Odabrana poglavlja algebre i logike

30. oktobar 2019.

Predikatska logika I reda - PR^1

- Iskazna logika se bavi iskazima kao celinama i odnosima među njima, ne ulazeći u njihovu unutrašnju strukturu.
- Iskaznim formulama se ne mogu zapisati mnoge rečenice koje su u svakodnevnoj upotrebi u matematici (na primer "Svaki prirodni broj ima sledbenika", "Jednačina $x + 2 = 0$ ima jedinstveno rešenje u skupu realnih brojeva" itd.).
- Jezik predikatske logike se dobija proširivanjem jezika iskazne logike, kako bi se dobio dovoljno bogat jezik da se njime može opisati neka matematička struktura.

  Operacijsko-relacijsku matematičku strukturu čine neprazan skup (nosač ili domen) i na njemu definisane relacije i operacije i izdvojen skup istaknutih elemenata-konstanti.
- Kao i u iskaznoj logici, centralni problemi u predikatskoj logici su ispitivanje da li je data formula valjana i da li je data formula zadovoljiva. **Za razliku od iskazne logike, ne postoje efektivni algoritmi za rešavanje ovih problema**.

Jezik predikatske logike

Jezik predikatske logike se sastoji iz skupa logičkih i skupa nelogičkih simbola.
Skup logičkih simbola čine:

- $Var = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$- prebrojiv skup promenljivih
- $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ - znaci iskaznih veznika
- $\forall, \exists$ - univerzalni i egzistencijalni kvantifikator
- znak jednakosti =
- , ( ) - pomoćni znaci (zagrade i zarez).

Skup nelogičkih simbola čine:

- operacijski znaci sa odgovarajućim dužinama: npr. $f, g, h, f_1, g_1, *, +, \ldots,$
- relacijski znaci sa odgovarajućim dužinama: npr. $R, Q, S, R_1, Q_1, S_1, \alpha, \beta, \leq, >, \ldots,$
- znaci konstanti: $a, b, c, a_1, b_1, 0, 1, 5, \top, \pi \ldots.$

Kako je izbor nelogičkih simbola promenljiv i zavisi od tipa strukture koju opisujemo (dok je skup logičkih simbola fiksiran), odgovarajući jezik $\mathcal{L}$ zadajemo navođenjem samo nelogičkih simbola.
Pod jezikom $\mathcal{L}$ podrazumevamo uniju tri međusobno disjunktna skupa

$$\mathcal{L} = Rel_{\mathcal{L}} \cup Fun_{\mathcal{L}} \cup Cons_{\mathcal{L}}$$

koje nazivamo:

- $Rel_{\mathcal{L}}$ - skup relacijskih simbola jezika $\mathcal{L}$,
- $Fun_{\mathcal{L}}$ - skup operacijskih simbola jezika $\mathcal{L}$ i
- $Cons_{\mathcal{L}}$ - skup simbola konstanti,

zajedno sa funkcijom arnost (dužina) koja svakom relacijskom i svakom operacijskom znaku dodeljuje neki prirodni broj, tj.

$$ar : Rel_{\mathcal{L}} \cup Fun_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}.$$

Termi (izrazi) jezika $\mathcal{L}$

Od promenljivih, zagrada, simbola konstanti i operacijskih simbola jezika $\mathcal{L}$ grade se izrazi ili termi, prema sledećim pravilima.

Definicija terma (izraza)

(1) Promenljive i simboli konstanti su termi.

(2) Ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi i f operacijski znak dužine n, onda je $f(t_1, \ldots, t_n)$ term.

(3) Termi se dobijaju samo primenom (1) i (2) konačan broj puta.

Skup svih terma jezika $\mathcal{L}$ označavaćemo sa $Term_{\mathcal{L}}$.

Napomene.

(1) Ako je f operacijski znak dužine 2 često se term $f(t_1, t_2)$ zapisuje u obliku $(t_1 f t_2)$ (umesto $*(x, y)$ možemo pisati $(x * y)$, umesto $*(*(x, y), 1)$ pišemo $((x * y) * 1)$ i slično).

(2) Ako su $x_1, \ldots, x_n \in Var$, $t \in Term_{\mathcal{L}}$, onda oznaka $t(x_1, \ldots, x_n)$ znači da su sve promenljive terma t iz skupa $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Atomske formule

Povezivanjem izraza relacijskim znacima dobijaju se najjednostavnije formule koje se zovu atomske ili elementarne formule.

Definicija atomske formule

Ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi i R relacijski znak arnosti n, onda su

- $R(t_1, \ldots, t_n)$
- $t_1 = t_2$

elementarne (atomske) formule.

Skup atomskih formula jezika $\mathcal{L}$ označavaćemo sa $At_{\mathfrak{L}}$.

Napomene.

(1) Ako je R relacijski znak dužine 2, t_1, t_2 termi, uobičajeno je da se umesto prefiksne notacije $R(t_1, t_2)$ koristi infiksna notacija $t_1 R t_2$.

(2) Često se umesto slovnih oznaka koriste znaci

- $+, \cdot, *, \wedge, \vee, \cup, \cap, \circ, \ldots$ kao simboli binarnih operacija,
- $=, \leq, <, \subseteq, \sim, \equiv, \ldots$ kao simboli binarnih relacija.

Predikatske formule

Definicija predikatske formule

(1) Atomske formule su (predikatske) formule.

(2) Ako su φ i ψ formule i x promenljiva, onda su i $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $(\forall x)\varphi$ i $(\exists x)\varphi$ formule.

(3) Formule se mogu dobiti samo primenom (1) i (2) konačan broj puta.

Skup svih formula jezika $\mathcal{L}$ označavaćemo sa $For_{\mathcal{L}}$.
Dakle,

$$\begin{aligned}
&For^0_{\mathcal{L}} = At_{\mathcal{L}},\\
&For^{n+1}_{\mathcal{L}} = For^n_{\mathcal{L}} \cup \left\{\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), \ldots, (\exists x)\varphi | \varphi, \psi \in For^n_{\mathcal{L}}, x \in V\right\}\\
&For_{\mathcal{L}} = \bigcup_{n \geq 0} For^n_{\mathcal{L}}.
\end{aligned}$$

Na ovaj način definisana je i funkcija složenost formule, $sl : For_{\mathcal{L}} \to N \cup \{0\}$ sa

$$sl(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi \in At_{\mathcal{L}} \\ n, & \varphi \notin At_{\mathcal{L}} \text{ i } \varphi \in For^n_{\mathcal{L}} \setminus For^{n-1}_{\mathcal{L}} \end{cases}$$

Napomena. U PR[1] dozvoljeno je kvantifikovanje samo promenljivih. Postoje predikatski računi višeg reda i u njima je moguće kvantifikovati i operacijske i relacijske znake.

Radi jednostavnijeg i preglednijeg zapisa formula primenjuju se dogovori o

- brisanju spoljašnjih zagrada,
- prioritetu logičkih veznika: $\forall, \exists;\ \neg;\ \wedge, \vee;\ \ \Rightarrow, \Leftrightarrow$,
- blok kvantifikatora iste vrste skupljamo u jedan kvantifikator, tj umesto $(\forall x_1)(\forall x_2)\dots\forall x_n)\varphi$ pišemo $\forall x_1, x_2, \dots, x_n varphi$.

Neka je φ formula i x promenljiva. Kažemo da je u formuli

$$(\forall x)\,\varphi$$

promenljiva x vezana univerzalnim kvantifikatorom, kao i da je formula φ oblast dejstva ovog kvantifikatora.
Slično za formulu $(\exists x)\,\varphi$.

Example

$(\forall x)\varphi \Rightarrow \psi$ - oblast dejstva univerzalnog kvantifikatora je formula φ,
$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi)$ - oblast dejstva univerzalnog kvantifikatora je formula $\varphi \Rightarrow \psi$.

Slobodne i vezane promenljive

- Ako je promenljiva x u formuli φ pod dejstvom kvantifikatora (tj. ona se javlja u potformuli oblika $(\forall x)\psi$ ili $(\exists x)\psi$), kažemo da je to pojavljivanje promenljive x vezano. U suprotnom, pojavljivanje promenljive je slobodno.
- Moguće je da promenljiva u istoj formuli ima i slobodna i vezana pojavljivanja.
- Za promenljivu čija su sva pojavljivanja u formuli φ vezana, kažemo da je vezana promenljiva. U suprotnom (ako promenljiva ima bar jedno slobodno pojavljivanje u formuli φ) kažemo da je promenljiva slobodna.

Example

U formuli

$$(\forall x)(R(y) \Rightarrow (\exists y)S(x, f(y)))$$

(jezika $\mathcal{L} = \{R, S\} \cup \{f, g\} \cup \{c\}$, gde je $ar(f) = ar(R) = 1,\ ar(g) = ar(S) = 2$),

- promenljiva x ima samo vezana pojavljivanja,
- promenljiva y ima i slobodna (prvo pojavljivanje) i vezana (drugo i treće) pojavljivanja.

Dakle, u datoj formuli promenljiva x je vezana, a promenljiva y je slobodna.

Ako je φ neka formula jezika $\mathcal{L}$, zapis $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ označava da su sve slobodne promenljive formule φ neke od promenljivih $x_1, \dots, x_n$ (ne moraju biti sve).

Definicija

Formula bez slobodnih promenljivih naziva se zatvorena formula ili rečenica.

Example

Na jeziku $\mathcal{L} = \{\leq\} \cup \{*\} \cup \{1\}$, $ar(*) = ar(\leq) = 2$,

- formule $(\forall x)(\neg x \leq 1 \Rightarrow (\exists y)x * y = 1)$, $(\forall x)(\forall y)x * y = y * x$, $1 = 1$ su rečenice
- $(\forall x)x \leq 1 \Rightarrow (\exists y)x \leq y$ nije rečenica, jer je promenljiva x slobodna.

Radi jednostavnijeg zapisivanja formula, ako jezik $\mathcal{L}$ sadrži simbol $\in$, mogu se uvesti ograničeni kvantifikatori:
$(\exists x \in S)\varphi(x)$ je zamena za formulu $(\exists x)(x \in S \wedge \varphi(x))$,
$(\forall x \in S)\varphi(x)$ je zamena za formulu $(\forall x)(x \in S \Rightarrow \varphi(x))$.
Mogu se uvesti i brojčani kvantifikatori "postoji tačno jedno", "postoji bar dva", postoji najviše jedan" i sl.
Na primer, "postoji tačno jedan" uvodimo na sledeći način:

$$(\exists_1 x)\varphi(x) \text{ je zamena za } (\exists x)(\varphi(x) \wedge (\forall y)(\varphi(y) \Rightarrow y = x)).$$

Definicija

Pod interpretacijom jezika $\mathcal{L} = Rel_{\mathcal{L}} \cup Fun_{\mathcal{L}} \cup Cons_{\mathcal{L}}$ *podrazumevamo uređeni par* (M, I)*, gde je M neprazan skup koji nazivamo domen interpretacije, a I je funkcija koja*

- *svakom relacijskom znaku* $R \in Rel_{\mathcal{L}}$ *dužine n dodeljuje jednu relaciju* $R^{\mathbf{M}}$ *dužine n na skupu M, tj.* $I(R) = R^{\mathbf{M}}$, *gde je* $R^{\mathbf{M}} \subseteq M^n$,
- *svakom operacijskom znaku* $f \in Fun_{\mathcal{L}}$ *dužine n dodeljuje jednu operaciju* $f^{\mathbf{M}}$ *dužine n na skupu M, tj.* $I(f) = f^{\mathbf{M}}$, *gde je* $f^{\mathbf{M}} : M^n \to M$,
- *svakom znaku konstante* $c \in Cons_{\mathcal{L}}$ *dodeljuje jedan element* $c^{\mathbf{M}}$ *skupa M, tj.* $I(c) = c^{\mathbf{M}}$, *gde je* $c^{\mathbf{M}} \in M$.

Struktura

$$\mathbf{M} = (M,\ R^{\mathbf{M}}, \ldots, f^{\mathbf{M}}, \ldots, c^{\mathbf{M}}, \ldots)$$

se zove model jezika $\mathcal{L} = \{R, \ldots, f, \ldots, c, \ldots\}$.

Example

Modeli jezika $\mathcal{L} = \{S, f\}$, $Rel_{\mathcal{L}} = \{S\}, Fun_{\mathcal{L}} = \{f\}$, $ar(S) = ar(f) = 2$ su, na primer,

- $(\mathbb{R}, <, +)$,
- $(\mathbb{R}, \leq, +)$,
- $(\mathbb{Z}, \leq, \cdot)$,
- $(\mathcal{P}(E), \subseteq, \cup)$.

dok $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathcal{P}(E), \cup, \setminus)$ nisu modeli datog jezika.

Napomena. Ponekad se koristi ista oznaka za simbol jezika i njegovu interpretaciju.
Npr. $\mathcal{L} = \{\leq, +, \cdot\}$ - jezik,
$\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$ - jedna interpretacija jezika $\mathcal{L}$.

Podmodeli

Definicija

Model $\mathbf{B}$ jezika $\mathcal{L}$ je podmodel modela $\mathbf{A}$ jezika $\mathcal{L}$, u oznaci $\mathbf{B} \preceq \mathbf{A}$, ako je:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$,
- $R^{\mathbf{B}} = R^{\mathbf{A}} \cap B^n$, za svako $R \in Rel_{\mathcal{L}}, ar(R) = n$,
- $F^{\mathbf{B}} = F^{\mathbf{A}} \upharpoonright B^m$, za svako $F \in Fun_{\mathcal{L}}, ar(F) = m$,
- $c^{\mathbf{B}} = c^{\mathbf{A}}$, za svako $c \in Cons_{\mathcal{L}}$.

Example

$(N, \leq, +, \cdot, 1) \preceq (R, \leq, +, \cdot, 1)$,
$(P(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X)$ nije podmodel od $(P(Y), \cup, \cap, ^c, \emptyset, Y)$, za $X \subseteq Y, X \neq Y$.

Teorema 1

Ako je **A** proizvoljan model jezika $\mathcal{L}$ i $\emptyset \neq B \subseteq A$, tada postoji jedinstven model **B** jezika $\mathcal{L}$ nad skupom B koji je podmodel od **A** akko
(1) $F^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_m) \in B$, za sve $F \in Fun_{\mathcal{L}}, ar(F) = m$ i sve $b_1, \ldots, b_m \in B$
(2) $c^{\mathbf{A}} \in B$, za sve $c \in Cons_{\mathcal{L}}$.

Teorema 2

Presek proizvoljne familije podmodela modela **A** je opet podmodel modela **A**.

Za $\emptyset \neq X \subset A$ za

$$[X]_{\mathbf{A}} = \bigcap \{B | X \subseteq B, \mathbf{B} \leq \mathbf{A}\}$$

kažemo da je podmodel od **A** generisan skupom X.

Homomorfizmi modela

Definicija

Neka su **A** i **B** modeli istog jezika $\mathcal{L}$. Preslikavanje $f : A \to B$ je homomorfizam modela **A** u model **B** ako:

(1) iz $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ sledi $(f(a_1), \dots, f(a_n)) \in R^{\mathbf{B}}$, za $R \in Rel_{\mathcal{L}}$, $ar(R) = n$ i sve $a_1, \dots, a_n \in A$;

(2) $f(F^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) = F^{\mathbf{B}}(f(a_1), \dots, f(a_n))$, za $F \in Fun_{\mathcal{L}}$, $ar(F) = n$ i sve $a_1, \dots, a_n \in A$;

(3) $f(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$, za sve $c \in Cons_{\mathcal{L}}$.

Homomorfizam f je jak homomorfizam ukoliko u (1) važi $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ akko $(f(a_1), \dots, f(a_n)) \in R^{\mathbf{B}}$.

Pojmovi epimorfizam, monomorfizam, izomorfizam, endomorfizam i automorfizam se definišu na uobičajen način.

Definicija

Preslikavanje $f : A \to B$ je utapanje ako je "1-1" i jak homomorfizam.

Definicija

Teorema

Ako je $f : A \to B$ homomorfizam modela **A** u model **B** tada je model
$\mathbf{f}[\mathbf{A}] = (f[A], R^{\mathbf{f}[\mathbf{A}]}, F^{\mathbf{f}[\mathbf{A}]}, c^{\mathbf{f}[\mathbf{A}]})$
dat sa

- $f[A] = \{f(a) | a \in A\}$
- $(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\mathbf{f}[\mathbf{A}]}$ ako $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$, za $R \in Rel_{\mathcal{L}}$, $ar(R) = n$ i sve $a_1, \ldots, a_n \in A$;
- $F^{\mathbf{f}[\mathbf{A}]}(f(a_1), \ldots, f(a_n)) = f(F^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n))$, za $F \in Fun_{\mathcal{L}}$, $ar(F) = n$ i sve $a_1, \ldots, a_n \in A$;
- $c^{\mathbf{f}[\mathbf{A}]} = f(c^{\mathbf{A}})$, za sve $c \in Cons_{\mathcal{L}}$,

podmodel modela **B**.

Valuacija. Vrednost terma

Definicija

Neka je **M** *model jezika* $\mathcal{L}$. *Preslikavanje* $\mu : Var \to M$ *zove se valuacija promenljivih u odnosu na domen* M. *Ako je* $\mu(x) = d$ *kažemo da je* d *vrednost promenljive* x *u valuaciji* μ.

Definicija

Vrednost terma t *jezika* $\mathcal{L}$ *u modelu* **M**, *za valuaciju* μ, *označavamo sa* $t^{\mathbf{M}}[\mu]$ *i definišemo indukcijom po složenosti terma* t *na sledeći način:*

- *ako je* t *promenljiva* x *onda je* $t^{\mathbf{M}}[\mu] = \mu(x)$;
- *ako je* t *simbol konstante* c, *onda je* $t^{\mathbf{M}}[\mu] = c^{\mathbf{M}}$;
- *ako je* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, *gde je* f *operacijski znak dužine* n, *a* $t_1, \ldots, t_n$ *termi, onda je* $t^{\mathbf{M}}[\mu] = f^{\mathbf{M}}(t_1^{\mathbf{M}}[\mu], \ldots, t_n^{\mathbf{M}}[\mu])$.

Iz definicije neposredno sledi da vrednost $t^{\mathbf{M}}[\mu]$ zavisi od vrednosti samo onih promenljivih od kojih je izgrađen term t. Zato za $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ i $\mu(x_i) = a_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$, umesto $t^{\mathbf{M}}[\mu]$ pišemo $t^{\mathbf{M}}[a_1, \ldots, a_n]$ ili samo $t[a_1, \ldots, a_n]$

Example

Neka je dat jezik
$\mathcal{L} = \{f, g, c\}, Fun_{\mathcal{L}} = \{f, g\},\ ar(f) = ar(g) = 2,\ Cons_{\mathcal{L}} = \{c\}$ i term
$t := f(x, g(y, c))$.

- U interpretaciji $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 1)$ za valuaciju $\mu = \begin{pmatrix} x & y & z\ldots \\ 2 & 5 & 3\ldots \end{pmatrix}$ vrednost terma t je
$$t^{\mathbf{R}}[\mu] = t^{\mathbf{R}}[2, 5] = 2 + 5 \cdot 1 = 7.$$
- U istoj interpretaciji za valuaciju $\nu = \begin{pmatrix} x & y & z\ldots \\ 1 & 0 & 0\ldots \end{pmatrix}$ isti term ima vrednost
$$t^{\mathbf{R}}[\nu] = t^{\mathbf{R}}[1, 0] = 1 + 0 \cdot 1 = 1.$$
- U interpretaciji $\mathbf{M} = (\{\top, \bot\}, \wedge, \vee, \top)$ za valuaciju $\mu = \begin{pmatrix} x & y & z\ldots \\ \top & \bot & \bot\ldots \end{pmatrix}$ isti term ima vrednost
$$t^{\mathbf{M}}[\mu] = \top \wedge (\bot \vee \top) = \top.$$

Vrednost predikatske formule

Za $a \in M$ i $x \in Var$, neka je $\mu\binom{x}{a} : Var \to M$, $\mu\binom{x}{a}(v_i) = \begin{cases} \mu(v_i), & v_i \neq x \\ a, & v_i = x \end{cases}$.

Definicija

Da je formula φ tačna za valuaciju μ u modelu **M** *jezika $\mathcal{L}$ označavamo sa* $\mathbf{M} \models \varphi[\mu]$ *(ili $\varphi^{\mathbf{M}}[\mu] = \top$) i definišemo indukcijom po složenosti formule φ na sledeći način:*

- *ako je φ formula $t_1 = t_2$, gde su t_1, t_2 termi, onda*
$$\mathbf{M} \models \varphi[\mu] \text{ akko } t_1^{\mathbf{M}}[\mu] = t_2^{\mathbf{M}}[\mu];$$
- *ako je φ atomska formula $R(t_1, \ldots, t_n)$ onda*
$$\mathbf{M} \models \varphi[\mu] \text{ akko } (t_1^{\mathbf{M}}[\mu], \ldots, t_n^{\mathbf{M}}[\mu]) \in R^{\mathbf{M}};$$
- *ako je $\varphi = \neg\psi$ onda $\mathbf{M} \models \varphi[\mu]$ akko ne važi $\mathbf{M} \models \psi[\mu]$;*
- *ako je $\varphi = \psi \wedge \theta$ onda*
$$\mathbf{M} \models \varphi[\mu] \text{ akko } \mathbf{M} \models \psi[\mu] \text{ i } \mathbf{M} \models \theta[\mu]$$
(slično za ostale veznike, uz pomoć istinitosnih tablica);
- *ako je $\varphi = (\forall x)\psi$ onda*
$$\mathbf{M} \models \varphi[\mu] \text{ akko } \mathbf{M} \models \psi[\mu\tbinom{x}{a}] \quad \textbf{za svako } a \in M;$$
- *ako je $\varphi = (\exists x)\psi$ onda*
$$\mathbf{M} \models \varphi[\mu] \text{ akko } \mathbf{M} \models \psi[\mu\tbinom{x}{a}] \quad \textbf{za neko } a \in M.$$

Pored oznake $\mathbf{M} \models \varphi[\mu]$ koristimo i oznake $(\mathbf{M}, \mu) \models \varphi$, kao i $\mathbf{M} \models_{\mu} \varphi$.

Napomene. (1) Ako $\mu, \lambda : Var \to M$ tako da je $\mu(v) = \lambda(v)$ za sve slobodne promenljive u φ, onda

$$\mathbf{M} \models \varphi[\mu] \text{ akko } \mathbf{M} \models \varphi[\lambda]$$

tj. tačnost formule $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ za valuacju μ u modelu $\mathbf{M}$ zavisi samo od $\mu(x_1), \ldots, \mu(x_n)$, pa ako je $\mu(x_1) = a_1, \ldots, \mu(x_n) = a_n$, onda umesto $\mathbf{M} \models \varphi[\mu]$ možemo pisati $\mathbf{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$

(2) Kako rečenice nemaju slobodnih promenljivih, njihova tačnost u nekoj interprertaciji ne zavisi od izbora valuacije. Drugim rečima, za svaku rečenicu φ jezika $\mathcal{L}$ i svaki model $\mathbf{M}$ ovog jezika važi:
ili $\mathbf{M} \models \varphi$ ili $\mathbf{M} \models \neg\varphi$.

Example

Neka je $\varphi = (\exists x)(\exists y)\neg x = y$. Tada
$\mathbf{M} \models \varphi$ akko $|M| \geq 2$

Model predikatske formule

Definicija

Model **M** *jezika* **L** *je model formule* φ*, u oznaci* $\mathbf{M} \models \varphi$*, ako je formula* φ *tačna za za svaku valuaciju* $\mu : Var \to M$*, tj. važi* $\mathbf{M} \models \varphi[\mu]$.
Ako nije $\mathbf{M} \models \varphi$ *onda kažemo da je* **M** *kontramodel za* φ *i pišemo* $\mathbf{M} \not\models \varphi$.

Example

(1) Formula $\varphi := (\forall x) f(x, y) = x$ jezika $\{f\}$, $ar(f) = 2$,

u strukturi $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \cdot)$ je tačna za valuaciju $\mu = \begin{pmatrix} x & y & \dots \\ 2 & 1 & \dots \end{pmatrix}$,

a netačna za valuaciju $\nu = \begin{pmatrix} x & y & \dots \\ 2 & 2 & \dots \end{pmatrix}$, tj. važi

$$\mathbf{R} \models \varphi[\mu] \quad \text{i} \quad \mathbf{R} \not\models \varphi[\nu].$$

To znači da interpretacija **R** nije model formule φ, tj.

$$\mathbf{R} \not\models \varphi.$$

(2) Formula $\psi := (\exists x)(\forall y) S(x, y)$ jezika $\mathcal{L} = \{S\}, ar(S) = 2$,

je netačna u strukturi $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \leq)$, a tačna u strukturi $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \leq)$, tj.

$$\mathbf{R} \not\models \psi, \qquad \mathbf{N} \models \psi.$$

Da u izomorfnim modelima jezika $\mathcal{L}$ važe iste rečenice jezika $\mathcal{L}$ kaže sledeća teorema.

Teorema

Ako je $f : \mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ izomorfizam, tada za svaku valuaciju $\mu : Var \to A$ i formulu $\varphi \in For_{\mathcal{L}}$ važi

$$\mathbf{A} \models \varphi[\mu] \text{ akko } \mathbf{B} \models \varphi[f \circ \mu] \; .$$

Example

$(Q, +, 0) \models (\forall x)(\exists y)y + y = x$,
$(Z, +, 0) \not\models (\forall x)(\exists y)y + y = x$
Zaključujemo:

- $(Q, +, 0) \not\cong (Z, +, 0)$
- tačnost rečenice u modelu ne mora se preneti na podmodel.

Teorema

Neka je $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Tada

(1) ako je φ formula bez kvantifikatora i $\mu : Var \to A$, tada $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ akko $\mathbf{B} \models \varphi[\mu]$,

(2) ako je φ univerzalna rečenica (tj. oblika $(\forall x_1, \ldots, x_n)\psi$, pri čemu je ψ bez kvantifikatora), tada iz $\mathbf{B} \models \varphi[\mu]$ sledi $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$,

(3) je φ egzistencijalna rečenica (tj. oblika $(\exists x_1, \ldots, x_n)\psi$, pri čemu je ψ bez kvantifikatora), tada iz $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ sledi $\mathbf{B} \models \varphi[\mu]$.

Valjane formule

Definicija

(a) *Formula* φ *jezika* $\mathcal{L}$ *je valjana, u oznaci* $\models \varphi$, *ako je tačna u svakom modelu jezika* $\mathcal{L}$, *tj. za svaki model* $\mathbf{M}$ *jezika* $\mathcal{L}$ *i svaku valuaciju* $\mu : Var \to M$ *važi* $\mathbf{M} \models \varphi[\mu]$.

(b) *Formula* φ *jezika* $\mathcal{L}$ *je zadovoljiva ako postoji interpretacija* $\mathbf{M}$ *jezika* $\mathcal{L}$ *i postoji valuacija* $\mu : Var \to M$ *tako da važi* $\mathbf{M} \models \varphi[\mu]$.

Kako postoji beskonačno mnogo interpretacija formula, problem ispitivanja tačnosti predikatske formule je mnogo složeniji nego u iskaznom računu. Može se dokazati da, u opštem slučaju, **ne postoji algoritam koji za svaku rečenicu može proveriti da li jeste ili nije valjana formula**.

Mnoge valjane formule se mogu dobiti iz tautologija.

Teorema

Ako je $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ tautologija i $\psi_1, \dots, \psi_n$ predikatske formule, tada je predikatska formula $\varphi(\psi_1, \dots, \psi_n)$ dobijena iz φ zamenom svakog iskaznog slova p_j predikatskom formulom ψ_j, za $j = 1, \dots, n$, valjana formula.

Valjane formule dobijene iz tautologija na način opisan u prethodnoj teoremi zovu se izvodi tautologija.

Example

Ako su φ i ψ predikatske formule, onda je formula $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$ valjana, jer je izvod tautologije $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

Da nisu sve valjane formule izvodi tautologija pokazuje sledeći primer.

Example

Formula

$$\neg(\forall x)\varphi \Leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi$$

je valjana, a nije izvod tautologije.

Valjane formule i njihova svojstva

Valjane formule su formule koje su tačne u svakoj interpretacije. Zato one predstavljaju osnovne zakonitosti mišljenja i zaključivanja.

(1) $\neg(\forall x)\varphi \Leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi$ De Morganovi zakoni

(2) $\neg(\exists x)\varphi \Leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi$ za kvantifikatore

(3) $(\forall x)(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\forall x)\varphi \wedge (\forall x)\psi$

(4) $(\exists x)(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x)\varphi \vee (\exists x)\psi$

(5) $(\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi \Rightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi)$

(ali $(\forall x)(\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi$ nije valjana,

npr. u interpretaciji $(\mathbb{N}, \varphi^{\mathcal{N}}, \psi^{\mathcal{N}})$, gde je

$\varphi^{\mathbf{N}}(x)$-" x je paran broj", a $\psi^{\mathbf{N}}(x)$-"x je neparan broj", ova formula nije tačna.)

(6) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\exists x)\varphi \wedge (\exists x)\psi$

(ali $(\exists x)\varphi \wedge (\exists x)\psi \Rightarrow (\exists x)(\varphi \wedge \psi)$ nije valjana)

(7) $(\forall x)(\forall y)\varphi \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi$

(8) $(\exists x)(\exists y)\varphi \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi$

(9) $(\exists x)(\forall y)\varphi \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\varphi$

(ali $(\forall y)(\exists x)\varphi \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\varphi$ nije valjana, kontramodel:

Ako x nije slobodna promenljiva formule ψ onda su i sledeće formule valjane:

(10) $(\forall x)(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\forall x)\varphi \vee \psi$

(11) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\exists x)\varphi \wedge \psi$

(12) $(\forall x)(\psi \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\psi \Rightarrow (\forall x)\varphi)$

Označimo sa $\varphi(y/x)$ formulu dobijenu iz formule φ zamenom promenljive x promenljivom y. Tada važi:

(13) $(\forall x)\varphi \Leftrightarrow (\forall y)\varphi(y/x)$, pri čemu se promenljiva y ne pojavljuje u φ

(14) $(\exists x)\varphi \Leftrightarrow (\exists y)\varphi(y/x)$, pri čemu se promenljiva y ne pojavljuje u φ

(15) $(\forall x)\varphi \Rightarrow \varphi(t/x)$, gde je term t slobodan za promenljivu x u formuli φ (tj. zamenom x sa t u φ ne dolazi do vezivanja nijedne promenljive iz t).

Istaknimo i neka jednostavnija svojstva valjanih formula.

Teorema

Ako su φ i $\varphi \Rightarrow \psi$ valjane formule onda je i ψ valjana formula.

Teorema

Formula φ je valjana akko je formula $(\forall x)\varphi$ valjana, tj.

$$\models \varphi \text{ akko } \models (\forall x)\varphi.$$

Definicija

Interpretacija $\mathbf{M}$ *je model skupa formula* $\mathcal{F}$, *u oznaci* $\mathbf{M} \models \mathcal{F}$, *ako je model svake formule iz* $\mathcal{F}$, *tj. za svaku formulu* $\varphi \in \mathcal{F}$ *važi* $\mathbf{M} \models \varphi$.

Neka je $\mathcal{F}$ skup predikatskih formula i φ neka formula. Kažemo da je φ logička posledica skupa $\mathcal{F}$, u oznaci $\mathcal{F} \models \varphi$, ako je svaki model za $\mathcal{F}$ istovremeno i model za φ. Preciznije,

Definicija

Formula φ *je* ***logička (semantička) posledica*** *skupa formula* $\mathcal{F}$ *ako za svaku interpretaciju* $\mathbf{M}$ *i svaku valuaciju* $\mu : Var \to M$ *važi:*
ako $\mathbf{M} \models F[\mu]$ *za sve formule* $F \in \mathcal{F}$, *onda i* $\mathbf{M} \models \varphi[\mu]$.

Posebno, $\psi \models \varphi$ ako je svaki model formule ψ model i formule φ.

Definicija

Formule φ *i* ψ *su* ***logički (semantički) ekvivalentne***, *u oznaci* $\varphi \equiv \psi$, *ako je formula* $\varphi \Leftrightarrow \psi$ *valjana,tj. akko za svaku interpretaciju* $\mathbf{M}$ *i svaku valuaciju* μ *domena* M *važi:* $\mathbf{M} \models \varphi[\mu]$ *akko* $\mathbf{M} \models \psi[\mu]$.

Teorema zamene

Ako formula $F(\varphi)$ sadrži kao potformulu formulu φ i važi $\varphi \equiv \psi$, onda važi i $F(\varphi) \equiv F(\psi)$, gde je $F(\psi)$ formula dobijena od $F(\varphi)$ zamenom potformule φ formulom ψ.

Ovo tvrđenje nam omogućava da u formuli čija nas valjanost zanima proizvoljne potformule zamenjujemo njima ekvivalentnim, a da se valjanost formule ne menja. Takav postupak nazivamo ekvivalencijska transformacija.

Example

Dokazati da je $\models (\forall x)(\varphi(x) \to \psi(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x)(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x))$.
Primenom prethodne teoreme dobijamo

$$\begin{aligned} (\forall x)(\varphi(x) \to \psi(x)) &\equiv (\forall x)(\neg\varphi(x) \vee \psi(x)) \\ &\equiv (\forall x)\neg(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)) \quad \text{odakle sledi} \\ &\equiv \neg(\exists x)(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)) \end{aligned}$$

$\models (\forall x)(\varphi(x) \to \psi(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x)(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x))$.

Zamena slobodne promenljive izrazom

Često se u matematici pojavljuje potreba da se u formuli neka slobodna promenljiva zameni izrazom.
Postavlja se pitanje na koji način se to može obaviti, pa da se dobije formula logički ekvivalentana sa polaznom.
Posmatrajmo formulu

$$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(t)$$

gde je $A(t)$ formula dobijena iz $A(x)$ zamenom svih slobodnih pojavljivanja promenljive x termom t.
Da li je ova formula valjana?

Example

Neka je $A(x) = (\exists y)R(x, y)$, gde je R relacijski znak arnosti 2. Uzimajući za term t promenljivu y, tj. $t := y$, dobijamo da $A(t) = (\exists y)R(y, y)$, pa je cela formula

$$(\forall x)(\exists y)R(x, y) \Rightarrow (\exists y)R(y, y).$$

Ova formula nije valjana, jer postoji struktura u kojoj ona nije tačna, na primer struktura $(\mathbb{N}, <)$.

Može se pokazati da pomenuta formula $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(t)$ uz neke dodatne uslove jeste valjana.

Definicija

Za term t kažemo da je slobodan za promenljivu x u formuli A ukoliko su sve promenljive terma t slobodne u formuli dobijenoj nakon zamene slobodnih pojavljivanja promenljive x u formuli A termom t.

Example

Neka je $A = (\forall x)x \leq y$.

- Term $y + x_1$ je slobodan za promenljivu y u formuli A, jer zamenom y sa $y + x_1$ dobijamo formulu $(\forall x)x \leq y + x_1$ u kojoj su promenljive y i x_1 slobodne.
- Takođe je i term $z + x_2$ slobodan za y u formuli A.
- Međutim, term $x + y$ nije slobodan za y u formuli A, jer zamenom y sa $x + y$ dobijamo formulu $(\forall x)x \leq x + y$ u kojoj je promenljiva x terma t vezana promenljiva.

Teorema

Ako je $A(x)$ proizvoljna formula (u kojoj je x slobodna promenljiva) i term t slobodan za promenljivu x u formuli $A(x)$ (tj. zamenom x sa t u $A(x)$ ne dolazi do vezivanja nijedne promenljive iz t) onda je formula $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(t)$ valjana.

Example

1° $\models (\forall x)A(x) \Rightarrow A(c)$, gde je c simbol konstante

2° $\models (\forall x)A(x) \Rightarrow A(x)$

3° $\models (\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$, gde je y promenljiva koja se ne javlja u $A(x)$.

Da bismo ispravno izvršili zamenu slobodne promenljive x formule A termom t treba

- najpre preimenovati neke vezane promenljive formule A novim promenljivim, tako da sve vezane promenljive dobijene formule budu različite od svih slobodnih promenljivih formule A i svih promenljivih koje učestvuju u građenju terma t,
- zatim izrazom t zameniti svako slobodno pojavljivanje promenljive x u formuli dobijenoj nakon preimenovanja.

Example

Neka je

$$A = (\forall x)(\neg x = z \Rightarrow (\exists y)(x = y \vee z = y))$$

i želimo promenljivu z zameniti termom $x + y$.

- Term $x + y$ nije slobodan za promenljivu z u formuli A.
- Zato najpre vršimo preimenovanje vezanih promenljivih x i y novim promenljivim (koje moraju biti različite od z, x i y),
- a zatim u dobijenoj formuli promenljivu z zamenjujemo sa $x + y$.

Na taj način dobijamo, na primer, formulu

$$(\forall u)(\neg u = x + y \Rightarrow (\exists v)(u = v \vee x + y = v)),$$

ili formulu

$$(\forall x_1)(\neg x_1 = x + y \Rightarrow (\exists y_1)(x_1 = y_1 \vee x + y = y_1)).$$

Definicija

Formula φ je u preneksnoj formi *ako je oblika*

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\dots(Q_n x_n)\psi,$$

gde su $x_1, \dots, x_n$ različite promenljive, $Q_1, \dots, Q_n$ kvantifikatori, a ψ je formula bez kvantifikatora. Ako su svi kvantifikatori $Q_1, \dots, Q_n$ univerzalni, takva preneks forma se zove Skolemova forma.

Teorema.

Za svaku formulu predikatskog računa postoji njoj ekvivalentna formula koja je u preneksnoj formi.

Algoritam PRENEX:

(1.) Ukloniti sve $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ primenom zakona za uklanjanje implikacije i ekvivalencije

(2.) Dok god je moguće primenjivati zakone:

- iskazne De Morganove zakone
- De Morganove zakone za kvantifikatore
- zakon uklanjanja dvostruke negacije

  (da bi se simboli $\neg$ uklonili ili spustili do atomskih formula)

(3.) Ako je potrebno izvršiti preimenovanje vezanih promenljivih (kako bi se omogućio korak 4.)

(4.) Dok god je moguće primenjivati zakone "distributivnosti" kvantifikatora prema $\wedge$ i $\vee$ (valjane formule (3)-(4)i (10)-(11)), kako bi se kvantifikatori pomerali ulevo.

Example

Formulu $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$ napisati u preneks formi.

$$\begin{aligned}(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x) &\equiv \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)\\ &\equiv (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)Q(x)\\ &\equiv (\exists x)(P(x) \vee Q(x)))\end{aligned} .$$

Poslednja formula je u preneksnoj formi.

Example

Formulu $(\forall x)(U(y) \wedge (\forall y)(\exists z)(B(z,x) \Rightarrow B(F(v,y),z)))$ napisati u preneks formi.