Конвергенција низова у пред-Хилбертовом простору

Пошто је сваки пред-Хилбертов простор нормиран, у њему је конвергенција дефинисана преко норме. У простору са скаларним производом може се дефинисати још један тип конвергенције, тзв. слаба конвергенција.

Дефиниција 1. (***Слаба конвергенција***) *Низ вектора $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у пред-Хилбертовом простору X слабо конвергира ка вектору $x \in X$ ако $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ када $n \to +\infty$ за свако $y \in X$. У том случају пишемо $x_n \xrightarrow{s} x \ (n \to +\infty)$.*

Услов из претходне дефиниције може се заменити са $\langle x_n - x, y\rangle \to 0$ када $n \to +\infty$ за свако $y \in X$.

Одмах се поставља питање односа између слабе и јаке конвергенције.

Теорема 1. *Јако конвергентан низ слабо конвергира, тј.*

$$x_n \to x,\ n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad x_n \xrightarrow{s} x \ (n \to +\infty).$$

Доказ. Претпоставимо да низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ јако конвергира ка x, односно $\|x_n - x\| \to 0$ када $n \to +\infty$. Из Коши-Шварцове неједнакости имамо

$$0 \leqslant |\langle x_n - x, y\rangle| \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Одатле имамо да $\langle x_n - x, y\rangle \to 0$ када $n \to +\infty$ за свако $y \in X$, тј. низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ слабо конвергира ка x. □

Теорема 2. *Ако $x_n \xrightarrow{s} x \ (n \to +\infty)$ и $\|x_n\| \to \|x\|$, $n \to +\infty$, онда $x_n \to x$, $n \to +\infty$.*

Доказ. Ако $x_n \xrightarrow{s} x \ (n \to +\infty)$, онда за свако $y \in X$ имамо $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$, $n \to +\infty$. Отуда, $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle = \|x\|^2$ када $n \to +\infty$. Сада,

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x\rangle \\
&= \langle x_n, x_n\rangle - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle + \langle x, x\rangle \\
&= \|x_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \to \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0, \quad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Дакле, низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ јако конвергира ка x. □

ОРТОГОНАЛНОСТ ВЕКТОРА

ПОДСЕЋАЊЕ.
Нека је дато n вектора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ векторског простора X над пољем скалара $\mathbb{F}$ и нека је $x_k \neq \mathbf{0},\ k = 1, 2, \dots, n$.

- Вектор $x \in X$ је линеарна комбинација датих (ненула) вектора ако постоје скалари $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ тако да важи
$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$
- Скуп свих вектора $x \in X$ таквих да је x линеарна комбинација вектора $x_1, x_2, \dots, x_n$ означаваћемо са $\operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, а са $\overline{\operatorname{span}}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ његово затворење.
- Скуп вектора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ је линеарно независан скуп ако
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathbf{0}$$
важи само када је $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, тј. скуп вектора је линеарно независан ако ниједан од његових елемената није линеарна комбинација преосталих елеманата тог скупа.
- Скуп $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ је линеарно зависан скуп ако постоје скалари $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ од којих је бар један различит од нуле и важи
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathbf{0}.$$
- Скуп вектора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ је база векторског простора X ако је линеарно независан и ако је $\operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = X$. Број n се назива димензија простора X.
- Векторски простор је бесконачно димензиони простор ако ниједна његова база није коначна.

Нека је $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ пред-Хилбертов простор.

ДЕФИНИЦИЈА 2. *Елементи x и y из X су ортогонални (у ознаци $x \perp y$) ако је $\langle x, y\rangle = 0$. Ако за $z \in X$ важи да је $\|z\| = 1$, кажемо да је z нормиран елемент.*

ДЕФИНИЦИЈА 3. *Ако су E и F подскупови од пред-Хилбертовог простора X такви да је сваки вектор из E ортогоналан на сваком вектору из F, каже се да је скуп E ортогоналан на F, и означава са $E \perp F$.*

ДЕФИНИЦИЈА 4. *Фамилија вектора $\{x_i\}_{i\in I}$ (где је I произвољан индексни скуп) у пред-Хилбертовом простору X се назива ортогонална ако је $x_i \perp x_j$ за све $i \neq j$ из I. Ако је уз то $\|x_i\| = 1$ за све $i \in I$, фамилија се назива ортонормирана.*

Дефиниција 5. *Нека је* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ вектора у Хилбертовом простору* $\mathcal{H}$.

1° *Низ* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *је база за простор* $\mathcal{H}$ *ако за свако* $x \in \mathcal{H}$ *постоје јединствени скаларни коефицијенти* $(c_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *такви да је*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(x) e_n. \tag{1}$$

2° *База* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *је ортонормирана ако је* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ортонормиран систем, тј. ако важи*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Напомена. Вектор $x = \mathbf{0}$ је ортогоналан на сваки вектор и не припада ниједној бази. Скуп вектора који садржи нулу је линеарно зависан скуп.

Пример 1. *У Хилбертовом простору* $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ортонормирана база је* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *где је* $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *и* $e_3 = (0,0,1)$. *Димензија овог простора је* 3.

Пример 2. *У бесконачно димензионом Хилбертовом простору* $(\ell_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ортонормиран систем вектора* $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *где* $e_n = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-1 \text{ пута}}, 1, 0, \ldots)$, *је база овог простора.*

Теорема 3. (**Питагорина теорема**) *Нека је* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *ортогоналан подскуп пред-Хилбертовог простора* X. *Тада је*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Доказ. Оставља се студентима за самосталан рад.

Због специфичности скаларног производа на Хилбертовим просторима, не можемо увести ортогоналност у Банаховим просторима на исти начин, али се поставља питање да ли може некако аналогно. Једна од најпознатијих дефиниција базира се на следећој леми.

Лема 1. *Нека је* X *пред-Хилбертов простор и* $x, y \in X$. *Тада је* $x \perp y$ *ако и само ако је*

$$\|y\| \leqslant \|\lambda x + y\|, \quad \lambda \in \mathbb{F}.$$

Доказ. $(\Rightarrow)$ Нека је $x \perp y$. Тада је

$$\|\lambda x + y\|^2 = |\lambda|^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 \geqslant \|y\|^2.$$

$(\Leftarrow)$ Ако је $x = \mathbf{0}$, јасно је да је $x \perp y$ за свако $y \in X$. Нека је $x \neq \mathbf{0}$. За $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$ имамо

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 &\leqslant \|\lambda x + y\|^2 \leqslant \Big\|y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x\Big\|^2 \\
&\leqslant \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}\Big\langle y, \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x\Big\rangle + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|x\|^2} \\
&\leqslant \|y\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|x\|^2},
\end{aligned}$$

одакле закључујемо да $\langle x, y\rangle$ мора да буде једнак 0, па је $x \perp y$. $\square$

Сада ћемо дати дефиницију коју многи прихватају као главну при дефинисању ортогоналности у Банаховим просторима.

ДЕФИНИЦИЈА 6. *За вектор x се каже да је ортогоналан на вектор y у Банаховом простору X ако је $\|\lambda x + y\| \geqslant \|y\|$, за свако $\lambda \in \mathbb{F}$.*

У позадини многих поступака апроксимације вектора x који припада неком простору бесконачне димензије полази се од потпростора „мале“ димензије и одређује се груба апроксимација вектора x која припада том потпростору. Затим се, додавањем елемената из (подскупа) комплемента тог потпростора добија боља апроксимација, у „већем“ потпростору. Наставком поступка требало би да се добије довољно добра апроксимација полазног вектора. Појам пројекције дефинише „најбољу“ апроксимацију вектора x у датом потпростору.

ДЕФИНИЦИЈА 7. *Нека је $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ пред-Хилбертов простор и $M \subset X$. Ортогонални комплемент скупа M, у ознаци $M^{\perp}$, је скуп*

$$M^{\perp} = \{y \in X \mid \langle x, y\rangle = 0,\ x \in M\}.$$

НАПОМЕНА. Приметимо да је $M \cap M^{\perp} \subseteq \{\mathbf{0}\}$. Уместо $(M^{\perp})^{\perp}$ писаћемо $M^{\perp\perp}$, а уместо $\{x\}^{\perp}$ писаћемо $x^{\perp}$.

ТЕОРЕМА 4. *Ако је M подскуп пред-Хилбертовог простора X, тада је $M^{\perp}$ затворен потпростор од X.*

ДОКАЗ. Нека је $x, y, z \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $x \perp y$ и $x \perp z$. Очигледно је $x \perp (y+z)$ и $x \perp \lambda y$, па је $x^{\perp}$ потпростор у X. Како је $f : u \to \langle\cdot, u\rangle$, $u \in X$, непрекидна функција и $x^{\perp} = f^{-1}\{0\}$, то је (видети вежбе!) $x^{\perp}$ затворен подскуп у X. Из $M^{\perp} = \bigcap\limits_{x \in M} x^{\perp}$ (произвољан пресек затворених скупова), закључујемо да је $M^{\perp}$ затворен у X. $\square$

ТЕОРЕМА 5. *Нека је X пред-Хилбертов простор и $E, F \subseteq X$ такви да је $E \subseteq F$. Тада је $F^{\perp} \subseteq E^{\perp}$.*

ДОКАЗ. За $h \in F^{\perp}$ је $\langle f, h\rangle = 0$ за све $f \in F$, па самим тим и за све $f \in E$. Дакле, $h \in E^{\perp}$, па је $F^{\perp} \subseteq E^{\perp}$. $\square$

ДЕФИНИЦИЈА 8. *Нека су дати нормиран простор $(X, \|\cdot\|)$, тачка $x \in X$ и скуп $A \subset X$. Тачка $a \in A$ је пројекција тачке x на скуп A, у ознаци $P_A(x) = a$, ако важи $\|x - a\| = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$.*

У следећој теореми се показује егзистенција и јединственост пројекције тачке на потпростор.

ТЕОРЕМА 6. *Нека је $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Хилбертов простор и нека је M затворен потпростор од $\mathcal{H}$. Тада важе следећа тврђења.*

1° *За сваки елемент $x \in \mathcal{H}$ постоји јединствена пројекција на M.*

2° *Сваки елемент $x \in \mathcal{H}$ се на јединствен начин може представити у облику $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in M$, $x_2 \in M^{\perp}$, што се означава са $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$.*

Доказ. (За већу оцену) 1° На основу дефиниције инфимума, постоји низ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ елемената скупа M такав да $\inf\limits_{y\in M}\|x-y\| = \lim\limits_{n\to+\infty}\|x-y_n\|$. Покажимо да је $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев, самим тим и конвергентан. Користећи закон паралелограма, добијамо

$$\begin{aligned}
\|y_n-y_m\|^2 &= \|(y_n-x)+(x-y_m)\|^2\\
&= 2\|y_n-x\|^2+2\|x-y_m\|^2-\|(y_n-x)-(x-y_m)\|^2\\
&= 2\|y_n-x\|^2+2\|x-y_m\|^2-\|y_n+y_m-2x\|^2\\
&= 2\|y_n-x\|^2+2\|x-y_m\|^2-4\Big\|\frac{y_n+y_m}{2}-x\Big\|^2.
\end{aligned}$$

Нека је $\varepsilon>0$. Постоји $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ да за све $k\geqslant n_o(\varepsilon)$ важи

$$\|y_k-x\|^2\leqslant\Big(\inf_{y\in M}\|x-y\|\Big)^2+\frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{2}$$

Како је M потпростор од X то $\frac{y_n+y_m}{2}\in M$, па је

$$\Big\|\frac{y_n+y_m}{2}-x\Big\|^2\geqslant\Big(\inf_{y\in M}\|x-y\|\Big)^2. \tag{3}$$

Користећи неједнакости (2) и (3), за довољно велике индексе m,n важи $\|y_n-y_m\|^2\leqslant\varepsilon^2$, тј. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев низ, па је самим тим и конвергентан. Постоји $a\in X$ тако да важи $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$. Пошто је M затворен, следи да $a\in M$. Из непрекидности норме следи

$$\lim_{n\to+\infty}\|x-y_n\|=\|x-a\|,$$

тј. $a=P_A(x)$.

Докажимо јединственост пројекције. Нека је $b\neq a$ и $b=P_A(x)\in M$.

$$\begin{aligned}
\|a-b\|^2 &= 2\|a-x\|^2+2\|x-b\|^2-4\Big\|\frac{a+b}{2}-x\Big\|^2\\
&\leqslant 4\Big(\inf_{y\in M}\|x-y\|\Big)^2-4\Big(\inf_{y\in M}\|x-y\|\Big)^2=0,
\end{aligned}$$

одакле следи да је $a=b$.

2° Нека је $x\in X$, $x\neq\mathbf{0}$ и x_1 ортогонална пројекција вектора x на M. Ако је $x_2=x-x_1$ и $y\in M$ такав да је $\|y\|=1$, тада из $x_1+\langle x_2,y\rangle y\in M$ следи

$$\|x_2\|^2=\|x-x_1\|^2\leqslant\|x-x_1-\langle x_2,y\rangle y\|^2=\langle x_2-\langle x_2,y\rangle y,x_2-\langle x_2,y\rangle y\rangle=\|x_2\|^2-|\langle x_2,y\rangle|^2.$$

Одавде следи да је $\langle x_2,y\rangle=0$, што значи да $x_2\in M^\perp$. Дакле, $x=x_1+x_2\in M+M^\perp$.

Јединственост разлагања је последица јединствености пројекције. □

Последица 1. Нека је $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ Хилбертов простор и M потпростор од $\mathcal{H}$. Тада је $M^{\perp\perp}=\overline{M}$.

Доказ. По дефиницији следи да је $M\subseteq M^{\perp\perp}$, па је $\overline{M}\subseteq M^{\perp\perp}$. Докажимо обрнуту инклузију. Уочимо произвољан елемент $x\in M^{\perp\perp}$. На основу претходне теореме, постоје $y\in M$ и $z\in M^\perp$ тако да је $x=y+z$. Како је $M\subseteq\overline{M}\subseteq M^{\perp\perp}$, то $y\in M^{\perp\perp}$, па из $z=x-y$, следи да је $z\in M^{\perp\perp}$. Дакле, $z\in M^\perp$ и $z\in M^{\perp\perp}$, а како је $M^\perp\cap M^{\perp\perp}=\{\mathbf{0}\}$, закључујемо да је $z=\mathbf{0}$, тј. $x=y\in M\subseteq\overline{M}$. Доказали смо да је $M^{\perp\perp}=\overline{M}$. □

ТЕОРЕМА 7. (**Грам-Шмитов поступак ортогонализације**) *Сваки коначно димензиони пред-Хилбертов простор има ортонормирану базу.*

ДОКАЗ. Подсетити се доказа! Приметити да је поступак ортогонализације, у суштини, примена теореме о декомпозицији Хилбертовог простора $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$ за разне потпросторе M.

Ако пред-Хилбертов простор X нема коначну базу, поставља се природно питање у ком тренутку ћемо настављајући Грам-Шмитов поступак доћи до базе (можда и непребројиве) чије линеарне комбинације могу да прикажу сваки елемент $x \in X$. Одговор на ово питање захтева увођење појма потпуног ортонормираног система.

ДЕФИНИЦИЈА 9. *Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ у нормираном простору X. Низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је потпун или фундаментaлан у X ако је $\overline{\mathrm{span}}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = X$, тј. ако је $\mathrm{span}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ свуда густ у X.*

ЛЕМА 2. *За низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у Хилбертовом простору $\mathcal{H}$ следећа тврђења су еквивалентна.*

1° $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *је потпун.*

2° *Ако је $\langle x, x_n\rangle = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тада је $x = \mathbf{0}$.*

Следећа теорема даје еквивалентне услове који су потребни да би ортонормирани систем $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ био ортонормирана база.

ТЕОРЕМА 8. *Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ортонормирани систем у $\mathcal{H}$. Следећа тврђења су еквивалентна.*

1° $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *је ортонормирана база.*

2° $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, \quad x \in \mathcal{H}.$

3° $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$

4° (**Парсевалова једнакост**) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}.$

5° $\overline{\mathrm{span}}(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathcal{H}.$

6° *Ако је $\langle x, e_n\rangle = 0,\ n \in \mathbb{N}$, онда је $x = \mathbf{0}$.*

ДЕФИНИЦИЈА 10. *Ако је $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ортонормирана база за произвољан Хилбертов простор $\mathcal{H}$, тада се репрезентација $x = \sum_{n=1}^{+\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ назива Фуријеов развој елемента $x \in \mathcal{H}$, а коефицијенти $\langle x, e_n\rangle,\ n \in \mathbb{N}$, Фуријеови коефицијенти.*

НАПОМЕНА. Приметимо да је у теореми 8. део 3° скаларни производ задат преко Фуријеових коефицијената елемената x и y у односу на ортонормирану базу $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, док Парсевалова једнакост говори да је квадрат норме елемента једнак суми квадрата његових Фуријеових коефицијената.

ТЕОРЕМА 9. *Сваки сепарабилан Хилбертов простор $\mathcal{H}$ има ортонормирану базу.*