ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТОПОЛОГИЈЕ

8.12.2019.

1. Нека је на скупу $\mathbb{R}$ дата фамилија скупова $\mathcal{B} = \{\{0, x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(а) [**2 поена**] Доказати да је $\mathcal{B}$ база неке топологије $\mathcal{T}$ на $\mathbb{R}$.

(б) [**1 поен**] Испитати да ли је тополошки простор $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ сепарабилан.

(в) [**1 поен**] Испитати да ли тополошки простор $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ задовољава прву аксиому пребројивости.

2. [**3 поена**] Описати најгрубљу топологију на $\mathbb{N}$ која садржи фамилију

$$\mathcal{S} = \{S_i = \{1, 2, \cdots, i\} \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

3. [**4 поена**] Испитати истинитост следећег исказа и ако је тачан доказати га, у супротном оповргнути. Тополошки простор $(X, \mathcal{T})$ је сепарабилан ако и само ако задовољава другу аксиому пребројивости.

4. (1) Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори и $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Испитати тачност следећих тврђења (ако је исказ тачан доказати га, у супротном оповргнути):

(а) [**2 поена**] $\overline{A \times B}^{X \times Y} = \overline{A}^X \times \overline{B}^Y$;

(б) [**2 поена**] $Ext_{X \times Y}(A \times B) = Ext_X A \times Ext_Y B$.

(2) [**2 поена**] Одредити $IntA$, $\overline{A}$ и ∂A скупа $A = [0, 1] \cup (2, +\infty)$ у тополошком простору $(\mathbb{R},\mathcal{T}_s)$.

5. Нека је X непребројив скуп и нека је $\mathcal{T}_p = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid U^c\text{-највише пребројив}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ тзв. ко-пребројива топологија.

(а) [**2 поена**] Доказати да је фамилија скупова $\mathcal{T}_p$ топологија на скупу X.

(б) [**3 поена**] Испитати да ли је пресликавање $f : (X, \mathcal{T}_k) \to (X, \mathcal{T}_p)$ дато са $f(x) = x$ непрекидно, отворено или затворено.

(в) [**1 поен**] Испитати да ли су $(X, \mathcal{T}_k)$ и $(X, \mathcal{T}_p)$ хомеоморфни тополошки простори.