ФУНКЦИОНАЛНА АНАЛИЗА
Домаћи рад
06.04.2020. године

1. Нека је $(X, \|\cdot\|)$ нормиран простор. Доказати тзв. обрнуту неједнакост троугла
$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$
2. Нека је $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ пред-Хилбертов простор. Доказати следеће особине скаларног производа на основу дефиниције скаларног производа
   а) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle, \quad x, y, z \in X;$
   б) $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle, \quad x, y_1, y_2 \in X;$
   в) $\langle \lambda x, \lambda y\rangle = |\lambda|^2\langle x, y\rangle, \quad x, y \in X.$
3. Доказати да простори c, c_0 и m са скаларним производом
$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n},$$
   где је $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, нису пред-Хилбертови простори.
4. Доказати да је производ $X = X_1 \times X_2$ унитарних простора X_1 и X_2, такође, унитаран простор са скаларним производом датим са
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle_X = \langle x_1, y_1\rangle_{X_1} + \langle x_2, y_2\rangle_{X_2}.$$
5. (За већу оцену) Доказати, у случају $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, неједнакост Коши-Шварца.
6. (За већу оцену) Доказати да ако $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, тада $\ell_p \subsetneqq \ell_q$ и $\|x\|_{\ell_q} \leqslant \|x\|_{\ell_p}$ за свако $x \in \ell_p$.
7. (За већу оцену) Доказати да $\|\cdot\|_{\ell_p}$, $0 < p < 1$, не задовољава неједнакост троугла, па зато није норма на простору ℓ_p.