

1 Дирихлеов проблем за круг

Проблем се састоји у следећем:

Одредити функцију U која унутар круга $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 = a^2\}$ задовољава Лапласе-ову једначину

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

и која на кругу S има дату вредност $f(x)$, тј. $U|_S = f(x)$.

Овај проблем решаваћемо у поларним координатама (r, φ) , дефинисаним са $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Овом сменом једначина (1.1) се своди на

$$(1.2) \quad r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

Претпоставимо да једначина (1.2) има решење облика $U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Заменом у (1.2) добијамо

$$r^2 R''(r)\Phi(\varphi) + rR'(r)\Phi(\varphi) + R(r)\Phi''(\varphi) = 0,$$

тј.

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda$$

где је λ константа. Одавде следује

$$(1.3) \quad \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0,$$

$$(1.4) \quad r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0.$$

Опште решење једначине (1.3) за $\lambda > 0$ дато је са

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda}\varphi + B \sin \sqrt{\lambda}\varphi,$$

а једначине (1.4), која је Euler-овог типа, са

$$R(r) = Cr^{\sqrt{\lambda}} + Dr^{-\sqrt{\lambda}},$$

где су A, B, C, D произвољне константе.

Ако је $\lambda = 0$, тада је решење једначине (1.3)

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi,$$

а једначине (1.4)

$$R(r) = C + D \ln r.$$

Према томе, имамо следећа (партикуларна) решења једначине (1.1):

$$(1.5) \quad U(r, \varphi) = (Cr^{\sqrt{\lambda}} + Dr^{-\sqrt{\lambda}})(A \cos \sqrt{\lambda}\varphi + B \sin \sqrt{\lambda}\varphi) \quad \text{за } \lambda > 0,$$

$$(1.6) \quad U(r, \varphi) = (C + D \ln r)(A + B\varphi) \quad \text{за } \lambda = 0,$$

где су A, B, C, D произвољне константе.

Одредимо сада те константе тако да добијемо решење постављеног проблема.

Додавање броја 2π променљивој φ одговара обиласку око круга, при томе функција мора имати исту вредност, што значи да је функција U периодична са периодом 2π , тј. добијамо $U(r, \varphi) = U(r, \varphi + 2\pi)$. Да би ово било постигнуто, морамо узети у (1.5) да је $\sqrt{\lambda} = k$, где је $k = 1, 2, \dots$, а у (1.6) да је $B = 0$. Тиме добијамо решења

$$U_0(r, \varphi) = (C_0 + D_0 \ln r)A_0,$$

$$U_k(r, \varphi) = (C_k r^k + D_k r^{-k})(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi), \text{ за } k = 1, 2, \dots$$

Даље, пошто решавамо унутрашњи проблем, једино за $D_0 = D_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$ функција U нема сингуларитет у тачки $r = 0$, тј. тачки $(0, 0)$. Уведимо ознаке $P_0 = C_0 A_0$, $P_k = C_k A_k$, $Q_k = C_k B_k$.

На основу претходног имамо следеће решење

$$U_0(r, \varphi) = P_0,$$

$$U_k(r, \varphi) = r^k (P_k \cos k\varphi + Q_k \sin k\varphi), \text{ за } k = 1, 2, \dots$$

Користећи се принципом линеарне суперпозиције, добијамо решење

$$(1.7) \quad U(r, \varphi) = P_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k (P_k \cos k\varphi + Q_k \sin k\varphi).$$

Са друге стране, дато је да функција U узима на кругу S прописану вредност, $U(r, \varphi)|_S = U(a, \varphi) = f(\varphi)$, где је f дата функција. Примењујући тај услов на (1.7) добијамо

$$f(\varphi) = U(a, \varphi) = P_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a^k (P_k \cos k\varphi + Q_k \sin k\varphi),$$

узимајући да је $P_0 = \frac{\alpha_0}{2}$, $P_k = \frac{\alpha_k}{a^k}$ и $Q_k = \frac{\beta_k}{a^k}$ имамо

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi),$$

одакле следује

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi.$$

То значи да (1.7), где су коефицијенти P_0 , P_k и Q_k дати на претходни начин, представља решење постављеног Dirichlet-овог проблема.

Дакле, решење Дирихлеовог проблема за круг дато је са

$$U(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi).$$

Напомена 1. Спољашњи гранични проблем се слично решава (случај $r > a$). За спољашњи проблем узимамо да су константе $D_0 = 0$, $C_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, и добијамо решење

$$U(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi).$$

Напомена 2. Приликом решавања проблема унутар прстена функција U дата је са

$$U = b + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k (\bar{A}_k \cos k\varphi + \bar{B}_k \sin k\varphi) + a \ln r + \sum_{k=1}^{+\infty} r^{-k} (\bar{C}_k \cos k\varphi + \bar{D}_k \sin k\varphi),$$

а добијамо је из услова да је $U(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(r, \varphi)$.