

НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

У класи метричких простора значајну улогу имају нормирани простори. Они поред тополошке структуре имају и векторску структуру.

ДЕФИНИЦИЈА 1. Абелова $\mathbb{F}$ -група $(X, +)$ је векторски простор над пољем скалара $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ако је дефинисано множење вектора скаларом $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{F}, x \in X$, и важи: $1x = x$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, за све скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ и за све векторе $x, y \in X$.

ДЕФИНИЦИЈА 2. Нека је X векторски простор над пољем скалара $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Пресликавање $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, за које важи:

$$1^\circ \quad \|x\| \geq 0, \quad x \in X,$$

$$2^\circ \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0},$$

$$3^\circ \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{F}, x \in X,$$

$$4^\circ \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in X,$$

назива се норма на X , а уређени пар $(X, \|\cdot\|)$ назива се нормирани простор.

ЛЕМА 1. Сваки нормирани простор $(X, \|\cdot\|)$ је уједно и метрички простор са метриком

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

ДОКАЗ. Покажимо да су задовољене особине метрике.

$$1^\circ \quad d(x, y) = \|x - y\| \geq 0, \quad x, y \in X;$$

$$2^\circ \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = y;$$

$$3^\circ \quad d(x, y) = \|x - y\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x), \quad x, y \in X;$$

$$4^\circ \quad d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in X.$$

Доказали смо да је сваки нормирани простор $(X, \|\cdot\|)$ уједно и метрички (X, d) где је $d(x, y) = \|x - y\|$, за свако $x, y \in X$. $\square$

НАПОМЕНА. Обрнуто тврђење није тачно. На пример, у метрички простор s се не може увести норма која индукује метрику

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in s.$$

Применом леме 1. се сва својства метричких простора могу (једноставно) пренети на нормиране просторе. На пример, за низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у нормираном простору $(X, \|\cdot\|)$ кажемо да конвергира ка $x_0 \in X$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ да за све $n \geq n_0$ важи $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$, тј. ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_0\| < \varepsilon).$$

Слично и за Кошијев и ограничен низ се дефиниције из метричких простора преводе у нормиране просторе.

ПРИМЕР 1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ је нормирани простор, а норма $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < +\infty$, је дајна са

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Простор $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ је нормиран простор, где је норма $\|\cdot\|_\infty$ дајна са

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

ПРИМЕР 2. Простори низова c_0 , c и m са операцијама сабирања и множења скаларом дајим са $x + y = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $\alpha x = (\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{F}$, су нормирани простори са нормом

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

ПРИМЕР 3. Простори низова ℓ_p , $1 \leq p < +\infty$, су нормирани простори где је

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p.$$

ПРИМЕР 4. На простору $\mathbb{C}[a, b]$, норма се може увести на различите начине. Нека је $f \in \mathbb{C}[a, b]$. Издвајамо следеће три норме.

$$\text{а) } \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \quad \text{б) } \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{в) } \|f\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|. \quad \diamond$$

ДЕФИНИЦИЈА 3. Нормирани простор је комплетан ако сваки Кошијев низ у њему конвергира.

Пољски математичар *Stefan Banach* је први дефинисао комплетне нормиране просторе. Ови простори су данас познати под називом *Банахови простори* и имају једну од централних улога у функционалној анализи.

ДЕФИНИЦИЈА 4. Комплетан нормирани простор $(X, \|\cdot\|)$ називамо *Банахов простор*.

ПРИМЕР 5. Сви наведени нормирани простори су комплетни, па су самим тим и Банахови простори.

ПРИМЕР 6. Векторски простор $\mathcal{P}[0, 1]$ свих могућих полинома на интервалу $[0, 1]$ са нормом $\|P\| = \max_{t \in [0, 1]} |P(t)|$ није Банахов. Заиста, уочимо низ полинома $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, дај са

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, 1].$$

Низ $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је Кошијев, јер за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ иако да за све $m \geq n \geq n_0$ важи

$$\|P_m - P_n\| = \max_{x \in [0, 1]} |P_m(x) - P_n(x)| = \max_{x \in [0, 1]} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + \frac{x^m}{m!} \right| < \varepsilon.$$

Како за свако $x \in [a, b]$ важи $P_n(x) \rightarrow e^x$, $n \rightarrow +\infty$, а функција e^x није полином, уочени Кошијев низ не конвергира у $\mathcal{P}[0, 1]$, па простор $\mathcal{P}[0, 1]$ није комплетан. $\diamond$

У нормираном простору $(X, \|\cdot\|)$ може се дефинисати конвергентан ред $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, где је $x_n \in X$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

ДЕФИНИЦИЈА 5. Сума $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ назива се n -та парцијална сума реда $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. У нормираном простору $(X, \|\cdot\|)$, ред $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ је конвергентан ако је низ n -тих парцијалних сума $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан.

ДЕФИНИЦИЈА 6. Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ апсолутно конвергира у $(X, \|\cdot\|)$ ако је бројевни ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$ конвергентан.

НАПОМЕНА. Из Анализе 1 је познато да је сваки апсолутно конвергентан бројевни ред и конвергентан. Али обрнуто није тачно, „обична“ и апсолутна конвергенција се разликују. Наиме, бројевни ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ конвергира али он није апсолутно конвергентан.

ТЕОРЕМА 1. Нормиран простор X је комплетан ако и само ако сваки апсолутно конвергентан ред у њему конвергира.

ДОКАЗ. (Доказ овог тврђења је за већу оцену.) Претпоставимо да је простор X комплетан и да ред $\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\|$ конвергира. Обележимо $\bar{s}_n = \sum_{k=1}^n \|x_k\|$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је

$$\|s_m - s_n\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| = |\bar{s}_m - \bar{s}_n| < \varepsilon, \quad m \geq n \geq n_0,$$

па је низ (s_n) Кошијев. Како је X комплетан простор, то низ $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира, па и ред $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ конвергира.

Претпоставимо сада да сваки апсолутно конвергентан ред у X и обично конвергира. Нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ произвољан Кошијев низ у X . Дефинишимо низ природних бројева $(k_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ на следећи начин

$$k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid (\forall \nu \geq k) \|x_\nu - x_k\| < 1/2^0\},$$

$$k_{n+1} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > k_n \wedge (\forall \nu \geq k) \|x_\nu - x_k\| < 1/2^{n+1}\}.$$

Такав низ $(k_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ постоји јер је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев. Очигледно је $k_0 < k_1 < \dots$. Уочимо подниз $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и обележимо $y_n = x_{k_n}$. Посматрајмо ред

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} (y_\nu - y_{\nu-1}) = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots$$

Ред $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \|y_\nu - y_{\nu-1}\|$ конвергира (доказати!). На основу претпоставке да сваки апсолутно конвергентан ред и обично конвергира, следи да ред $\sum_{\nu=1}^{+\infty} (y_\nu - y_{\nu-1})$ конвергира, а одатле и да

низ $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира. Дакле, Кошијев низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има конвергентан подниз, па је и сам конвергентан. Према томе, простор X је комплетан. $\square$

ПРЕД-ХИЛБЕРТОВИ ПРОСТОРИ

Дефинисаћемо пред-Хилбертове просторе за које се везују нека значајна тврђења.

ДЕФИНИЦИЈА 7. Нека је X векторски простор над пољем скалара $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ за које важи:

- 1° $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad x \in X,$
- 2° $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0},$
- 3° $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad x, y \in X,$
- 4° $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{F}, \quad x, y \in X,$
- 5° $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad x, y, z \in X,$

назива се скаларни производ, а уређени пар $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ се назива униформан или пред-Хилбертов простор.

Следеће особине скаларног производа се могу лако извести из претходне дефиниције.

- 1. $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle, \quad x, y, z \in X;$
- 2. $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle, \quad x, y_1, y_2 \in X;$
- 3. $\langle \lambda x, \lambda y \rangle = |\lambda|^2 \langle x, y \rangle, \quad x, y \in X.$

ПРИМЕР 7. Простор $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ је пред-Хилбертов са скаларним производом дајим са

$$\langle z, \eta \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{\eta}_i, \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n), \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n.$$

ПРИМЕР 8. У простору $\mathbb{C}[a, b]$ скаларни производ је дајим са

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in \mathbb{C}[a, b],$$

где је $\bar{g}$ конјужовано комплексна функција функције $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

ПРИМЕР 9. Простор ℓ^2 са скаларним производом

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \bar{y}_n,$$

где је $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ и $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, је пред-Хилбертов простор.

Следећа релација је позната под називом неједнакост Коши-Шварца. Ова неједнакост се користи при доказивању неких тврђења, стога ћемо је навести и доказати.

ТЕОРЕМА 2. За векторе $x, y \in X$ важи неједнакост

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad x, y \in X.$$

ДОКАЗ. За $y = \mathbf{0}$ доказ је тривијалан. Претпоставимо да је $y \neq \mathbf{0}$ и нека је $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Посматрајмо

$$\|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0.$$

Претходни израз можемо посматрати као квадратну функцију по λ ,

$$f(\lambda) = \langle y, y \rangle \lambda^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle. \quad (1)$$

Ова функција има минимум у тачки $\lambda_0 = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$. Заменом вредности $\lambda_0 = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ у (1), имамо

$$\langle y, y \rangle \cdot \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \right)^2 - 2\langle x, y \rangle \cdot \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} + \langle x, x \rangle \geq 0,$$

одакле сређивањем добијамо тражено тврђење. Случај $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ се слично доказује. $\square$

Помоћу скаларног производа се може увести норма у пред-Хилбертовом простору.

ТЕОРЕМА 3. Ако је $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *прег-Хилбертов простор*, онда је $(X, \|\cdot\|)$ *нормиран простор*, при чему важи $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, за све $x \in X$.

ДОКАЗ. Испитајмо да ли важе особине норме. За свако $x \in X$ важи $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$. Претходни израз је добро дефинисан на основу прве особине скаларног производа, а ненегативан на основу особине функције квадратни корен.

Важи $\|x\| = 0$ ако и само ако је $x = \mathbf{0}$, што следи из чињенице да је $\langle x, x \rangle = 0$ ако и само ако је $x = \mathbf{0}$.

Како је

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2,$$

следи $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

Применом Коши-Шварцове неједнакости, добијамо

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

тј. важи неједнакост троугла. Овим смо показали да су задовољене све особине норме. $\square$

За овако уведено норму кажемо да је индукована скаларним производом.

ТЕОРЕМА 4. Нека је $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *прег-Хилбертов простор* и $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *конвергентни* низови у X . Ако је $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$, тада је $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$.

ДОКАЗ. Низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је конвергентан, самим тим и ограничен, па постоји $M > 0$ да је $\|x_n\| \leq M$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Искористићемо неједнакост Коши-Шварца, као и да $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ и $\|y_n - y\| \rightarrow 0$, када $n \rightarrow +\infty$. Имамо да је

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \\ &\leq M \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Дакле, доказали смо непрекидност пресликавања $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$, за свако $x, y \in X$. $\square$

Потребан и довољан услов да у нормираном простору $(X, \|\cdot\|)$ постоји скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ је да важи релација паралелограма,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Релација паралелограма је веома корисна, јер уколико доказујемо да одређени простор није пред-Хилбертов, довољно је показати да релација паралелограма није задовољена.

ПРИМЕР 10. Простори ℓ_p , $p \geq 1$, $p \neq 2$, нису пред-Хилбертови. Наиме, у њима не важи релација паралелограма. Заиста, за $e_1 = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_p$ и $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell_p$ је $\|e_1\|_p = \|e_2\|_p = 1$, $\|e_1 + e_2\|_p = \sqrt[p]{2}$ и $\|e_1 - e_2\|_p = \sqrt[p]{2}$. Тада је $2(\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2) = 4$ и $\|e_1 + e_2\|^2 + \|e_1 - e_2\|^2 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}}$, па би користећи релацију паралелограма требало да важи $4 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}}$, тј. $\frac{2}{p} = 1$, тј. $p = 2$. Дакле, ℓ_p , $p \geq 1$, $p \neq 2$ нису пред-Хилбертови простори. $\diamond$

ДЕФИНИЦИЈА 8. Пред-Хилбертов простор који је као нормиран простор, у односу на норму индуковану скаларним производом, комплетан, зове се Хилбертов простор.

Хилбертове просторе ћемо означавати са $\mathcal{H}$. Како је Хилбертов простор комплетан, закључујемо да је сваки Хилбертов простор и Банахов. Навешћемо неколико примера Хилбертових простора.

ПРИМЕР 11. Простор $(\mathbb{F}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ са скаларним производом $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$, где је $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, је Хилбертов простор.

ПРИМЕР 12. Простор низова ℓ_2 , са скаларним производом $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, је Хилбертов простор.

НАПОМЕНА. Приметимо да је простор $(\mathbb{C}[a, b], d_\infty)$ комплетан али није пред-Хилбертов, а простор $(\mathbb{C}[a, b], \|\cdot\|_2)$ јесте пред-Хилбертов али није комплетан.

Хилбертов простор можемо посматрати као генерализацију еуклидског простора. Методе векторске алгебре се преносе са еуклидске равни и простора на просторе са било којом коначном или бесконачном димензијом. Први пут су изучавани у радовима Хилберта почетком 19. века, а затим добијали на свом значају и примени. Примењују се у теорији парцијалних диференцијалних једначина, квантној механици, Фуријеовој анализи, али и многим другим областима.