УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МЕТОДИКА НАСТАВЕ АНАЛИЗЕ
1. недеља рада на даљину

КРАГУЈЕВАЦ
2020

Садржај

Глава 1

Математичка тврђења

Један од основних задатака математике је развој мишљења код ученика. Управо зато је математика саставни део свих образовних система од памтивека до данас, и она заједно са матерњим језиком има централну улогу у основном, а често и у средњем, образовању. У великој количини информација које су нам доступне, меморисање чињеница је депласирано, и акценат се пребацује на изграђивање стваралачког мишљења ученика, које ће им омогућити адекватно повезивање и извођење утемељених закључака.

У психологији се **мишљење** дефинише као издвајање у спознаји човека одређених својстава посматраног објекта и њихово довођење у одговарајуће везе са другим објектима у циљу стицања нових знања. Један од основних облика мишљења су **појмови**. Појам је облик мишљења у којем се одражавају битна и карактеристична својства објеката који се проучавају. У мишљењу појмови се на одређени начин међусобно повезују. Облици таквог повезивања су **искази**, други основни облик мишљења. Исказ (изјава, тврдња, суд) је смисаона изјавна реченица која се у погледу истиности подвргава начелу контрадикције и начелу искључења трећег, тј. она је или истинита, или неистинита.

Најважније врсте математичких исказа су аксиоме и теореме.

Аксиома је полазна тврдња која се сматра истинитом и која се не доказује. За аксиоме се често каже да су „очигледне истине”.

Наводимо неке примере аксиома.

1. За тачку ван дате праве постоји тачно једна права која је садржи и паралелна је датој правој. (*Пети постулат*)

2. За свака два позитивна броја a и b постоји природан број n такав да је $na > b$. (*Архимедова аксиома*)

Напомена. Још од Еуклидових „Елемената“постоји конфузија у употреби речи аксиома и постулат, међутим оне су синоними.

Аксиоме и основни појмови чине темељ неке математичке теорије, али за изградњу читаве теорије нису довољни само они. Изградња неке математичке теорије пролази четири етапе:

1. навођење основних појмова;

2. формулисање аксиома;

3. дефинисање нових појмова;

4. извођење и доказивање теорема.

Видимо да су за изградњу читаве теорије важни и искази који се логичким расуђивањем изводе из аксиома и дефиниција, тј. **теореме**.

У настави математике, посебно у основној школи, чешће користимо термин тврђење него теорема.

Теорема је математичка тврдња чија се истинитост утврђује доказом. Важно је истакнути да се под теоремом увек подразумева истинита тврдња.

У теореми мора јасно бити истакнуто, с једне стране, под којим условима се разматра одређени објекат, и с друге стране, шта се о том објекту тврди. Према томе, у формулацији теореме разликују се два дела: *претпоставка* (услов, хипотеза) P и *закључак* (последица, теза) Q. Претпоставка P је један или више исказа које се сматрају истинитим, а закључак Q је изјава коју треба доказати.

Ученици често имају потешкоћа при разликовању претпоставке и закључка, па се дешава да им и замене места. Овом проблему често доприноси и неспретна формулација теорема.

Обрада теорема је важан део наставе математике, и зато наставник треба да уложи додатни напор за савладавање ових потешкоћа и правилно усмеравање мишљења ученика.

ПРИМЕР 1.1. *Размотримо неколико теорема.*

1) *Производ два узастопна парна броја a и b је дељив са* 8.
   P: *a и b су узастопни парни бројеви.*
   Q: *Производ ab је дељив са* 8.

2) *Дијагонале ромба су нормалне.*
P: Четвороугао је ромб.
Q: Дијагонале су нормалне.

3) *У сваком троуглу наспрам једнаких страница су једнаки углови.*
P: У троуглу су две странице једнаких дужина.
Q: Углови наспрам тих (једнаких) страница су једнаки.

4) *Питагорина теорема. Збир квадрата дужина катета a и b сваког правоуглог троугла једнак је квадрату дужине хипотенузе c.*
P: a и b су дужине катета неког правоуглог троугла, а c је дужина хипотенузе тог правоуглог троугла.
Q: За бројеве a, b и c важи $a^2 + b^2 = c^2$.

5) *Виетова теорема. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, онда важи $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.*
P: x_1 и x_2 су решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$.
Q: За бројеве x_1 и x_2 важи $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Да би се лакше издвојила претпоставка од закључка, теореме се обично исказују у облику „ако ..., онда ...“. Први део реченице је претпоставка P, а други део је закључак Q.

Пример 1.2. *Прве четири теореме из претходног примера преформулисаћемо у облик „ако ..., онда ...“.*

1) *Ако су a и b узастопни парни бројеви, онда је производ ab дељив са 8.*

2) *Ако је дати четвороугао ромб, онда су дијагонале нормалне.*

3) *Ако су у троуглу две странице једнаких дужина, онда су углови наспрам њих једнаки.*

4) *Питагорина теорема. Ако су a и b дужине катета неког правоуглог троугла а c дужина хипотенузе тог правоуглог троугла, онда важи*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Теорема се може формулисати и тако да претпоставка и закључак буду одвојене у две реченице. Овај приступ је добар јер се краће реченице брже и лакше схватају.

Пример 1.3. 1) *Питагорина теорема. Нека су a и b дужине катета неког правоуглог троугла, а c дужина хипотенузе тог правоуглог троугла. Тада важи $a^2 + b^2 = c^2$.*

2) *Виетова теорема. Нека су* x_1 *и* x_2 *решења квадратне једначине* $ax^2 + bx + c = 0$. *Тада важи* $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ *и* $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Задаци у којима се тражи доказивање неког тврђења се често формулишу на следећи начин.

Пример 1.4. 1) *Нека су* a, b, c, d *редом остаци дељења броја* n *са* 2, 3, 5, 11. *Доказати да је број* $15a + 10b + 6c + 30d - n$ *дељив са* 30.

2) *У троуглу* ABC *за дужине страница* a, b *и* c *важи* $a + b = 2c$, $a > b$. *Из темена* C *повучена је висина* CD *и тежишна дуж* CE. *Доказати да је* $DE = a - b$.

Често смо у настави математике у ситуацији да формулишемо и додатно анализирамо обрат неке теореме. Наиме, обратом теореме називамо исказ који добијамо када претпоставка P и закључак Q замене места. Запис обрата теореме $P \Rightarrow Q$ је $Q \Rightarrow P$. Обрат теореме не мора бити истинит!

Пример 1.5. *У случају следеће две теореме њихови обрати су неистините тврдње.*
Теореме

1. *Ако* c *дели* a, *онда* c *дели производ* ab.

2. *Ако је права* p *нормална на праву* q, *онда се праве* p *и* q *секу.*

Обрати теорема

1. *Ако* c *дели производ* ab, *онда* c *дели* a.

2. *Ако се праве* p *и* q *секу, онда је права* p *нормална на праву* q.

Пример 1.6. *У случају следеће теореме и њен обрат је истинита тврдња.*

Питагорина теорема. Нека су a *и* b *дужине катета неког правоуглог троугла, а* c *дужина хипотенузе тог правоуглог троугла. Тада важи* $a^2 + b^2 = c^2$.

Обрнута Питагорина теорема. Нека су a, b *и* c *дужине страница неког троугла. Ако важи* $a^2 + b^2 = c^2$, *онда је тај троугао правоугли са хипотенузом* c.

Ученици, осим потешкоћа при разликовању претпоставке и закључка, имају проблема и када је реч о обрату теореме и његовом формулисању и разумевању, што нам илуструје следећи пример.

Пример 1.7. *Испитати да ли је троугао чије су странице дужина* 8, 15 *и* 17 *правоугли.*

Ученици правилно почну са проверавањем једнакости $a^2 + b^2 = c^2$*, тј.* $8^2 + 15^2 = 17^2$*, али онда закључе позивајући се на Питагорину теорему да јесте у питању правоугли троугао. Међутим, то није коректно, јер нам је потребна Обрнута Питагорина теорема. Стога је у настави неопходно обрадити овај обрат познате теореме. Посебно је лоше његово прећутно подразумевање, јер то може водити прављењу нових грешака, које настају када са другим теоремама поступимо аналогно, а када њихови обрати нису теореме.*

У настави математике је неопходно јасно истицати када су обрати теорема и сами теореме, а када нису.

Приметимо и да поред већ указаних предности формулација теорема у облику реченица „ако . . . , онда . . . “, овај приступ доприноси и лакшем формулисању обрата теореме.

Поред већ разматраних импликација $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$, често смо у прилици да посматрамо и негације $\neg P$ и $\neg Q$ исказа P и Q.

Негација $\neg A$ је истинита када исказ A није истинит и обрнуто, када је исказ A истинит негација $\neg A$ је неистинита.

Пример 1.8. *Исказ:* $\sqrt{2}$ *је ирационалан број.*

Негација исказа: $\sqrt{2}$ *није ирационалан број.* ($\sqrt{2}$ *је рационалан број.*)

Лако је уочити да је први исказ истинит, а његова негација неистинита.

Често се разматра импликација $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Овај исказ се назива контрапозицијом исказа $P \Rightarrow Q$. Приметимо да са сваком теоремом можемо повезати четири импликације:

1. $P \Rightarrow Q$ (теорема),
2. $Q \Rightarrow P$ (обрат теореме),
3. $\neg Q \Rightarrow \neg P$ (контрапозиција),
4. $\neg P \Rightarrow \neg Q$ (обрат контрапозиције).

Посматрајмо следећи пример, који илуструје однос ове четири импликације.

ПРИМЕР 1.9. *Сличност и подударност троуглова.*

1) $P \Rightarrow Q$ *Ако су троуглови подударни, онда су они и слични.*

2) $Q \Rightarrow P$ *Ако су троуглови слични, онда су они и подударни.*

3) $\neg Q \Rightarrow \neg P$ *Ако троуглови нису слични, онда они нису ни подударни.*

4) $\neg P \Rightarrow \neg Q$ *Ако троуглови нису подударни, онда они нису ни слични.*

Битно је установити да су импликације $P \Rightarrow Q$ и $\neg Q \Rightarrow \neg P$ истовремено или обе истините, или обе неистините, тј. да су еквивалентне. Исто важи и за импликације $Q \Rightarrow P$ и $\neg P \Rightarrow \neg Q$. Дакле, од наведене четири импликације довољно је разматрати само прве две, теорему и обрат теореме. Међутим, и друге две импликације могу бити корисне при доказивању теорема.

1.1 Докази

Доказивање теорема је често присутно у настави математике. О доказу у строгом смислу речи може се говорити само у оквиру неког унапред познатог система аксиома. Кратак опис доказа био би следећи: доказ теореме $P \Rightarrow Q$ у некој теорији је коначан низ тврђења $Q_1, \ldots, Q_n$ те теорије у којем је свако тврђење или аксиома, или добијено из претходно доказаних тврђења тога низа по неком од правила закључивања, а последње тврђење низа је Q. Према томе, доказати теорему $P \Rightarrow Q$ значи пронаћи коначан низ тврђења $Q_1, \ldots, Q_n$ теорије и логичким закључивањем прећи од услова из претпоставке P и тврђења $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ до закључка $Q_n = Q$. Након тога доказана теорема може бити саставни део сваког даљег поступка доказивања у оквиру те теорије.

Са поступком и потребом за доказивањем срећемо се први пут у старогрчкој математици. Грци први сем питања „Како?” постављају и питање „Зашто?”. Зачетником поступка доказивања сматрамо Талеса (око 624.-548. п.н.е.), оца старогрчке математике, иако његови докази нису потпуно логички утемељени. Логички строге доказе налазимо код Питагоре (око 570.-497. п.н.е.), као и код Еуклида (око 330.-275. п.н.е.). У

Еуклидовим „Елементима“ дефиниције, аксиоме и теореме чине савршен логички систем. Вековима је ово дело служило као основни уџбеник из математике.

Неизбежно се намеће и питање да ли је неопходно упознавати са доказима и ученике који се касније у животу неће бавити математиком, и да ли је неопходно да ученици разумеју доказе. Одговор се сам намеће ако имамо у виду да учити доказивање значи учити расуђивање, а то је један од главних задатака наставе математике. Сваки човек мора да расуђује, промишља, закључује, доноси логички засноване одлуке на основу датих чињеница (како без тога упоредити различите изјаве, како од више изјава издвојити оне истините, како проверити ваљаност неке тврдње, како оповргнути нечије мишљење, како донети исправан закључак о нечему итд.). Образовање појединца није потпуно ако се он није сусрео и схватио неколико стандардних математичких теорема.

Учити ученике доказивању је велики изазов и свакако није ни једноставан ни лак посао. Професор мора да има на уму неколико важних чињеница.

1. Математика је дедуктивна наука, међутим школска математика се не изграђује као строг дедуктивни систем, већ остаје на нивоу модела. Ово је посебно важно у основној школи, јер је настава ту већим делом индуктивна и многе теореме се обрађују без (правог) доказа.

2. У школским доказима су неизбежни интуитивни елементи. Ако је нека теорема једноставна и готово очигледна, ученици тешко схватају потребу за њеним доказивањем.

3. Ученици лакше прихватају логички доказ у мање очигледним примерима. Такав доказ је тежи, али се у њему повезује више различитих чињеница. Повезане чињенице лакше се памте, а стечено знање је трајније.

Постоје две врсте доказа теорема: *директни докази* и *индиректни докази*.

1.1.1 Директни докази

Директни доказ неког закључка Q састоји се у томе да се полазећи од претпоставке P, применом аксиома, дефиниција и раније доказаних теорема, низом исправних логичких закључивања дође до Q. Тада је импликација $P \Rightarrow Q$ истинита. Већина теорема у настави математике се доказује на овај начин.

ПРИМЕР 1.10. *Збир (унутрашњих) углова сваког троугла једнак је* $180°$.

ПРИМЕР 1.11. *Доказати да за свака два позитивна броја* p *и* q *важи неједнакост* $(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geqslant 9pq$.

1.1.2 Индиректни докази

За разлику од директног доказа теореме $P \Rightarrow Q$, индиректним доказом је пут од претпоставке P до закључка Q „заобилазан“. Пракса показује да расуђивање у индиректном доказу неке теореме ствара додатне потешкоће многим ученицима, па ћемо зато структури ових доказа посветити посебну пажњу. Интересантно је да се при изучавању рада људског мозга дошло до открића да су при извођењу индиректног доказа активни центри за машту и креативност, који не учествују када се изводи директан доказ.

За сваки исказ Q постоји супротан исказ $\neg Q$. Од та два исказа само један може бити истинит. Индиректни доказ теореме $P \Rightarrow Q$ темељи се на разматрању супротног исказа $\neg Q$ и настојању да се докаже да је овај исказ неистинит. Прецизније, индиректни доказ закључка Q састоји се у директном доказу импликације $\neg Q \Rightarrow L$, где је L нека очигледна неистина. Наиме, ако је та имликација доказана, она је истинита (тачна), па како је L неистина мора бити и $\neg Q$ неистина, а то значи да је Q истинит исказ. Једноставније, полази се од претпоставке да важи супротан исказ $\neg Q$ (претпоставимо супротно). Ако се током доказивања дође у супротност са неком аксиомом, раније доказаном теоремом или неком другом истинитом чињеницом, закључује се да је супротан исказ $\neg Q$ неистинит, а то значи да је Q истинит исказ.

Најчешће користимо два типа индиректних доказа: *доказ по контрапозицији* и *свођење на контрадикцију* (reductio ad absurdum).

Исказ $\neg Q \Rightarrow \neg P$ се назива контрапозиција исказа $P \Rightarrow Q$ и та два исказа су еквивалентна. То значи да ако докажемо истинитост првог, доказана је и истинитост другог исказа. Доказ теореме $P \Rightarrow Q$ заснован на тој еквиваленцији назива се доказ по контрапозицији.

ПРИМЕР 1.12. *Ако је број* a^2 *паран, онда је и број* a *паран.*

Ако при доказивању теореме $P \Rightarrow Q$ уз дату претпоставку P кренемо од супротног исказа $\neg Q$ и низом логичких корака дођемо до тога да би тада истовремено требало да важи исказ A и исказ $\neg A$, онда закључујемо да супротан исказ $\neg Q$ није истинит, већ да је истинит Q. Доказ теореме $P \Rightarrow Q$ заснован на таквом расуђивању назива се свођење на контрадикцију (противуречност).

Индиректни доказ срећемо већ код Еуклида (следећи пример је из „Елемената“, дат у нешто измењеном облику).

Пример 1.13. *Скуп простих бројева је бесконачан.*

Најпознатија теорема школске математике за чије доказивање користимо индиректан доказ је *$\sqrt{2}$ није рационалан број.* Ово је уједно први пут (7. разред, наставна тема *Реални бројеви*) када се ученици сусрећу са оваквим доказивањем.

У процесу доказивања теорема важну улогу играју питања која наставник поставља ученицима. Већ више пута је истакнуто да је умеће постављања питања један од облика наставникове креативности. Нека су питања стандардна и стално се понављају, али су важна и незаобилазна, док друга зависе од тренутка и умешности наставниковог вођења дијалога. Жељено усмеравање мишљења ученика и скретање пажње на доказ теореме може се успешно подстакнути неким од следећих питања:

Да ли је све јасно у формулацији теореме? Шта је претпоставка у теореми? Од колико се делова састоји услов претпоставке? Може ли се услов раставити на делове? Шта треба доказати? Шта је закљу в цак? Како гласи супротан исказ? Које би чињенице могле помоћи при доказивању теореме? Можете ли наћи везу између ове теореме и неке раније доказане теореме? Јесте ли искористили све услове из претпоставке? Јесмо ли овај начин доказивања већ користили код неке друге теореме? Јесмо ли доказивали сличну теорему? Може ли се теорема доказати на други начин? Како гласи обрат теореме? Да ли важи обрат теореме?

Сваки пут када професор припрема доказ неке теореме треба добро да промисли о избору одговарајућих питања за ученике, јер се доказивање теорема убраја у тежа и сложенија места наставе математике.

1.2 Језички и методички савети

Циљ наставе математике, поред развијања интересовања ученика за математику, је развијање и многих особина ученика, као што су **самосталност, критичко мишљење, комуникативност, креативност, развијање логичког мишљења** итд. Наставник стално треба да има на уму циљеве наставе математике и да у односу на њих одлучује о методичким приступима појединим деловима градива.

1. Наставник свој језик и начин излагања мора да прилагоди узрасту и математичким способностима ученика.
2. Током предавања наставник треба да подстиче ученике да постављају питања у вези делова који им нису јасни, јер ће додатна објашњања у том тренутку допринети бољем разумевању и бржем усвајању новог знања.
3. Ученике треба упућивати да сами издвајају битне карактеристике неког појма, научити их да разликују оне карактеристике појма које су битне за његову дефиницију и оне које нису и тако их укључивати у дефинисање математичких појмова.
4. Када год је то могуће треба указивати на поступак увођења апстрактних математичких појмова путем анализе и апстраковања предмета из природе који су њима познати.
5. Стално треба инсистирати на корелацији између математике и других предмета.
6. Треба водити рачуна о језику који се користи за дефиниције.
7. Треба ученике подстицати да изврше преформулацију дефиниције које садрже речи „је“ или „су“ тако што ће умести њих користити речи „назива се“, „зове се“, „кажемо“. Тако ће ученицима бити јасније да се ради о дефиницији појма, а не о неком тврђењу које говори о особинама дефинисаног појма.
8. Пре доказивања тврђења ученицима треба дати време за критичку анализу тврђења, да јасно направе разлику шта су претпоставке, а шта тврђење.
9. Водити рачуна о језику који је коришћен за формулисање тврђења.

10. Треба код ученика развити способност прецизног формулисања тврђења.

11. Треба подстицати ученике да тврђења преформулишу тако да их искажу у облику „ако ..., онда ...“. Из такве формулације тврђења се јасно види шта је претпоставка тврђења.

12. Наставник треба да укаже ученицима на значај доказивања тврђења и на неке методе доказивања тврђења.

13. Након доказа тврђења добро је још једном се критички осврнути на формулацију самог тврђења, дискутовати са ученицима зашто су поједине претпоставке у формулацији битне, у ком делу доказа су коришћене, да ли су све претпоставке неопходне, шта би било када би се нека претпоставка изоставила или заменила неком другом претпоставком.

14. Наставник треба да усмерава ученике на генерализацију, да буду способни да изграђују општије појмове и формулишу општија тврђења.

15. Добро је некада препустити ученицима да сами смисле задатке.

16. Добро је дати прилику ученицима да излажу своје идеје.