СЕПАРАБИЛНОСТ МЕТРИЧКИХ ПРОСТОРА

Сепарабилне просторе можемо схватити као просторе који нису „огромни“. У таквим просторима увек постоји пребројив скуп који је „готово једнак“ целом простору јер се било који елемент простора може произвољно добро апроксимирати.

ДЕФИНИЦИЈА 1. *Нека је (X, d) метрички простор. X је сепарабилан ако у њему постоји највише пребројив свуда густ скуп.*

НАПОМЕНА. Ако је A свуда густ у X, то значи да је A „скоро једнак“ целом простору X.

ПРИМЕР 1. *Сепарабилни метрички простори су $(\mathbb{R}, d)$; $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $1 \leqslant p < +\infty$; $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$; $(C[a,b], d)$; (ℓ_p, d_p), $1 \leqslant p \leqslant +\infty$; (c, d); (c_0, d).* ♢

ПРИМЕР 2. *Простор $(\mathbb{R}^n, d_2)$ је сепарабилан јер је $\mathbb{Q}^n$ свуда густ у $\mathbb{R}^n$ и највише пребројив. Заиста, нека је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ произвољна тачка. Како је $\mathbb{Q}$ свуда густ у $\mathbb{R}$, за произвољно $\varepsilon > 0$ и свако $i = \overline{1,n}$ постоји $q_i \in \mathbb{Q}$ да је $|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Нека је $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$. Важи*

$$d(x, q) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - q_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Дакле, $\mathbb{Q}^n$ је свуда густ у $\mathbb{R}^n$, а како је $\mathbb{Q}^n$ пребројив скуп (производ највише пребројивих скупова је највише пребројив), онда је и скуп $\mathbb{R}^n$ сепарабилан. ♢

Следећа теорема је кључна при доказивању да неки метрички простор није сепарабилан.

ТЕОРЕМА 1. *Метрички простор (X, d) је сепарабилан ако и само ако је свака дисјунктна фамилија непразних отворених скупова у X највише пребројива.*

Доказ теореме нећемо наводити.

ПРИМЕР 3. *Простори m и $\mathcal{B}[a, b]$ нису сепарабилни.* ♢

ПРИМЕР 4. *Докажимо да простор m није сепарабилан. Посматрајмо следећи скуп*

$$A = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in m \mid \alpha_n = 0 \veebar \alpha_n = 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

Скуп A је непребројив у m. Нека су $x, y \in A$, $x \neq y$. Тада је

$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n(x) - \alpha_n(y)| = 1.$$

Уочимо фамилију кугли $K(x, 1/3) = \{z \in m \mid d(z, x) < 1/3\}$, $x \in A$. Тада за $x \neq y$ важи $K(x, 1/3) \cap K(y, 1/3) = \varnothing$. Наиме, ако би нека тачка x^* припадала овим двема куглама тада би важило $d(x, x^*) < 1/3$ и $d(y, x^*) < 1/3$, односно $d(x, y) < 2/3$, што је немогуће јер је $d(x, y) = 1$. Дакле, $\{K(x, 1/3) \mid x \in A\}$ је непребројива фамилија дисјунктних отворених скупова у простору m, па простор m није сепарабилан. ♢

Компактност метричких простора

Подсетимо се најпре Болцано-Вајерштрасове теореме.

Теорема 2. *Сваки ограничен низ реалних бројева има конвергентан подниз.*

Поставља се питање да ли овако тврђење важи у произвољном метричком простору. Одговор потражимо у следећем примеру.

Пример 5. *Нека је $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где је $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, јединица је на $n-$том месту. Јасно је да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $x_n \in \ell_p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Низ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је ограничен у ℓ_p јер $e_n \in K[\mathbf{0}, 1]$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Међутим, низ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нема конвергентан подниз јер*

$$d(e_m, e_n) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |e_m^i - e_n^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{2}, \quad m \neq n,$$

тј. ово растојање се не може учинити произвољно малим. $\diamondsuit$

Дефиниција 2. *Метрички простор (X, d) је компактан ако се из сваког његовог низа може издвојити конвергентан подниз.*

Напомена. За скуп и низ који ово задовољавају каже се да имају Болцаново својство.

Интуитивно схватање појма компактности је као генерализација појма коначности, тј. пружа нам коначну структуру за бесконачне скупове. Сепарабилност интуитивно можемо да схватамо као генерализацију пребројивости, па је самим тим компактност услов јачи од сепарабилности.

Дефиниција 3. *Нека је (X, d) метрички простор и $M \subseteq X$. Скуп M је релативно компактан ако се из сваког низа из M може издвојити конвергентан подниз у X.*

$$\text{релативна компактност} + \text{затвореност} \Leftrightarrow \text{компактност}$$

Када је у питању цео простор X, појмови компактност и релативна компактност се поклапају.

Теорема 3. *Сваки компактан метрички простор је комплетан.*

Доказ. Нека је (X, d) компактан метрички простор и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвољан Кошијев низ из X. Због компактности простора X постоји подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који конвергира у X, тј. $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x_0 \in X$. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоје $n_0' \in \mathbb{N}$ и $n_0'' \in \mathbb{N}$ тако да је

$$d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2},\ n_k > n \geqslant n_0', \quad \text{и} \quad d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2},\ k \geqslant n_0''.$$

За $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ и $n \geqslant n_0$ је

$$d(x_n, x_0) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon,$$

тј. низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира у X. Како смо посматрали произвољан Кошијев низ, закључујемо да је X комплетан. $\square$

ТЕОРЕМА 4. *Сваки компактан скуп је затворен.*

ДОКАЗ. Нека је M компактан скуп и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ из M такав да $x_n \to x_0$, $n \to +\infty$. Због компактности, постоји подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такав да $x_{n_k} \to x'$, $k \to +\infty$, и $x' \in M$. Због јединствености граничне вредности имамо $x' = x_0$, односно $x_0 \in M$. Дакле, M је затворен скуп. □

НАПОМЕНА. У овом доказу, као и у следећем, користићемо раније доказану теорему. $F \subseteq X$ *је затворен ако и само ако сваки низ из* F *који конвергира у* X *има лимес у* F.

ТЕОРЕМА 5. *Нека је* M *компактан скуп из метричког простора* (X, d) *и* $F \subseteq M$ *затворен скуп. Тада је и* F *компактан.*

ДОКАЗ. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвољан низ из $F \subseteq M$. Због компактности скупа M, постоји подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који конвергира у M, тј. $x_{n_k} \to x_0 \in M$, $k \to +\infty$. Пошто је F затворен скуп, следи да $x_0 \in F$, па је F компактан. □

НАПОМЕНА. Јасно је да ограничени скупови у $\mathbb{R}$ су релативно компактни. У опште случају, то није тачно (пример низа $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у ℓ_p). Међутим, једна друга особина, тотална ограниченост, ће бити од помоћи.

ДЕФИНИЦИЈА 4. *Нека је* (X, d) *метрички простор. За скуп* $A \subseteq X$ *кажемо да је тотално (потпуно) ограничен ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји коначно много тачака* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ *таквих да је* $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, \varepsilon)$. *Колекција тачака* $M_\varepsilon = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *назива се* $\varepsilon-$*мрежа скупа* A.

ТЕОРЕМА 6. *Сваки тотално ограничен скуп је и ограничен.*

ДОКАЗ. Ако је $\operatorname{diam} A$ диаметар скупа A тада је

$$\operatorname{diam} A \leqslant \operatorname{card}(M_\varepsilon) \cdot 2\varepsilon < +\infty,$$

јер коначан број кугли пречника 2ε покрива A. □

НАПОМЕНА. Обрнуто тврђење није тачно што показује пример скупа $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у ℓ_p.

НАПОМЕНА. У $\mathbb{R}^n$ појмови ограничен и тотално ограничен су еквивалентни.

ТЕОРЕМА 7. *Нека је* M *компактан скуп у* (X, d). *Тада је* M *тотално ограничен.*

ПОСЛЕДИЦА 1. *Компактан скуп* M *из* (X, d) *је ограничен и затворен.*

ПОСЛЕДИЦА 2. *Скуп* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *је компактан ако и само ако је ограничен и затворен.*

ДОКАЗ. $(\Rightarrow)$ Директно следи из последице 1.

$(\Leftarrow)$ Нека је M ограничен и затворен и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвољан низ из M. Тада је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен низ, па према Болцано-Вајерштрасовој теореми има конвергентан подниз, а због затворености скупа M, тај лимес је у M. □

ПРИМЕР 6. *На основу претходне теореме, лако је утврдити да ли су следећи скупови компактни.*

1. $\mathbb{R}$ *није компактан скуп, нити је било који отворен скуп компактан у* $(\mathbb{R}, d)$.

2. *Скуп* $[1,3] \cup [7,9]$ *јесте компактан у* $\mathbb{R}$.
3. *Скуп* $[1,3] \times [7,9]$ *јесте компактан у* $\mathbb{R}^2$.
4. *Скуп* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\}$ *није компактан у* $\mathbb{R}^2$.
5. *Нека је* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и* $r > 0$. *Тада* $K(x_0, r)$ *није компактан, док* $K[x_0, r]$ *јесте компактан у* $\mathbb{R}^n$.
6. *Скуп* $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *јесте компактан у* $\mathbb{R}$. ♢

НАПОМЕНА. Важно је нагласити да у последици 2 еквиваленција важи једино у случају простора $\mathbb{R}^n$. Следећи пример показује да у општем случају не важи тврђење.

ПРИМЕР 7. *Доказати да је скуп A затворен и ограничен у (X, d), али није компактан.*

1. $X = (0,1)$; $\quad d(x,y) = |x - y|,\ x, y \in (0,1)$; $\quad A = (0,1)$.

Очигледно је да је A затворен и ограничен. Посматрајмо низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из A дат са

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad , x_2 = \frac{3}{4}, \quad x_3 = \frac{5}{6}, \quad \ldots \quad x_n = 1 - \frac{1}{2n}, \quad \ldots$$

Из овог низа није могуће издвојити подниз који конвергира у A. Дакле, A није компактан.

2. $X = \mathbb{Q}$; $\quad d(p,q) = |p - q|,\ p, q \in \mathbb{Q}$; $\quad A = \{p \in \mathbb{Q} \mid p^2$ *је такво да је* $2 < p^2 < 3\}$.

Како је $A = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$ и скуп $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ затворен у $\mathbb{R}$, то је A затворен у $\mathbb{Q}$. Скуп A је ограничен јер је $A \subseteq K(0,2)$. Међутим, A није компактан. Заиста, из низа из A

$$x_1 = 1,7, \quad x_2 = 1,73, \quad x_3 = 1,732, \quad \ldots,$$

где x_n има n тачних децимала броја $\sqrt{3}$, се не може издвојити конвергентан подниз у A. ♢

ТЕОРЕМА 8. *Сваки компактан метрички простор је сепарабилан.*

ДОКАЗ. Нека је X компактан простор. Тада је он и тотално ограничен, и за свако $k \in \mathbb{N}$ постоји коначна $\frac{1}{k}-$мрежа. Ако са

$$y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_{n_k}^{(k)}, \tag{1}$$

означимо тачке $k-$те мреже, сваком $x \in X$ одговараће тачка $y_{m_k}^{(k)}$, $1 \leqslant m_k \leqslant n_k$, тако да је

$$d(x, y_{m_k}^{(k)}) < \frac{1}{k}. \tag{2}$$

Унија свих мрежа (1) је пребројива, а из (2) добијамо да је свуда густа у X, па је X сепарабилан простор. □

Навешћемо генерализацију Вајерштасове теореме за ограничене функције.

ТЕОРЕМА 9. *Непрекидна функција на компактном скупу је ограничена и достиже своју највећу и најмању вредност.*

Навешћемо генерализацију Канторове теореме за непрекидне функције.

ТЕОРЕМА 10. *Непрекидна функција на компактном скупу је и униформно непрекидна.*

ТЕОРЕМА 11. *Ако је пресликавање $f : (X, d_x) \to (Y, d_y)$ непрекидно пресликавање и $K \subset X$ компактан скуп, тада је и $f(K)$ компактан скуп у Y.*