УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МЕТОДИКА НАСТАВЕ АНАЛИЗЕ
3. недеља рада на даљину

КРАГУЈЕВАЦ
2020

Садржај

Глава 1

Мисаони поступци

Наставник математике у наставном процесу помаже ученицима да открију и упознају нове математичке истине. Посебно је важно откривање пута ка самосталном стваралачком раду ученика. Управо зато су мисаони поступци важни за савремену наставу математике па су, самим тим, и предмет изучавања у методици наставе математике. Основни мисаони поступци (закони мишљења) су: *анализа* и *синтеза*, *апстракција* и *конкретизација*, *индукција* и *дедукција*, *генерализација* и *специјализација*, *аналогија*.

Креативан наставник може ученике оспособити за рад који је близак истраживачком раду кроз погодно изабране проблеме и правилном применом закона мишљења. Ученици треба да поступно и примерено науче да користе сваку од ових метода, без обзира да ли ће се они убудуће бавити математиком. Математички начин мишљења се примењује у многим другим наукама. Акценат треба ставити на речима поступно и примерено. Ако се мисаони поступци поступно и правилно примењују са осећајем за тежину математичких садржаја и уважавајући математичке способности сваког појединца, можемо очекивати да ће настава математике бити успешна и са резултатима. У супротном, ученици ће имати потешкоћа при усвајању и савладавању математичких садржаја (лоши резултати на PISA-тесту).

Анализа је основни мисаони поступак (закон мишљења). Њена супротна метода је *синтеза*. Постоје битне разлике у приступу проблему између ове две методе, међутим, оне се међусобно допуњују и практично су неодвојиве, па често говоримо о аналитичко-синтетичкој методи.

Анализа је мисаона операција којом рашчлањујемо целину на делове, проучавамо те делове и доносимо закључке о њима. Целина у математици је најчешће неки проблем који решавамо. Анализом проблем сводимо на једноставније проблеме или тврђења која су очигледна или лако доказива. У процесу рашчлањавања покушавамо да доведемо у везу са датим проблемом нека раније доказана тврђења и по потреби се направи скица-цртеж.

Различити описи анализе су: анализа је метода истраживања код које се од последица долази до узрока, анализа је проналажење, анализа је стварање плана, анализа је метода решавања унатраг, анализа је извођење од краја ка почетку, анализа је регресивно закључивање.

Синтеза је мисаона операција код које се од појединачних делова (чињеница и једноставних тврђења) саставља целина (сложеније тврђење). Супротна је анализи, тј. код синтезе узимамо оно што је у анализи било последње доказано и враћамо све уназад. На тај начин долазимо до конструкције оног што је тражено.

Анализа своје тежиште ставља на идеје и откривање, док синтеза на спровођење. На темељима анализе, синтезу је лако спровести у сваком појединачном примеру. Зато ћемо више пажње поклонити анализи.

Почеци анализе као научне методе се срећу у старој Грчкој. Стари Грци су своја прва математичка знања преузели од Египћана, а затим сами развили мисаоне поступке и њиховом применом развили математику као науку. Анализа и синтеза су међу првим коришћеним законима мишљења. Оне су се развијале на геометријским проблемима. Код геометријских конструкција се полази од задатих величина и преко датих захтева добијају тражене величине. Затим следи доказ конструкције и конструкција која представља синтезу.

Нажалост, често се у уџбеницима математике, па и у самом наставном процесу, не поклања много пажње правилној примени закона мишљења. Са тог гледишта може се чак установити за обраде неких математичких садржаја да су погрешне.

ПРИМЕР 1.1. *Ако су a и b позитивни реални бројеви, онда аритметичку и геометријску средину тих бројева повезује неједнакост $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.*

РЕШЕЊЕ. Да бисмо доказали ову неједнакост полазимо од ње и редом изводимо неједнакости $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Ово није доказ већ анализа којом је откривен почетни корак у доказу, тј.

очигледна неједнакост $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Наводимо доказ неједнакости.

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0 &\Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow a+b \geqslant 2\sqrt{ab}\\ &\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}\end{aligned}$$

Ученици би требало да схвате да анализа нема снагу доказа тврђења, али да њена примена води ка откривању начина доказивања тврђења. За доказивање се користи синтеза. $\diamondsuit$

Решавање сваког проблема има у себи нешто истраживачко и стваралачко. Наставник код својих ученика треба да развија радозналост духа, склоност за самосталан умни рад и да им указује на путеве до нових открића. Креативан наставник математике кроз креативну наставу има велике изгледе да код ученика развије креативне особине.

Описаћемо примену анализе у неколико подручја школске математике.

1.1 Примена *анализе* код алгебарских неједнакости

У збиркама задатака из математике често се читава поглавља посвећују неједнакостима. Такви задаци се јављају на математичким такмичењима и сама решења су углавном кратка и сажета, а нека се заснивају на оштроумности и домишљатости. Из таквих доказа се може доста научити, међутим, главна им је замерка што за циљ имају потврђивање постављене конкретне тврдње, а запостављена је методичка страна доказа, односно објашњење и разрада поступка који би се могао применити и у другим сличним проблемима. Само подручје неједнакости је погодно за примену *анализе* јер се овде истраживање може одмах усмерити на прави пут који често брзо даје позитивне резултате.

У настави математике *синтези* најчешће не претходи *анализа*, а то утиче на јасноћу проучавања и разумевање проблема, а тиме и знатно умањује вредност наставе. *Анализа* је у мањој или већој мери нужна у свим истраживањима и не сме се избегавати.

Постоје различити начини доказивања алгебарских неједнакости. Код неких проблема *анализа* је кратка и готово непотребна. На *синтезу*, тј. доказивање, се одмах прелази:

1) ако је начин доказивања очигледан, лако уочљив, природан и сам се намеће,

2) ако се види могућност примене познатих посебних неједнакости,

3) ако је могућа примена методе математичке индукције.

Тренутно ће нас занимати оне алгебарске једнакости код којих све то није видљиво, па је потребна дубља анализа да би се дошло до начина њиховог доказивања.

У тим случајевима *анализа* се спроводи на следећи начин. Као полазни корак нам служи задата неједнакост N_0 коју настојимо трансформацијама (множење неједнакости заједничким садржиоцем свих именилаца разломака који се појављују у неједнакости, свођење неједнакости на облик $A > 0$, ослобађање од заграда, прегруписавање чланова, извлачење заједничких чинилаца) да преведемо у што једноставније неједнакости N_1, N_2,..., N_{k-1}, N_k. Циљ је да последња неједнакост N_k буде очигледна.

Ако смо неједнакост свели на облик $A > 0$, очигледност последње неједнакости постиже се тако што се лева страна неједнакости прикаже као збир позитивних сабирака, најчешће збир квадрата реалних бројева. На тај начин се добија низ истинитих импликација

$$N_0 \Rightarrow N_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow N_{k-1} \Rightarrow N_k.$$

Тиме није доказана тачност полазне неједнакости N_0 већ је извођењем од краја према почетку откривен почетни корак доказа, тј. неједнакост N_k. Када је ово одрађено, доказивање неједнакости, тј. *синтеза*, се лако спроводи. Довољно је испитати важе ли све импликације у супротном смеру.

Пример 1.2. *Ако су x и y позитивни реални бројеви такви да је $x + y = 1$, доказати да важи неједнакост*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 9.$$

Решење. Лако се уочавају трансформације у низу импликација, па их експлицитно не наводимо.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geqslant 9 &\Rightarrow xy+x+y+1 \geqslant 9xy \\ &\Rightarrow 1-4xy \geqslant 0 \\ &\Rightarrow 1-4x(1-x) \geqslant 0 \\ &\Rightarrow 4x^2-4x+1 \geqslant 0 \\ &\Rightarrow (2x-1)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Извођење од краја ка почетку је завршено очигледном неједнакошћу $(2x-1)^2 \geqslant 0$ која представља почетни корак доказа. Захваљујући *анализи* доказ је кратак и јасан, а уједно нам омогућава да одговоримо на питање када важи једнакост. ♢

Пример 1.3. *Доказати да за позитивне реалне бројеве* a, b, c *важи неједнакост*

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geqslant a+b+c.$$

Решење.

$$\begin{aligned}\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geqslant a+b+c &\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab \\ &\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab \geqslant 0\end{aligned}$$

Приметимо да након одређених трансформација, добијамо

$$a^2(b^2+c^2-bc)+b^2(c^2-ca)-c^2ab \geqslant 0,$$

и да нам ово није најпогоднији облик за даље сређивање јер би нам у првој загради више одговарало да се појављује $2bc$. Зато ћемо пре груписања последњу неједнакост прво помножити са 2. Добијамо неједнакост

$$a^2(b^2+c^2-2bc)+b^2(c^2+a^2-2ac)+c^2(a^2+b^2-2ab) \geqslant 0,$$

а затим очигледну неједнакост

$$a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Последња неједнакост је почетни корак у доказу.

Краћи доказ се добија применом неједнакости која повезује аритметичку и геометријску средину. Како је

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\right)&\geqslant a,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)&\geqslant b,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)&\geqslant c,\end{aligned}$$

дата неједнакост је директна последица ових неједнакости. Наслутити овакво рашчлањавање није лако, па није ни пошло за руком ниједном ученику првог разреда на републичком такмичењу. $\diamondsuit$

Пример 1.4. *Ако су a, b, c реални бројеви који нису мањи од 1, тада важи неједнакост*

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\leqslant\sqrt{c(ab+1)}.$$

Решење. Сменом $\sqrt{a-1}=x$, $\sqrt{b-1}=y$, $\sqrt{c-1}=z$ и квадрирањем, добијамо следећи низ импликација.

$$\begin{aligned}&x+y+z\leqslant\sqrt{(z^2+1)((x^2+1)(y^2+1)+1)}\\ &\Rightarrow(x+y+z)^2\leqslant(z^2+1)((x^2+1)(y^2+1)+1)\\ &\Rightarrow(x+y+z)^2-(z^2+1)(x^2+1)(y^2+1)-(z^2+1)\leqslant 0\\ &\Rightarrow x^2y^2z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2-2xy-2xz-2yz+z^2+2\geqslant 0\end{aligned}$$

Последња неједнакост за ненегативне бројеве x, y, z је једноставнија од полазне. Једна од могућности прегруписавања чланова је

$$(x^2y^2-2xy+1)+(x^2z^2+y^2z^2+1-2xz-2yz)+x^2y^2z^2+z^2\geqslant 0.$$

Да би израз у другој загради био потпуни квадрат потребно је додати члан $2xyz^2$. Додавањем и одузимањем овог члана последња неједнакост постаје

$$\begin{aligned}(x^2y^2-2xy+1)+(x^2z^2+y^2z^2+1-2xz-2yz+2xyz^2)&\\ +(x^2y^2z^2+z^2-2xyz^2)\geqslant 0,&\end{aligned}$$

односно, очигледна неједнакост

$$(xz-1)^2+(xz+zy-1)^2+z^2(xy-1)^2\geqslant 0.$$

Одавде се лако добијају и услови под којима важи у датој неједнакости једнакост. Потребно је да $xy - 1 = 0$ и $xz + yz - 1 = 0$, тј. $x^2y^2 = 1$ и $z^2(x^2 + y^2 + 2) = 1$. Овим је *анализа* завршена и можемо прећи на доказ. $\diamondsuit$

Напомена. Овај задатак је био на савезном такмичењу 1989. године (други разред). Доказ је предложила савезна комисија и заснивао се на помоћном задатку.

Ако је $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$, онда је $\sqrt{p-1} + \sqrt{q-1} \leqslant \sqrt{pq}$. Једнакост важи ако и само ако је $pq = p + q$.

Међутим, ово је један посебан, озбиљан, задатак. Због слабог познавања анализе, ниједан ученик на такмичењу није комплетно урадио овај задатак.

Ако се наставнику учини да је доказ полазне неједнакости тежак, може за доказ да одабере било коју неједнакост из низа трансформисаних неједнакости јер је свака лакша од претходне.

1.2 Примена *анализе* код једначина

Код нестандардних задатака обично постоји више начина решавања. Методички је погрешно тражити од ученика да одмах одабере правилан и најбољи начин решавања. Управо је тражење пута који је погодан за решавања датог проблема, *анализа*, највреднији део сложеног мисаоног процеса, другачији код сваког ученика понаособ.

Пример 1.5. *Решити једначину*

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

Решење. Код једначина овог типа прва идеја је помножити једначину заједничким садржаоцем свих именилаца и средити по степенима непознате x. Након дужег сређивања добили бисмо у овом случају једначину петог степена коју није једноставно решити. Морамо потражити неку другу идеју. Уочимо да је код свих производа $x(x-5) = x^2 - 5x$, $(x-1)(x-4) = x^2 - 5x + 4$, $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ заједнички део $x^2 - 5x$. Извршимо најпре груписање одговарајућих разломака

$$\left(\frac{3}{x} + \frac{3}{x-5}\right) + \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4}\right) + \left(\frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3}\right) = 0,$$

а након сређивања добијамо

$$3\frac{2x-5}{x^2-5x}+\frac{2x-5}{x^2-5x+4}+4\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=0,$$

тј. једначине

$$\begin{aligned}2x-5&=0,\\ \frac{3}{x^2-5x}+\frac{1}{x^2-5x+4}+\frac{4}{x^2-5x+6}&=0.\end{aligned}$$

Прва једначина се лако решава, а код друге уводимо смену $x^2-5x=y$ и добијамо

$$\frac{3}{y}+\frac{1}{y+4}+\frac{4}{y+6}=0,$$

односно $2y^2+13y+18=0$. Ова метода смене (*супституција*) је омогућила редукцију и поједностављивање датог задатка, а *анализа* је припремила одређивање тражене величине. $\diamondsuit$

У претходном примеру избегли смо решавање једначине петог степена. Решавање општих једначина четвртог степена не спада у оквир школске математике. Међутим, неки специјални типови једначина као што су симетричне и биквадратне се могу решити школским математичким алатима, па се зато и изучавају. Наводимо пример где је обрађен такав случај једначина.

Пример 1.6. *Решити једначине:*

а) $(x-3)^4+(x-2)^4=17;$

б) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+\left(x+\frac{3}{2}\right)^4=82;$

в) $(x-7)^4+(x+3)^4=2500.$

Решење. На први поглед делује да су једначине сличне и да ће њихово решавање бити слично. Међутим, показаћемо да постоје извесне разлике у погодним начинима решавања сваке од њих.

1) Прва идеја која се намеће је степеновање и сређивање по степенима од x. Добијамо следеће једначине.

$$\begin{aligned}x^4-10x^3+39x^2-70x+40&=0\\ 16x^4+32x^3+120x^2+104x-615&=0\\ x^4-8x^3+174x^2-632x-9&=0\end{aligned}$$

Рационална решења прве једначине се лако уочавају. То су бројеви 1 и 4. Код друге једначине су рационална решења $\frac{3}{2}$ и $-\frac{5}{2}$ и знатно је теже доћи до њих, док трећа једначина нема рационалних решења.

2) Други начин решавања је методом неодређених коефицијената. Једначина се напише у облику производа квадратних полинома са неодређеним коефицијентима, а затим се изједначавањем коефицијената на левој и десној страни добије систем једначина. Међутим, у случају треће једначине наступа сложенија ситуација, па ова метода није погодна за њено решавање.

3) Размотримо методу која омогућује брзо решавање свих датих једначина. Ове једначине су све облика $(x-a)^4+(x-b)^4=c$. Занимљив је облик $(x-d)^4+(x+d)^4=c$, јер након степеновања добијамо биквадратну једначину $2x^4+12d^2x^2+2d^2-c=0$. Најпре уведимо смену $x-a=y-d$, $x-b=y+d$, а затим у биквадратној једначини смену $y^2=z$ којом се она преводи у квадратну једначину по непознатој z. Након две смене проблем је сведен на решавање квадратних једначина и тиме је *анализа* завршена. $\Diamond$

Примена *анализе* у описаним примерима указује на још једну важну чињеницу: ако смо *анализом* уочили методу за решавање проблема, *анализа* се поједностављује и скраћује, а даља разматрања се воде у складу са карактеристикама откривене методе. Ако желимо да истражимо и друге начине решавања датог проблема, *анализа* се наставља и продубљује.

1.3 Примена *анализе* код геометријских конструкција

Приликом решавања конструктивних задатака јавља се низ питања везаних за њихова решења. Та питања се углавном односе на поједине делове конструктивног поступка: налажење свих решења, број решења, избор датих фигура, везе између датих и тражених величина, методе, једноставност извођења итд. Да би се добио одговор на сва та питања, конструктивни поступак треба спровести по утврђеном редоследу. Конструктивни поступак се дели у четири корака: анализа, конструкција, доказ, дискусија.

Анализа конструктивног задатка је тражење начина решавања тог задатка, тј. процес његовог свођења на основне конструкције. Врло често се израђује помоћни цртеж са датим и траженим фигурама и испитују њихови односи. Понекад је потребно посматрати само део цртежа да би се открила конструкција неке помоћне фигуре, а из које следи конструкција тражене фигуре. Користе се познате планиметријске теореме и позната решења већ посматраних конструктивних задатака.

Анализе има и у дискусији јер после свега треба одговорити на питања о могућности извођења конструкције на одабрани начин, о могућности конструкције тражене фигуре ако се одабрани начин не може применити, о броју решења за сваки избор датих величина, о броју решења за сваки могући положај датих фигура итд.

Пример 1.7. *Конструисати квадрат код кога је задат збир $a + d$ дужине a странице и дужине d дијагонале.*

Решење. Нека је $ABCD$ тражени квадрат код кога је дужина странице a, а дужина дијагонале d. Цртеж би требало допунити тако да добијемо помоћну фигуру код које је један елемент дужине задате величине $a + d$. Најпогодније то можемо постићи продужавањем дијагонале или странице.

1) Продужимо дијагоналу AC за дуж CE дужине a. Троугао BCE је једнакокраки (величине углова су 135^o, $22,5^o$, $22,5^o$). Троугао ABE представља помоћну фигуру за конструкцију квадрата јер са њим има заједничку страницу AB и може се конструисати: $|AE| = a+d$, $\measuredangle BAE = 45^o$, $\measuredangle AEB = 22,5^o$.

2) Продужимо страницу AB за дуж AF дужине d. Троугао ACF је једнакокраки троугао (величине углова су 135^o, $22,5^o$, $22,5^o$). Троугао BCF је правоугли и представља помоћну фигуру за конструкцију квадрата јер са њим има једну заједничку страницу и може се конструисати: $|BF| = a + d$, $\measuredangle BFC = 22,5^o$.

Друга конструкција је погоднија јер је помоћна фигура правоугли троугао који се брже конструише, па самим тим и тражени квадрат. Лако је уочити да задатак увек има јединствено решење. $\diamondsuit$

Пример 1.8. *Конструисати троугао ABC коме су задате дужине a и c двеју његових страница и дужина h_c висине из темена C.*

Решење. Најпре се конструише страница AB чија је дужина C, а затим је потребно одредити још теме C тако да дужина дужи CB буде једнака a и да је удаљеност тачке C од праве којој припада дуж AB једнака h_c. Све тачке које задовољавају први услов леже на кружници $k(B, a)$ са центром у тачки B полупречника a. Тачке које задовољавају други услов леже на правама p_1, p_2 паралелним дужи AB и на растојању h_c од ње. Дакле, тачка C је било који елемент пресека $p_1 \cap k(B, a), p_2 \cap k(B, a)$.

Из *анализе* се уочава да задатак може имати највише четири решења, а да се дискусија о броју решења своди на дискусију о односу величина b и h_c. $\Diamond$

ПРИМЕР 1.9. *Поделити дату дуж AB тачком C на два дела тако да се читава дуж односи према већем делу исто као већи део према мањем делу (златни пресек).*

РЕШЕЊЕ. Овде нам не може помоћи никаква геометријска метода ни помоћни цртеж. У оваквим случајевима основно средство је алгебарска метода решавања конструктивних задатака. Идеја је да се једна непозната величина изрази помоћу задатих величина. Нека су дате величине редом a, u и v $(u > v)$. Из једнакости $a : u = u : v$, $u + v = a$, добијамо квадратну једначину $u^2 + au - a^2 = 0$, а затим је сводимо на облик $(u + \frac{a}{2})^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2$. Примећујемо Питагорину релацију и даља конструкција се једноставно изводи. $\Diamond$

Лако се може извести закључак да је *анализа* у конструктивним задацима погодна за развој стваралачког и логичког мишљења ученика.