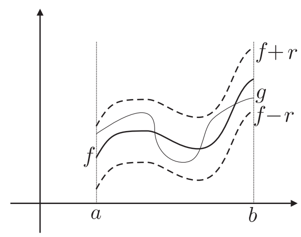
Тополошка структура метричких простора
23.03.2020.

Отворена, затворена кугла и сфера у метричком простору

Пример 1. *Нека је $f \in \mathbb{C}[a,b]$ дата функција и $r > 0$. На слици 2 приказана је отворена кугла*

$$K(f,r) = \left\{ g \in \mathbb{C}[a,b] \mid \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)| < r \right\}$$

у простору $\mathbb{C}[a,b]$. Графике функција $f + r$ и $f - r$ добијамо транслацијом графика функције f за вектор $(0,r)$, односно $(0,-r)$. Отворену куглу $K(f,r)$ у простору $\mathbb{C}[a,b]$ сачињавају све оне функције $g \in \mathbb{C}[a,b]$ чији се график налази унутар „траке“ ограничене графицима функција $f - r$ и $f + r$.



Слика 1.

Затворену куглу, поред функција које припадају отвореној кугли, чине још и све функције које додирују неку од граничних функција ($f + r$ и/ или $f - r$) макар у једној тачки. Сфера је разлика затворене и отворене кугле. $\diamondsuit$

Отворени и затворени скупови

Теорема 1. *Скуп $U \subseteq X$ у метричком простору (X,d) је отворен ако и само ако за сваку тачку $x_0 \in U$ постоји кугла $K(x_0,r) \subseteq U$.*

Теорема 2. *У метричком простору (X,d) колекција $\mathcal{U}$ свих отворених скупова $U \subseteq X$ има следећа својства:*

1° $\varnothing, X \in \mathcal{U}$;

2° *унија сваке фамилије елемената из $\mathcal{U}$ је елемент колекције $\mathcal{U}$;*

3° *пресек коначно много елемената из $\mathcal{U}$ је елемент колекције $\mathcal{U}$.*

Дефиниција 1. *Скуп $U \subseteq X$ из метричког простора (X,d) је отворен ако је унија неке фамилије отворених кугли простора X.*

Пример 2. *У метричком простору $(\mathbb{R},d)$ отворени интервали облика (a,b), $(-\infty,b)$, $(a,+\infty)$, $a < b$, су отворени скупови, као и читав простор $\mathbb{R}$.* $\diamondsuit$

Пример 3. *У метричком простору* $(\mathbb{R}^2, d_2)$*:*

$a)$ *скуп* $(a,b) \times (c,d)$ *је отворен;*

$b)$ *скуп* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$ *је отворен.* $\diamondsuit$

Дефиниција 2. *Скуп* $F \subseteq X$ *у метричком простору* (X,d) *је затворен ако је његов комплемент у односу на читав простор* X *отворен скуп.*

Теорема 3. *У метричком простору* (X,d) *колекција* $\mathcal{F}$ *свих затворених скупова* $F \subseteq X$ *има следећа својства:*

1° $\varnothing, X \in \mathcal{F}$*;*

2° *пресек сваке фамилије елемената из* $\mathcal{F}$ *је елемент колекције* $\mathcal{F}$*;*

3° *унија коначно много елемената из* $\mathcal{F}$ *је елемент колекције* $\mathcal{F}$*.*

Пример 4. *Посматрајмо низ интервала облика* $\left(0, 1+\frac{1}{n}\right)$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Сваки интервал је отворен скуп у* $\mathbb{R}$*, а њихов пресек није ни отворен ни затворен скуп јер* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, 1+\frac{1}{n}\right) = [0,1)$*.* $\diamondsuit$

Унутрашњост, затворење и тачке нагомилавања скупа

Дефиниција 3. *Унутрашњост (интериор) скупа $A \subseteq X$ у простору X, у ознаци $\operatorname{Int}(A)$ (или $\overset{\circ}{A}$) је унија свих отворених скупова $U \subseteq X$ који су садржани у скупу A.*

Напомена. $\operatorname{Int}(A)$ је највећи отворени скуп из X који је садржан у скупу A, тј. $\operatorname{Int}(A)$ је отворени подскуп од A који садржи сваки отворени подскуп од A. Другим речима, $x \in \operatorname{Int}(A)$ ако и само ако постоји $r > 0$ тако да $K(x, r) \subseteq A$.

Теорема 4. *Скуп $U \subseteq X$ је отворен у простору X ако и само ако је околина сваке своје тачке.*

Дефиниција 4. *Адхеренција (затворење) скупа $A \subseteq X$ у простору X, у ознаци $\overline{A}$ (или $\mathrm{Cl}A$), јесте пресек свих затворених скупова који садрже скуп A. Свака тачка $x \in \overline{A}$ зове се адхерентна тачка скупа A.*

Напомена. $\overline{A}$ је најмањи затворен скуп који садржи скуп A. Кажемо да $x \in \overline{A}$ ако и само ако свака кугла сече скуп A, тј. $K(x, r) \cap A \neq \varnothing$, за свако $r > 0$.

$$\text{Важи: } \operatorname{Int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

Дефиниција 5. *Тачка $x_0 \in X$ је тачка нагомилавања скупа $A \subseteq X$ ако свака околина O тачке x_0 сече скуп $A \setminus \{x_0\}$. Тачка $x_0 \in A$ је изолована тачка скупа A ако није тачка нагомилавања скупа A. Скуп свих тачака нагомилавања скупа A означава се са A' и назива се изводни скуп скупа A.*

Дефиниција 6. *Граница скупа $A \subseteq X$ је скуп $\mathrm{Fr}A = \partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.*

Пример 5. *За скуп $A = (0,1] \cup \{\sqrt{2}\}$ одредити $\operatorname{Int}(A)$, $\overline{A}$, $\mathrm{Fr}A$ и A'.*

$\operatorname{Int}(A) = (0,1)$, $\quad \overline{A} = [0,1] \cup \{\sqrt{2}\}$, $\quad \mathrm{Fr}A = \{0, 1, \sqrt{2}\}$ $\quad$ и $\; A' = [0,1]$. $\diamondsuit$

Пример 6. *За скуп $A = \big\{ -1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \big\} \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup \{\sqrt{3}\}$ одредити $\operatorname{Int}(A)$, $\overline{A}$, $\mathrm{Fr}A$ и A'.*

$\operatorname{Int}(A) = \big(\frac{1}{2}, 1\big)$, $\quad \overline{A} = \{-1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup [\frac{1}{2}, 1] \cup \{-1, \sqrt{3}\}$,
$\mathrm{Fr}A = \{-1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{3}\}$ $\quad$ и $\; A' = [\frac{1}{2}, 1] \cup \{-1\}$. $\diamondsuit$

Задатак 2. Нека је (X, d) метрички простор, $x_0 \in X$ и $A \subseteq X$.
(а) Доказати да важи $d(x_0, A) = d(x_0, \overline{A})$.
(б) Проверити да ли за сваки скуп $A \subseteq X$ и сваку тачку $x_0 \in X$ важи $d(x_0, A) = d(x_0, \mathrm{Int}A)$.

Решење. (а) Како је $A \subseteq \overline{A}$, то је $d(x_0, \overline{A}) \leqslant d(x_0, A)$.

С друге стране, из дефиниције растојања тачке од скупа и дефиниције инфимума важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \overline{a}_\varepsilon \in \overline{A})\, d(x_0, \overline{a}_\varepsilon) \leqslant d(x_0, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Даље, за сваку тачку $\overline{a}_\varepsilon \in \overline{A}$ постоји $a_\varepsilon \in A$ тако да је $d(\overline{a}_\varepsilon, a_\varepsilon) < \varepsilon/2$, па из неједнакости троугла добијамо
$$d(x_0, a_\varepsilon) \leqslant d(x_0, \overline{a}_\varepsilon) + d(\overline{a}_\varepsilon, a_\varepsilon) < d(x_0, \overline{a}_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сада имамо

$$\begin{aligned} d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, a) \mid a \in A\} &\leqslant d(x_0, a_\varepsilon) < d(x_0, \overline{a}_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant d(x_0, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = d(x_0, \overline{A}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Како је $\varepsilon > 0$ произвољно, то је $d(x_0, A) \leqslant d(x_0, \overline{A})$, а како смо већ показали да важи и $d(x_0, A) \geqslant d(x_0, \overline{A})$, то је $d(x_0, A) = d(x_0, \overline{A})$.

(б) Тврђење не важи. На пример, за $X = \mathbb{R}$, $x_0 = 2$ и $A = [0,1] \cup \{2\}$. Тада је $\mathrm{Int}A = (0,1)$ и $d(x_0, \mathrm{Int}A) = 1$. Како $x_0 \in A$, то је $d(x_0, A) = 0$. Очигледно да је у овом примеру $d(x_0, A) \neq d(x_0, \mathrm{Int}A)$.

Задатак 3. Нека је (X, d) метрички простор, $A, B \subseteq X$. Проверити да ли за свака два скупа $A, B \subseteq X$ важи једнакост $d(A, B) = d(\mathrm{Int}A, \mathrm{Int}B)$.

Решење. Не важи. На пример за $X = \mathbb{R}$, $A = [0,1] \cup \{2\}$, $B = \{2\} \cup [3,4]$ је $\mathrm{Int}A = (0,1)$, $\mathrm{Int}B = (3,4)$, па је $d(A, B) = 0$ и $d(\mathrm{Int}A, \mathrm{Int}B) = 2$. $\triangle$

Конвергенција низова у метричком простору

Нека је (X,d) метрички простор и $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (или краће (x_n)), низ тачака простора X.

Дефиниција 7. *Низ (x_n) из простора X конвергира ка тачки $x_0 \in X$, у ознаци $x_n \to x_0$, $n \to +\infty$ или $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\, n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Тачка x_0 се назива гранична вредност низа (x_n).

Дефиниција 8. *Низ (x_n) је Кошијев низ ако важи:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})\, m \geqslant n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Дефиниција 9. *Метрички простор X је комплетан ако и само ако сваки Кошијев низ из X конвергира у простору X.*

Напомена. Израз „конвергира у простору X" значи да Кошијев низ конвергира у метрици простора X и да његова гранична вредност припада простору X.

Задатак 4. (*Метрика Бера*) Нека је X скуп свих низова елемената скупа A. За низове $x = (x_\nu)$ и $y = (y_\nu)$ из X дефинишимо

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ \dfrac{1}{k}, & x \neq y,\ k = \min\{\nu \in \mathbb{N} \mid x_\nu \neq y_\nu\}. \end{cases}$$

Доказати да је простор (X,d) комплетан.

Решење. Нека је $(x^{(m)})$, $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots)$, призвољан Кошијев низ у X. Тада за свако $n \in \mathbb{N}$, тј. за свако $\varepsilon = 1/n > 0$ постоји $k(n) \in \mathbb{N}$ тако да за све $p, q \geqslant k(n)$ важи $d(x^{(p)}, x^{(q)}) < 1/n$. Одавде следи да за $p \geqslant k(n)$ важи $x_n^{(p)} = x_n^{(k(n))}$, па су у низу $n-$тих координата низа $(x^{(m)})$, почевши од $k(n)-$тог члана, сви елементи једнаки и обележићемо их са y_n. Дакле, сваки координатни низ је конвергентан, тј. за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $y_n \in A$ тако да је $\lim\limits_{m\to+\infty} x_n^{(m)} = y_n$.

Обележимо уочени низ (y_n) са y и докажимо да $x^{(m)} \to y$, $m \to +\infty$ (видети слику).

$$\begin{array}{lcccccc}
x^{(1)}: & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} & \cdots \\
x^{(2)}: & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\downarrow ? & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
y: & y_1 & y_2 & \cdots & y_n & \cdots
\end{array}$$

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно изабрано и нека је $n \in \mathbb{N}$ такво да важи $1/n < \varepsilon$. Тада постоје $m_\nu \in \mathbb{N}$, $\nu = 1, \ldots, n$, такви да низ $\nu-$тих координата постаје y_ν за $m \geqslant m_\nu$. Нека је $m_0 = \max\{m_\nu \mid 1 \leqslant \nu \leqslant n\}$. Тада за $m \geqslant m_0$ важи $x_\nu^{(m)} = y_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, па је

$$d(x^{(m)}, y) < 1/n < \varepsilon \quad \text{тј.} \quad x^{(m)} \to y,\, n \to +\infty.$$

Како је сваки Кошијев низ конвергентан у X, то је простор X комплетан. △

Задатак 5. Доказати да је нормирани простор $\mathbb{K}_p^k$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, комплетан за свако $p \geqslant 1$.

Решење. Како су било које две норме у $\mathbb{K}_p^k$, $p \geqslant 1$, међусобно еквивалентне, довољно је, на пример, доказати комплетност простора $\mathbb{K}_2^k$. Нека је (x_n), $x_n = (\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)})$, произвољан Кошијев низ у простору $\mathbb{K}_2^k$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 тако да за све $m \geqslant n \geqslant n_0$ важи

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{\nu=1}^{k} \left|\xi_\nu^{(m)} - \xi_\nu^{(n)}\right|^2\right)^{1/2} < \varepsilon. \tag{1}$$

Како је $\left|\xi_\nu^{(m)} - \xi_\nu^{(n)}\right| \leqslant d(x_m, x_n) < \varepsilon$ за $m \geqslant n \geqslant n_0$, за све $\nu = 1, \ldots, k$, из (1) следи да је

$$\left|\xi_\nu^{(m)} - \xi_\nu^{(n)}\right| < \varepsilon \quad \text{за } m \geqslant n \geqslant n_0;\ \nu = 1, \ldots, k,$$

односно да је за свако фиксирано $\nu \in \{1, \ldots, k\}$ низ $(\xi_\nu^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$, Кошијев низ у пољу скалара $\mathbb{K}$. Због комплетности простора $\mathbb{K}$, следи да постоје скалари $\xi_\nu \in \mathbb{K}$, такви да $\xi_\nu^{(n)} \to \xi_\nu$, $n \to +\infty$, за свако $\nu = 1, \ldots, k$.

Уочимо тачку $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Пуштајући у (1) да $m \to +\infty$, обзиром да $\xi_\nu^{(m)} \to \xi_\nu$, $m \to +\infty$ за све $\nu = 1, \ldots, k$ следи да је за $n \geqslant n_0$

$$\left(\sum_{\nu=1}^{k} \left|\xi_\nu - \xi_\nu^{(n)}\right|^2\right)^{1/2} = d(x_n, x) < \varepsilon,$$

што значи да $x_n \to x$, $n \to +\infty$. Како $x \in \mathbb{K}_2^k$, то је простор $\mathbb{K}_2^k$ комплетан, јер је у њему сваки Кошијев низ конвергентан. То значи да је и простор $\mathbb{K}_p^k$ комплетан за свако $p \geqslant 1$. △

Задатак 6. Доказати да је нормирани простор m комплетан.

Решење. Уочимо произвољан Кошијев низ (x_n), $x_n = (\xi_\nu^{(n)})$ у простору m. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m \geqslant n \geqslant n_0$ важи

$$d(x_m, x_n) = \sup_{\nu \in \mathbb{N}} \left|\xi_\nu^{(m)} - \xi_\nu^{(n)}\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

За свако $\nu \in \mathbb{N}$ важи $\left|\xi_\nu^{(m)} - \xi_\nu^{(n)}\right| \leqslant d(x_m, x_n)$, из (1) следи да је за свако $\nu \in \mathbb{N}$ и све $m \geqslant n \geqslant n_0$

$$\left|\xi_\nu^{(m)} - \xi_\nu^{(n)}\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Дакле, за свако $\nu \in \mathbb{N}$, низ $\nu-$тих координата, тј. низ $(\xi_\nu^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$, је Кошијев у пољу скалара $\mathbb{K}$. Због комплетности простора $\mathbb{K}$ постоје $\xi_\nu \in \mathbb{K}$, такви да за свако фиксирано $\nu \in \mathbb{N}$ важи $\xi_\nu^{(n)} \to \xi_\nu$, $n \to +\infty$.

Уочимо сада низ $x = (\xi_\nu)$. Доказаћемо да је $x \in m$ и да $x_n \to x$, $n \to +\infty$.

Како је (x_n) Кошијев низ у простору m, он мора бити ограничен, тј. постоји $M > 0$ такво да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\sup\limits_{\nu \in \mathbb{N}} \left|\xi_\nu^{(n)}\right| \leqslant M$, односно $\left|\xi_\nu^{(n)}\right| \leqslant M$, за све $\nu, n \in \mathbb{N}$. Ако у претходној неједнакости пустимо да $n \to +\infty$, добијамо да је $|\xi_\nu| \leqslant M,\ \nu \in \mathbb{N}$, што значи да $x \in m$.

Ако у неједнакости (2) пустимо да $m \to +\infty$, обзиром да $\xi_\nu^{(m)} \to \xi_\nu$, $m \to +\infty$, добићемо

$$\left|\xi_\nu - \xi_\nu^{(n)}\right| < \varepsilon, \quad n \geqslant n_0;\ \nu \in \mathbb{N},$$

па је $\sup\limits_{\nu \in \mathbb{N}} \left|\xi_\nu - \xi_\nu^{(n)}\right| < \varepsilon$, за све $n \geqslant n_0$, односно $d(x_n, x) < \varepsilon$ за $n \geqslant n_0$. Дакле, $x_n \to x$, $n \to +\infty$, у простору m, па је нормирани простор m комплетан. $\triangle$

Домаћи рад

1. Доказати следећа тврђења.

   а) Нека је (X, d) метрички простор, $x_1, x_2 \in X$ и $r > 0$. Једнакост кугли $K(x_1, r) = K(x_2, r)$ не повлачи $x_1 = x_2$.

   б) Нека је (X, d) метрички простор, $x \in X$ и $r_1, r_2 > 0$. Једнакост кугли $K(x, r_1) = K(x, r_2)$ не повлачи $r_1 = r_2$.

2. Нека је (X, d) дискретан метрички простор и $\operatorname{card}(X) \geqslant 2$. Одредити све отворене и све затворене скупове у X.

3. (*Метрика Бера*) Нека је X скуп свих низова елемената скупа A. За низове $x = (x_\nu)$ и $y = (y_\nu)$ из X дефинишимо

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ \dfrac{1}{k}, & x \neq y,\ k = \min\{\nu \in \mathbb{N} \mid x_\nu \neq y_\nu\}. \end{cases}$$

   Доказати да је d метрика на X.

4. За скуп $A = (-5, -3] \cup \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup ((0, 1] \cap \mathbb{Q})$ одредити $\operatorname{Int}(A)$, $\overline{A}$, $\operatorname{Fr}A$ и A'.

5. За скуп $B = ([-3, -2] \cap \mathbb{Q}) \cup \{-1\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup ([3, 4) \backslash \mathbb{Q})$ одредити $\operatorname{Int}(B)$, $\overline{B}$, $\operatorname{Fr}B$ и B'.

6. За скуп $C = \left\{\sqrt{2} + \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup (-2, -1) \cup \{5\}$ одредити $\operatorname{Int}(C)$, $\overline{C}$, $\operatorname{Fr}C$ и C'.

7. За скуп $D = \left\{\cos \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ одредити $\operatorname{Int}(D)$, $\overline{D}$, $\operatorname{Fr}D$ и D'.