Комплетност и сепарабилност метричких простора

Задатак 1. Доказати да је метрички простор (ℓ_p, d_p) комплетан и сепарабилан за свако $p \geqslant 1$.

Решење. Нека је (x_n), $x_n = (\xi_\nu^{(n)})$, произвољан Кошијев низ у простору ℓ_p, $p \geqslant 1$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m \geqslant n \geqslant n_0$ важи

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{\nu=1}^{+\infty} \left| \xi_\nu^{(m)} - \xi_\nu^{(n)} \right|^p \right)^{1/p} < \varepsilon. \tag{1}$$

Како за свако $\nu \in \mathbb{N}$ важи $\left| \xi_\nu^{(m)} - \xi_\nu^{(n)} \right| \leqslant d(x_m, x_n)$, то из (1) следи да је за свако $\nu \in \mathbb{N}$ низ $\nu-$тих координата, тј. низ $(\xi_\nu^{(n)})_n$ Кошијев у пољу скалара $\mathbb{K}$. Како је простор $\mathbb{K}$ комплетан то постоје скалари $\xi_\nu \in \mathbb{K}$, такви да за свако фиксирано $\nu \in \mathbb{N}$ важи $\xi_\nu^{(n)} \to \xi_\nu$, $n \to +\infty$.

Уочимо сада низ $x = (\xi_\nu)$. Доказаћемо да је $x \in \ell_p$ и да $x_n \to x$, $n \to +\infty$.

Да бисмо показали да је $x \in \ell_p$, потребно је показати да $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} |\xi_\nu|^p$ конвергира. Како је сваки Кошијев низ ограничен, то постоји $M > 0$ такво да је

$$\left(\sum_{\nu=1}^{+\infty} \left| \xi_\nu^{(n)} \right|^p \right)^{1/p} \leqslant M, \quad n \in \mathbb{N},$$

тј.

$$\sum_{\nu=1}^{k} \left| \xi_\nu^{(n)} \right|^p \leqslant M^p, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}.$$

Ако у претходној неједнакости фиксирамо k и пустимо да $n \to +\infty$, добијамо да је $\sum\limits_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu|^p \leqslant M^p$, $k \in \mathbb{N}$. Најзад, пуштајући у последњој неједнакости да $k \to +\infty$, добијамо $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} |\xi_\nu|^p \leqslant M^p$. Дакле, $x \in \ell_p$.

Из релације (1) имамо да је за $m \geqslant n \geqslant n_0$

$$\sum_{\nu=1}^{k} \left| \xi_\nu^{(m)} - \xi_\nu^{(n)} \right|^p < \varepsilon^p, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ако у претходној неједнакости фиксирамо $n \geqslant n_0$ и $k \in \mathbb{N}$, и пустимо да $m \to +\infty$, обзиром да $\xi_\nu^{(m)} \to \xi_\nu$, $m \to +\infty$, добићемо

$$\sum_{\nu=1}^{k} \left| \xi_\nu - \xi_\nu^{(n)} \right|^p < \varepsilon^p.$$

Коначно, пуштајући у последњој неједнакости да $k \to +\infty$, добијамо да за $n \geqslant n_0$ важи

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \left| \xi_\nu - \xi_\nu^{(n)} \right|^p = d_p(x_n, x)^p < \varepsilon^p,$$

односно да $x_n \to x$, $n \to +\infty$.

Према томе, нормирани простор ℓ_p је комплетан за свако $p \geqslant 1$.

Докажимо сада да је нормирани простор ℓ_p сепарабилан за свако $p \geqslant 1$. Потребно је показати да у њему постоји највише пребројив свуда густ скуп тачака.

Уочимо у простору ℓ_p низ вектора (e_n) где је $e_n = (\delta_{n\nu})$, $n, \nu \in \mathbb{N}$, а δ_{ij} Кронекеров делта симбол. Нека је

$$B = \{q_1 e_1 + \cdots + q_n e_n \mid q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{K}_{\mathbb{Q}}, n \in \mathbb{N}\} = \{(q_1, \ldots, q_n, 0, 0, \ldots) \mid q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{K}_{\mathbb{Q}}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Скуп B је пребројив.

Докажимо сада да је скуп B свуда густ у ℓ_p. Уочимо произвољну тачку $x = (\xi_\nu) \in \ell_p$ и произвољно $\varepsilon > 0$. Како је $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} |\xi_\nu|^p < +\infty$, то постоји $k \in \mathbb{N}$ тако да је $\sum\limits_{\nu=k+1}^{+\infty} |\xi_\nu|^p < \varepsilon^p/2$. Како је скуп $\mathbb{K}_{\mathbb{Q}}$ свуда густ у $\mathbb{K}$, то постоје скалари $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{K}_{\mathbb{Q}}$ такви да за свако $\nu = 1, \ldots, k$ важи $|\xi_\nu - q_\nu| \leqslant \varepsilon^p/(2k)$. Означимо са $q = \sum\limits_{\nu=1}^{k} q_\nu e_\nu$. Сада је

$$d_p(x,q)^p = \sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu - q_\nu|^p + \sum_{\nu=k+1}^{+\infty} |\xi_\nu|^p \leqslant k\frac{\varepsilon^p}{2k} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

тј. $d_p(x,q) \leqslant \varepsilon$, што значи да је скуп B свуда густ у ℓ_p. Према томе, простор ℓ_p је сепарабилан за свако $p \geqslant 1$. △

Задатак 2. Доказати да је за произвољан коначан интервал $[a,b]$ реалне осе, метрички простор $\mathbb{C}[a,b]$ комплетан и сепарабилан.

Решење. Претпоставимо да је поље скалара $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, односно да се простор $\mathbb{C}[a,b]$ састоји од свих реалних непрекидних функција дефинисаних на интервалу $[a,b]$.

Уочимо произвољан Кошијев низ (f_n) у простору $\mathbb{C}[a,b]$, $f_n = f_n(t)$, $t \in [a,b]$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је за све $m \geqslant n \geqslant n_0$

$$d(f_m, f_n) < \varepsilon, \quad t \in [a,b]$$

тј.

$$|f_m(t) - f_n(t)| \leqslant \max_{t \in [a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon, \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

Фиксирајмо у последњој неједнакости $t \in [a,b]$. Тада је $(f_n(t))_n$ Кошијев низ у $\mathbb{R}$, па је он конвергентан због комплетности простора $\mathbb{R}$. То важи за свако фиксирано $t \in [a,b]$, па је на тај начин дефинисана реална функција $f(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t)$. Пуштајући у (2) да $m \to +\infty$, добијамо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је за све $n \geqslant n_0$ испуњено

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad t \in [a,b],$$

односно да низ (f_n) униформно конвергира ка функцији f кад $n \to +\infty$. Како су све функције f_n, $n \in \mathbb{N}$, непрекидне на интервалу $[a,b]$, то је и функција $f \in \mathbb{C}[a,b]$. [1]

[1] Теорема. *Нека је (f_n) ($f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}$) низ функција непрекидних у тачки $a \in A$, који униформно конвергира ка функцији $f : A \to \mathbb{R}$ на скупу A кад $n \to +\infty$. Тада је и функција f непрекидна у тачки a.*

Из неједнакости (2) следи да је $d(f_n, f) < \varepsilon$ за n довољно велико, тј. за $n \geqslant n_0$, па $f_n \to f$, $n \to +\infty$ у простору $\mathbb{C}[a,b]$. Према томе, нормирани простор $\mathbb{C}[a,b]$ је комплетан.

Докажимо сада сепарабилност простора $\mathbb{C}[a,b]$. Нека је

$$B = \{P_n^{\mathbb{Q}}(t) = q_0 + q_1 t + \cdots + q_n t^n \mid q_0, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Скуп B је очигледно пребројив.

Уочимо произвољну функцију $f \in \mathbb{C}[a,b]$. На основу Вајерштрасове теореме постоји полином $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, такав да је

$$d(f, P_n) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

За тако добијени полином P_n постоји полином $P_n^{\mathbb{Q}} \in B$, са рационалним коефицијентима, такав да је

$$d(P_n, P_n^{\mathbb{Q}}) = \sup_{t \in [a,b]} |P_n(t) - P_n^{\mathbb{Q}}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последње две неједнакости, користећи неједнакост троугла, следи да је $d(f, P_n^{\mathbb{Q}}) < \varepsilon$. Према томе, скуп B је свуда густ у простору $\mathbb{C}[a,b]$, па је простор $\mathbb{C}[a,b]$ сепарабилан. $\triangle$

Задатак 3. Доказати да су метрички простори (c, d) и (c_0, d) сепарабилни.

Решење. Докажимо да је метрички простор c сепарабилан (доказ за c_0 је сличан). Нека је

$$B = \{(q_1, q_2, \ldots, q_n, q, q, \ldots) \mid q_1, q_2 \ldots, q_n, q \in \mathbb{K}_{\mathbb{Q}},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Скуп B је пребројив. Докажимо још да је B свуда густ у c. Нека је $x = (\xi_\nu)$ произвољна тачка простора c и $\varepsilon > 0$ произвољно изабрано. Нека је $\xi = \lim\limits_{n \to +\infty} \xi_n$. Уочимо низ (x_k), $x_k = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi, \xi, \ldots)$, у простору c. Тада је $x - x_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-\text{пута}}, \xi_{k+1} - \xi, \xi_{k+2} - \xi, \ldots)$ и

$$d(x, x_k) = \sup_{\nu \geqslant k+1} |\xi_\nu - \xi| \to 0,\ k \to +\infty,$$

па постоји $k_0 \in \mathbb{N}$ тако да је

$$d(x, x_{k_0}) = \sup_{\nu \geqslant k_0+1} |\xi_\nu - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

односно $|\xi_\nu - \xi| < \varepsilon/2$ за све $\nu \geqslant k_0 + 1$.

Уочимо сада $q_1, \ldots, q_{k_0}, q \in \mathbb{K}_{\mathbb{Q}}$ такве да је $|\xi - q| < \varepsilon/2$ и да за све $\nu = 1, \ldots, k_0$ важи $|\xi_\nu - q_\nu| < \varepsilon/2$. Обележимо $y = (q_1, \ldots, q_{k_0}, q, q, \ldots)$. Очигледно да $y \in B$ и $d(x_{k_0}, y) < \varepsilon/2$. Из претходне неједнакости и неједнакости (3), користећи неједнакост троугла, следи да је $d(x, y) < \varepsilon$, па је скуп B свуда густ у простору c. Дакле, простор c је сепарабилан.

Задатак 4. Доказати да метрички простор $\mathbb{B}[a,b]$ свих могућих ограничених функција на интервалу $[a,b]$ није сепарабилан.

Решење. За произвољан реалан број $\alpha \in [a,b]$ уочимо функцију $f_\alpha : [a,b] \to \{0,1\}$, дефинисану са

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & t = \alpha, \\ 0, & t \neq \alpha, \end{cases} \qquad t \in [a,b].$$

Очигледно је да су све функције f_α, $\alpha \in [a,b]$, ограничене. Како је за $\alpha \neq \beta$ и $f_\alpha \neq f_\beta$, то је $\operatorname{card}\{f_\alpha \mid \alpha \in [a,b]\} = c$. За $\alpha \neq \beta$ важи и

$$d(f_\alpha, f_\beta) = \sup_{t \in [a,b]} |f_\alpha(t) - f_\beta(t)| = 1.$$

Уочимо сада отворену колекцију $\mathcal{K} = \{K(f_\alpha, 1/3) \mid \alpha \in [a,b]\}$. Очигледно је $\operatorname{card}(\mathcal{K}) = c$. За $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha \neq \beta$, је $K(f_\alpha, 1/3) \cap K(f_\beta, 1/3) = \varnothing$. Претпоставимо супротно, да постоји $f^* \in K(f_\alpha, 1/3) \cap K(f_\beta, 1/3)$. Тада је $d(f^*, f_\alpha) < 1/3$ и $d(f^*, f_\beta) < 1/3$, одакле је $d(f_\alpha, f_\beta) \leqslant d(f_\alpha, f^*) + d(f^*, f_\beta) < 2/3$, што је немогуће јер је $d(f_\alpha, f_\beta) = 1$.

Према томе, $\mathcal{K}$ је непребројива колекција међусобно дисјунктних отворених скупова у простору $\mathbb{B}[a,b]$, па на основу теореме 1 (предавања) закључујемо да он није сепарабилан. $\triangle$

Непрекидна пресликавања

Дефиниција 1. *Нека су X и Y метрички простори и нека $f : X \to Y$. Пресликавање f је непрекидно у тачки $x_0 \in X$, у ознаци $f \in \mathbb{C}\{x = x_0\}$, ако*

$$(*) \qquad (\forall V \in \mathcal{O}(f(x_0)))(\exists U \in \mathcal{O}(x_0))\, f(U) \subseteq V.$$

У противном се каже да је f прекидно у тачки x_0.

Напомена. Еквивалентан услов услову $(*)$ је

$$(\forall V \in \mathcal{O}(f(x_0)))\, f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(f(x_0)).$$

Дефиниција 2. *Пресликавање f је непрекидно на скупу $A \subseteq X$ ако је непрекидно у свакој тачки $x_0 \in A$.*

Теорема 1. *Нека су X, Y и Z метрички простори и нека су дата пресликавања $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ и тачке $x_0 \in X$ и $y_0 = f(x_0) \in Y$. Ако је f непрекидно у x_0 и g непрекидно у y_0, тада је $h = g \circ f : X \to Z$ непрекидно у x_0.*

Теорема 2. *Нека су X, Y метрички простори и $f : X \to Y$. Следећи искази су међусобно еквивалентни:*

1° *f је непрекидно пресликавање;*
2° *за сваки отворен скуп $V \subseteq Y$, скуп $f^{-1}(V)$ је отворен;*
3° *за сваки затворен скуп $F \subseteq Y$, скуп $f^{-1}(V)$ је затворен;*
4° *за сваки скуп $A \subseteq X$ је $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

Пример 1. *Нека је $f : X \mapsto Y$.*

a) *Показати примером следећа тврђења.*

   1) *Ако је f непрекидна функција, то не повлачи да је слика сваког отвореног (затвореног) скупа отворен (затворен) скуп.*

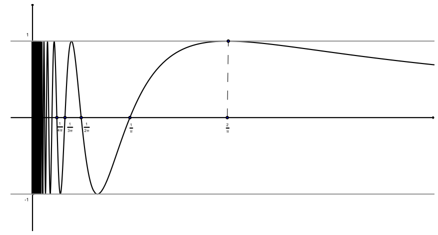
   2) *Ако је слика сваког отвореног (затвореног) скупа отворен (затворен) скуп, то не повлачи да је функција f непрекидна.*

б) *Показати да непрекидна функција $f(x) = x^2$ не пресликава сваки отворен скуп на отворен скуп.*

в) *Навести пример функције $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ која јесте непрекидна, слика сваки затворен скуп на затворен, али и сваки отворен на затворен.*

Решење.

а) 1) Посматрајмо функцију $f : (0, +\infty) \mapsto [-1, 1]$ дату са $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ (Слика 1). Она је непрекидна као композиција непрекидних функција (теорема (1.)). Нуле функције су $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$ и важи $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$. Функција достиже максималну вредност 1 у тачкама $x_k = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{N}_0$.



Слика 1.

Интервал $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ је отворен, а његова слика $f\left(\left(0, \frac{1}{\pi}\right)\right) = [-1, 1]$ затворен скуп. Дакле, ова непрекидна функција не слика сваки отворен скуп на отворен скуп. Интервал $\left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$ је затворен (јер му је комплемент у односу на $\mathbb{R}$ отворен), а његова слика $f\left(\left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)\right) = (0, 1]$ није ни отворен ни затворен скуп, па ова непрекидна функција f не слика ни сваки затворен скуп на затворен скуп.

2) Посматајмо скупове $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\right\}$ и $Y = [0, 2\pi)$ и параметарски облик кружнице: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. Дефинишимо функцију $f : X \mapsto Y$ са $f((x, y)) = f((\cos t, \sin t)) = t$. Тада ће за сваке две тачке $A_1 = (x_1, y_1) = (\cos t_1, \sin t_1)$ и $A_2 = (x_2, y_2) = (\cos t_2, \sin t_2)$ са кружнице X $(t_1, t_2 \in [0, 2\pi))$ важити:

$$f\left((A_1, A_2)\right) = (t_1, t_2) \quad \text{и} \quad f\left([A_1, A_2]\right) = [t_1, t_2]$$

Дакле, ова функција слика сваки отворен скуп на отворен, као и сваки затворен скуп на затворен скуп.
Испитајмо непрекидност функције f. Како је $f((1, 0)) = 0$, $\displaystyle\lim_{(x,y) \mapsto (1,\, 0+)} f((x, y)) = 0$ и $\displaystyle\lim_{(x,y) \mapsto (1,\, 0-)} f((x, y)) = 2\pi$, закључујемо да функција има прекид у овој тачки. Дакле, f није непрекидна.

б) Отворен интервал $(-1, 1)$ се функцијом $f(x) = x^2$ слика у интервал $[0, 1)$ који није ни отворен ни затворен.

в) Овде можемо посматрати било коју константну функцију, нпр. $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$. Било који отворен интервал (a, b), као и било који затворен интервал $[a, b]$, функцијом f ће се сликати у скуп $\{1\}$, а то је затворен скуп у $\mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Задатак 1. Нека је $A \subseteq X$ у неком метричком простору (X, d). Доказати да је карактеристична функција скупа A, дата са

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

непрекидна ако и само ако је A и отворен и затворен скуп.
Решење. Претпоставимо најпре да је χ_A непрекидна функција. Како је $\chi_A^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 2\right)\right) = A$ и $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ отворен скуп, то на основу теореме (2.) закључујемо да је A отворен скуп. Слично, како је $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ и $\{1\}$ затворен скуп, то на основу теореме (2.) закључујемо да је A и затворен скуп, па је доказ у овом смеру завршен.

Покажимо сада импликацију у супротном смеру. Претпоставимо да је A и отворен и затворен скуп. Како је

$$\chi_A^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset, & 0 \notin U, 1 \notin U \\ X \setminus A, & 0 \in U, 1 \notin U \\ A, & 0 \notin U, 1 \in U \\ X, & 0 \in U, 1 \in U \end{cases}$$

и празан скуп и читав простор X су и отворени и затворени, то на основу теореме (2.) закључујемо да ће χ_A бити непрекидна функција ако је A и отворен и затворен скуп. $\triangle$

Теорема 3. *Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) матеички простори, $f : X \mapsto Y$ и $a \in X$. Пресликавање f је непрекидно у тачки a ако и само ако за сваки низ (x_n) из простора X који конвергира ка a, низ $f(x_n)$ конвергира ка $f(a)$.*

Доказ. Претпоставимо да је f непрекидно пресликавање и (x_n) низ у простору X такав да $x_n \mapsto a, n \mapsto +\infty$. Нека је $V \in \mathcal{O}(f(a))$. Тада постоји околина $U \in \mathcal{O}(a)$, таква да је $f(U) \subseteq V$. Како $x_n \mapsto a, n \mapsto +\infty$, то постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $x_n \in U$, $n \geqslant n_0$. Одавде даље имамо $f(x_n) \in f(U) \subseteq V \in \mathcal{O}(f(a))$, $n \geqslant n_0$, па закључујемо да $f(x_n) \mapsto f(a), n \mapsto +\infty$.

Покажимо сада тврђење у супротном смеру. Претпоставимо да за сваки низ (x_n) из простора X који конвергира ка a, низ $f(x_n)$ конвергира ка $f(a)$ и да пресликавање f није непрекидно. Тада постоји околина $V \in \mathcal{O}(f(a))$ таква да за сваку околину $U \in \mathcal{O}(a)$ важи $f(U) \nsubseteq V$.
Конструишимо низ кугли $K_n = K\left(a, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, и у свакој од њих уочимо по једну тачку x_n. Тада је $d_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, тј. $d_X(x_n, a) \mapsto 0$, $n \mapsto \infty$. Дакле, низ (x_n) конвергира ка a, па ће низ $f(x_n)$ конвергирати ка $f(a)$. Како је $K_n \in \mathcal{O}(a)$, то из претпоставке да f није непрекидно закључујемо да $f(x_n) \in f(K_n) \nsubseteq V$, $n \in \mathbb{N}$. Пуштајући сада да $n \mapsto +\infty$ добијамо $f(a) \nsubseteq V \in \mathcal{O}(f(a))$, што је контрадикција. Дакле, пресликавање f јесте непрекидно. $\square$

Задатак 2. Нека су X и Y метрички простори и $f_1 : X \to Y$, $f_2 : X \to Y$ непрекидна пресликавања. Тада је скуп $A = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}$ затворен у X. Доказати.
Решење. Да бисмо доказали да је скуп A затворен, потребно је доказати да је скуп $G = X \setminus A$ отворен.

Нека је x произвољна тачка из G. Тада је $f_1(x) \neq f_2(x)$, па постоје дисјунктне околине $V_1 \in \mathcal{O}(f_1(x))$ и $V_2 \in \mathcal{O}(f_2(x))$. Како су f_1 и f_2 непрекидна пресликавања, то постоје околине $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(x)$ такве да важи $f_1(U_1) \subseteq V_1$ и $f_2(U_2) \subseteq V_2$. Скуп $U = U_1 \cap U_2$ је околина тачке x и скупови $f_1(U)$ и $f_2(U)$ су дисјунктни. Дакле, $x \in U \subseteq G$, па је скуп G отворен јер садржи околину сваке своје тачке. $\triangle$