Za sve formule $A, B, C \in \text{For}$ važi

- | | |
|--|--|
| (1) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow C$ | (6) $A \Rightarrow B, \neg A \Rightarrow B \vdash_{\mathcal{L}} B$ |
| (2) $A, \neg A \vdash_{\mathcal{L}} B$ | (7) $A, B \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B$ |
| (3) $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg A \Rightarrow A$ | (8) $A, \neg B \vdash_{\mathcal{L}} \neg(A \Rightarrow B)$ |
| (4) $\vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow \neg\neg A$ | (9) $\neg A, B \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B$ |
| (5) $\vdash_{\mathcal{L}} (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | (10) $\neg A, \neg B \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B.$ |

Dokaz

(1) Na osnovu stava dedukcije:

$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow C$ akko $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \vdash_{\mathcal{L}} C$,
što važi jer

- | | |
|----------------------|---------------|
| 1. $A \Rightarrow B$ | hipoteza |
| 2. $B \Rightarrow C$ | hipoteza |
| 3. A | hipoteza |
| 4. B | MP iz 1. i 3. |
| 5. C | MP iz 2. i 4. |

(2)

1. $\neg A$	hipoteza
2. A	hipoteza
3. $\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Ax1
4. $\neg B \Rightarrow \neg A$	MP iz 1. i 3.
5. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	Ax3
6. $A \Rightarrow B$	MP iz 4. i 5.
7. B	MP iz 2. i 6.

(3) Na osnovu stava dedukcije, dovoljno je dokazati $\neg\neg A \vdash_g A$.

1. $\neg\neg A$	hipoteza
2. $\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A)$	(2) i Stav dedukcije
3. $\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A$	MP iz 1. i 2.
4. $(\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$	Ax3
5. $\neg\neg A \Rightarrow A$	MP iz 3. i 4.
6. A	MP iz 1. i 5.

(4) Na osnovu stava dedukcije, dovoljno je dokazati $A \vdash_Q \neg\neg A$.

- | | |
|---|---------------|
| 1. A | hipoteza |
| 2. $\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$ | (3) |
| 3. $(\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$ | Ax3 |
| 4. $A \Rightarrow \neg\neg A$ | MP iz 2. i 3. |
| 5. $\neg\neg A$ | MP iz 1. i 4. |

(5) Dokazujemo $A \Rightarrow B \vdash_Q \neg B \Rightarrow \neg A$.

- | | |
|--|------------|
| 1. $A \Rightarrow B$ | hipoteza |
| 2. $(\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | Ax3 |
| 3. $\neg\neg A \Rightarrow A$ | (3) |
| 4. $\neg\neg A \Rightarrow B$ | (1) |
| 5. $B \Rightarrow \neg\neg B$ | (4) |
| 6. $\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$ | (1) |
| 7. $\neg B \Rightarrow \neg A$ | MP 6. i 2. |

Slično se dokazuje (6)-(10). $\square$

Povežimo sintaksna svojstva formula ($\vdash_{\mathcal{L}}$, teorema) i semantička ($\models$, tautologija). Razmotrićemo tri osnovna problema: neprotivrečnost, potpunost i odlučivost iskazne logike.

Teorema 2. (saglasnost iskaznog računa)

Svaka teorema iskaznog računa $\mathcal{L}$ je tautologija, tj.

$$\text{iz } \vdash_{\mathcal{L}} A \quad \text{sledi} \quad \models A.$$

Dokaz

Lako se proverava da su $Ax1$, $Ax2$ i $Ax3$ tautologije.

Neka je A teorema dužine dokaza n . Indukcijom po n dokažimo da je A tautologija.

- Ako je $n = 1$, formula A je aksioma, pa je i tautologija.
- Neka je $n > 1$ i neka su sve teoreme čija je dužina dokaza k ($k < n$) tautologije (indukcijska hipoteza).

Za teoremu A dužine dokaza n postoje dve mogućnosti:

- ▶ A je aksioma (pa i tautologija) ili
- ▶ A je dobijena iz prethodnih formula, npr. B_i i $B_i \Rightarrow A$, po pravilu MP.

nastavak dokaza

Tada A ima dokaz:

- 1. B_1
- $\vdots$
- $i. B_i$
- $\vdots$
- $j. B_i \Rightarrow A$
- $\vdots$
- $n. A$ MP iz i i j

Onda

$$\begin{array}{ll} \vdash_{\mathcal{L}} B_i & \text{dužine dokaza } i < n \\ \vdash_{\mathcal{L}} B_i \Rightarrow A & \text{dužine dokaza } j < n \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \models B_i \\ \models B_i \Rightarrow A \end{array} \quad (\text{po indukcijskoj hipotezi})$$

Tada

$$\models A. \quad \square$$

Teorema 3.(Gedel, Stav potpunosti)

$$\vdash_{\mathcal{L}} A \quad \text{akko} \quad \models A$$

(tj. formula iskaznog računa je teorema akko je tautologija).

Može se dokazati sledeće uopštenje Stava potpunosti:

Teorema 4.

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \quad \text{akko} \quad \Gamma \models A.$$

Teorema 5.

Iskazni račun $\mathcal{L}$ je odlučiv.

Dokaz

Neka je A proizvoljna formula.

- Tada postoji postupak kojim se u konačno mnogo koraka može proveriti da li je formula A tautologija (istinitosna tablica, na primer).
- Kako je $\vdash_{\mathcal{L}} A$ akko $\models A$, sledi da postoji postupak kojim se u konačno mnogo koraka može proveriti da li je formula A teorema. $\square$.

Neprotivrečnost iskaznog računa

Definicija

Iskazni račun je **neprotivrečan** akko ne postoji formula A takva da je $\vdash_{\mathcal{Q}} A$ i $\vdash_{\mathcal{Q}} \neg A$.

Teorema 6.

Iskazni račun $\mathcal{Q}$ je neprotivrečan.

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji formula A takva da $\vdash_{\mathcal{Q}} A$ i $\vdash_{\mathcal{Q}} \neg A$. Tada, po stavu potpunosti sledi $\models A$ i $\models \neg A$, što je nemoguće. $\square$

Prirodna dedukcija

Prirodna dedukcija je formalna teorija izgrađena nad alfabetom

$S = \{p_1, \dots, p_n, \dots, \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, \perp, (,)\}$.

Skup formula je izgrađen na uobicajen način (po definiciji formule iskazne logike) pomoću simbola iz S .

Simboli $\Leftrightarrow$ i $\top$ se uvode definicijama:

$A \Leftrightarrow B$ je zamena za $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$,

$\top$ je zamena za $\neg \perp$.

Neka je $\mathcal{F}$ proizvoljan skup iskaznih formula i A iskazna formula. Zapis

$\mathcal{F} \vdash_S A$ se zove **sekvent**.

Pravila izvođenja

Sekvent $\mathcal{F} \vdash_S A$ je dokaziv ako se može dobiti primenom sledećih pravila konačan broj puta:

aksioma:

$$\frac{}{\mathcal{F}, A \vdash_S A} (ax)$$

uvođenje implikacije:

$$\frac{\mathcal{F}, A \vdash_S B}{\mathcal{F} \vdash_S A \Rightarrow B} (\Rightarrow_U)$$

uvođenje konjunkcije:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash_S A, \mathcal{F} \vdash_S B}{\mathcal{F} \vdash_S A \wedge B} (\wedge_U)$$

uvođenje disjunkcije:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash_S A}{\mathcal{F} \vdash_S A \vee B} (\vee_U^I) \quad \frac{\mathcal{F} \vdash_S B}{\mathcal{F} \vdash_S A \vee B} (\vee_U^d)$$

uvođenje negacije:

$$\frac{\mathcal{F}, A \vdash_S \perp}{\mathcal{F} \vdash_S \neg A} (\neg_U)$$

klasična protivrečnost:

$$\frac{\mathcal{F}, \neg A \vdash_S \perp}{\mathcal{F} \vdash_S A} (\perp_C)$$

slabljenje:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash_S A}{\mathcal{F}, B \vdash_S A} (slab)$$

eliminacija implikacije:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash_S A \Rightarrow B, \mathcal{F} \vdash_S A}{\mathcal{F} \vdash_S B} (\Rightarrow_E)$$

eliminacija konjunkcije:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash_S A \wedge B}{\mathcal{F} \vdash_S A} (\wedge_E^I) \quad \frac{\mathcal{F} \vdash_S A \wedge B}{\mathcal{F} \vdash_S B} (\wedge_E^d)$$

eliminacija disjunkcije:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash_S A \vee B, \mathcal{F}, A \vdash_S C, \mathcal{F}, B \vdash_S C}{\mathcal{F} \vdash_S C}$$

eliminacija negacije:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash_S \neg A, \mathcal{F} \vdash_S A}{\mathcal{F} \vdash_S \perp} (\neg_E)$$

Direktan dokaz

- Ako je sekvent $\mathcal{F} \vdash_S A$ dokaziv onda kažemo da je formula A **sintaksna posledica** skupa formula $\mathcal{F}$.
- Specijalno, ako $\emptyset \vdash_S A$ kažemo da je formula A teorema i pišemo $\vdash_S A$.
- Direktan dokaz da je $\vdash_S A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \dots))$ svodi se (korišćenjem $\Rightarrow_U$) na izvođenje sekventa $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash_S A_n$.

Example

Dokazati $\vdash_S (A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$. Dokažimo sekvent

$A \wedge B \Rightarrow C, A, B \vdash_S C$.

- $A \wedge B \Rightarrow C, A, B \vdash_S A \wedge B \Rightarrow C$ (ax)
- $A \wedge B \Rightarrow C, A, B \vdash_S A$ (ax)
- $A \wedge B \Rightarrow C, A, B \vdash_S B$ (ax)
- $A \wedge B \Rightarrow C, A, B \vdash_S A \wedge B$ ($\wedge_U, 2, 3$)
- $A \wedge B \Rightarrow C, A, B \vdash_S C$ ($\Rightarrow_E, 1, 4$)
- $A \wedge B \Rightarrow C, A \vdash_S B \Rightarrow C$ ($\Rightarrow_U, 5$)
- $A \wedge B \Rightarrow C \vdash_S A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ ($\Rightarrow_U, 6$)
- $\vdash_S (A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ ($\Rightarrow_I, 6$)

Indirektan dokaz

Indirektan dokaz da je $\vdash_S A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \dots))$ svodi se na dokazivanje sekventa $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, \neg A_n \vdash_S \perp$ (uz korišćenje $\perp_C$).

Example

Dokazati

$$\vdash_S (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A).$$

Dokažimo sekvent

$$\neg A \Rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash_S \perp.$$

1. $\neg A \Rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash_S \neg A \Rightarrow \neg B$ (ax)
2. $\neg A \Rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash_S \neg A$ (ax)
3. $\neg A \Rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash_S \neg B$ ($\Rightarrow_E$, 1, 2)
4. $\neg A \Rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash_S B$ (ax)
5. $\neg A \Rightarrow \neg B, B, \neg A \vdash_S \perp$ ($\neg_E$, 3, 4)
6. $\neg A \Rightarrow \neg B, B \vdash_S A$ ($\perp_C$, 5)
7. $\neg A \Rightarrow \neg B \vdash_S B \Rightarrow A$ ($\Rightarrow_U$, 6)
8. $\vdash_S (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ ($\Rightarrow_U$, 7)

Dokaz sa dodatnim pretpostavkama

Ponekad je pogodno dodavati pretpostavke.

Example

Dokazati

Dokažimo sekvent $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B) \vdash_S \perp$, tako što ćemo skupu hipoteza dodati hipoteze A i B .

1. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B), A, B \vdash_S A$ (ax)
2. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B), A, B \vdash_S B$ (ax)
3. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B), A, B \vdash_S A \wedge B$ ($\wedge_U, 1, 2$)
4. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B), A, B \vdash_S \neg(A \wedge B)$ (ax)
5. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B), A, B \vdash_S \perp$ ($\neg_E, 3, 4$)
6. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B), A \vdash_S \neg B$ ($\neg_U, 5$)
7. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B), A \vdash_S \neg A \vee \neg B$ ($\vee_U^d, 6$)
8. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B), A \vdash_S \neg(\neg A \vee \neg B)$ (ax)
9. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B), A \vdash_S \perp$ ($\neg_E, 7, 8$)
10. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B) \vdash_S \neg A$ ($\neg_U, 9$)
11. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B) \vdash_S \neg A \vee \neg B$ ($\vee_U^I, 10$)
12. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B) \vdash_S \neg(\neg A \vee \neg B)$ (ax)
13. $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B) \vdash_S \perp$ ($\neg_E, 11, 12$)
14. $\neg(A \wedge B) \vdash_S \neg A \vee \neg B$ ($\perp_C, 13$)

Stav potpunosti

Stav potpunosti

$$\mathcal{F} \models A \text{ akko } \mathcal{F} \vdash_S A.$$

Dakle, formula iskaznog računa je semantička posledica nekog skupa formula akko je sintaksna posledica tog skupa formula, odnosno akko se može izvesti iz tog skupa formula.

Specijalno, ako je $\mathcal{F} = \emptyset$, dobijamo:

$$\models A \text{ akko } \vdash_S A,$$

tj. formula iskaznog računa je tautologija akko je teorema.