Линеарни оператори

Задатак 1. Ако је адитивни оператор непрекидан у једној тачки простора, онда је он непрекидан на читавом простору. Доказати.
Решење. Докажимо најпре да за сваки адитиван оператор $A : X \to Y$ важи

$$(*) \qquad A(-x) = -A(x), \quad x \in X.$$

Како је $A(0) = A(0 + 0) = 2A(0)$, то је $A(0) = 0$. Сада једноставно добијамо $0 = A(0) = A(x - x) = A(x) + A(-x)$, тј. $A(-x) = -A(x)$, $x \in X$.

Нека је $A : X \to Y$ адитивни оператор и $x_0 \in X$ тачка у којој је он непрекидан. Нека је x произвољна тачка из простора X и (x_n) низ тачака у X који конвергира ка x. Из непрекидности у тачки x_0 следи $\lim\limits_{n\to+\infty} A(x_n - x + x_0) = Ax_0$, одакле због адитивности оператора A следи $\lim\limits_{n\to+\infty}(Ax_n - Ax + Ax_0) = Ax_0$. Непосредно добијамо $\lim\limits_{n\to+\infty} Ax_n = Ax$, што значи да је оператор A непрекидан у тачки x. $\triangle$

Задатак 2. Нека су X и Y нормирани простори и $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ линеарни оператор, где је $\mathcal{D}(A) \subseteq X$. Доказати следећа тврђења.

(а) Оператор A је ограничен ако је непрекидан у једној тачки.

(б) Оператор A је непрекидан ако и само ако је ограничен.

Решење. (а) Претпоставимо да је оператор A непрекидан у тачки x_0 из $\mathcal{D}(A)$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да је $\|Ax - Ax_0\| \leqslant \varepsilon$, за свако $x \in \mathcal{D}(A)$ које задовољава $\|x - x_0\| \leqslant \delta$. За $y \neq 0$ из простора $\mathcal{D}(A)$ уочимо

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y.$$

Тада је $x - x_0 = \dfrac{\delta}{\|y\|} y$, па је $\|x - x_0\| = \delta$. Користећи линеарност оператора A добијамо

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| = \left\| A\left(\frac{\delta}{\|y\|} y\right) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|Ay\|.$$

Пошто је A непрекидан у тачки x_0, то је

$$\frac{\delta}{\|y\|}\,\|Ay\| \leqslant \varepsilon, \quad \text{тј.} \quad \|Ay\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|.$$

За $c = \varepsilon/\delta$ је $\|Ay\| \leqslant c\|y\|$, тј. $\|A\| \leqslant c$, што показује да је оператор A ограничен.

(б) Претпоставимо најпре да је оператор A ограничен и докажимо да је непрекидан. Ако је $A = \mathbf{0}$ тврђење тривијално важи. Нека је $A \neq \mathbf{0}$. Тада је $\|A\| \neq 0$. Нека је $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ произвољна тачка и $\varepsilon > 0$. За свако $x \in \mathcal{D}(A)$ за које је $\|x - x_0\| < \delta$, за $\delta = \varepsilon/\|A\|$, добијамо

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \leqslant \|A\|\|x - x_0\| < \|A\|\delta = \varepsilon,$$

јер је оператор A линеаран и ограничен. Дакле, A је непрекидан у тачки x_0. Како је x_0 произвољна тачка из $\mathcal{D}(A)$ закључујемо да је оператор A непрекидан на читавом простору $\mathcal{D}(A)$.

Обратно тврђење је последица тврђења доказаног у делу (а). $\triangle$

Задатак 3. Нека су X и Y реални нормирани простори и $A : X \to Y$ адитиван оператор ограничен на кугли $\|x\| \leqslant 1$ простора X. Доказати да је A ограничен линеарни оператор.
Решење. Докажимо прво да је оператор A хомоген, тј. да за свако $x \in X$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ важи $A(\alpha x) = \alpha A(x)$. Због адитивности оператора A је

$$A(nx) = A(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n-\text{ пута}}) = nA(x), \quad x \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

Како важи и $A(-x) = -A(x),\ x \in X$, (видети задатак 1) то је $A(-nx) = -nA(x),\ x \in X,\ n \in \mathbb{N}$. Како је

$$A(x) = A\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nA\left(\frac{x}{n}\right),$$

добијамо да је $A(x/n) = A(x)/n,\ x \in X,\ n \in \mathbb{N}$. Из предходно доказаних једнакости закључујемо да је $A(\frac{p}{q} \cdot x) = \frac{p}{q}A(x),\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$, тј. $A(sx) = sA(x),\ x \in X,\ s \in \mathbb{Q}$.

Доказаћемо непрекидност оператора A у нули. Пошто је оператор A ограничен, то постоји $M \geqslant 0$, такво да важи $\|Ax\| \leqslant M$ за $\|x\| \leqslant 1$. Уочимо произвољан низ тачака (x_n) из X, такав да је $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Уочимо, даље, индекс $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $M/n_0 \leqslant \varepsilon$. Тада је $\|x_n\| \leqslant 1/n_0,\ n \geqslant N(\varepsilon)$. Одавде је $\|n_0 x_n\| \leqslant 1$, $n \geqslant N(\varepsilon)$, па је $\|A(n_0 x_n)\| = n_0\|Ax_n\| \leqslant M$, односно $\|Ax_n\| \leqslant M/n_0 \leqslant \varepsilon,\ n \geqslant N(\varepsilon)$. Дакле, $\lim\limits_{n\to+\infty} Ax_n = 0 = A(0)$. Тиме смо доказали непрекидност оператора A у нули. На основу задатка 1 следи његова непрекидност на читавом простору X.

Подсетимо се да за сваки реалан број r постоји низ рационалних бројева (r_n) такав да је $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r$. Ако је x из X произвољно, тада из $A(r_n x) = r_n A(x)$, пуштајући да $n \to +\infty$ и користећи непрекидност оператора A, добијамо да је $A(rx) = rA(x),\ x \in X,\ r \in \mathbb{R}$. Тиме смо показали да је оператор A линеаран на простору X. $\triangle$

Задатак 4. Нека је $K(s,t)$ реална функција непрекидна на квадрату $0 \leqslant s,t \leqslant 1$. Доказати да је тада са

$$(Ax)(s) = \int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1$$

дефинисан ограничен линеарни оператор у простору $\mathbb{C}[0,1]$.
Решење. Нека су $x, y \in \mathbb{C}[0,1]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Тада је за свако $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y)(s) &= \int_0^1 K(s,t)(\alpha x + \beta y)(t)\,dt = \int_0^1 K(s,t)\left(\alpha x(t) + \beta y(t)\right)\,dt \\ &= \alpha \int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt + \beta \int_0^1 K(s,t)y(t)\,dt = \alpha Ax(s) + \beta Ay(s), \end{aligned}$$

тј. $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$. Дакле, A је линеаран оператор.

Покажимо сада ограниченост. Ако функција x припада простору $\mathbb{C}[0,1]$, лако добијамо да Ax припада истом простору, тј. да $A : \mathbb{C}[0,1] \to \mathbb{C}[0,1]$. Функција

$$z(s) = \int_0^1 |K(s,t)|\,dt$$

је непрекидна, па самим тим и ограничена на затвореном интервалу $[0,1]$, тј. за неко $M \geqslant 0$ важи $z(s) \leqslant M,\ 0 \leqslant s \leqslant 1$. Како је

$$\begin{aligned}|(Ax)(s)| &= \left|\int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |K(s,t)|\,|x(t)|\,dt \\ &\leqslant \max_{0\leqslant p\leqslant 1}|x(p)|\int_0^1 |K(s,t)|\,dt = \|x\|\int_0^1 |K(s,t)|\,dt \leqslant M\|x\|,\end{aligned}$$

то је $\|Ax\| = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}|(Ax)(s)| \leqslant M\|x\|,\ x \in \mathbb{C}[0,1]$. Дакле, $\|A\| \leqslant M$. $\triangle$

Задатак 5. Доказати да су следећи оператори ограничени и линеарни у простору $\mathbb{C}[0,1]$ и наћи њихове норме:

(а) $(Ax)(t) = \int_0^1 \sin[\pi(t-s)]\,x(s)\,ds$;

(б) $(Ax)(t) = \int_0^1 e^{t-s}\,x(s)\,ds$;

(в) $(Ax)(t) = \int_0^1 t^n\,s^m\,x(s)\,ds$.

Решење. Лако се доказује да су дати оператори линеарни (доказати!).

(а) Како је $t,s \in [0,1]$, то је

$$|\sin[\pi(t-s)]| = \begin{cases} \sin[\pi(t-s)], & 0 \leqslant s \leqslant t, \\ -\sin[\pi(t-s)], & t < s \leqslant 1. \end{cases}$$

Дакле,

$$\begin{aligned}|(Ax)(t)| &= \left|\int_0^1 \sin[\pi(t-s)]x(s)\,ds\right| \leqslant \int_0^1 |\sin[\pi(t-s)]|\,|x(s)|\,ds \leqslant \|x\|\int_0^1 |\sin[\pi(t-s)]|\,ds \\ &= \|x\|\left(\int_0^t \sin[\pi(t-s)]ds - \int_t^1 \sin[\pi(t-s)]\,ds\right) \\ &= \|x\|\left(\frac{1}{\pi}\cos[\pi(t-s)]\Big|_0^t - \frac{1}{\pi}\cos[\pi(t-s)]\Big|_t^1\right) = \frac{2\|x\|}{\pi},\end{aligned}$$

одакле је $\|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|(Ax)(t)| \leqslant 2\|x\|/\pi$, тј. $\|A\| \leqslant 2/\pi$. Ако је $x_0(t) = 1,\ t \in [0,1]$, то је $\|x_0\| = 1$ и

$$|(Ax_0)(t)| = \left|\int_0^1 \sin[\pi(t-s)]ds\right| = \frac{2|\cos(\pi t)|}{\pi}.$$

Даље је $\|Ax_0\| = \max\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{2|\cos(\pi t)|}{\pi} = 2/\pi$, па је $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\| \geqslant \|Ax_0\| = 2/\pi$.

Из свега доказаног добијамо да је $\|A\| = 2/\pi$.

(б) Пошто је

$$|(Ax)(t)| = \left|\int_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds\right| \leqslant \int_0^1 \left|e^{t-s}\right|\,|x(s)|\,ds \leqslant \|x\|\int_0^1 e^{t-s}\,ds = e^t\|x\|(1-1/e),$$

то је $\|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|(Ax)(t)| \leqslant (e-1)\|x\|$, па је $\|A\| \leqslant e-1$.

Уочимо функцију $x_0(t) = 1,\ t \in [0,1]$. Тада је $\|x_0\| = 1$ и

$$|(Ax_0)(t)| = \left|\int_0^1 e^{t-s}ds\right| = e^t(1-1/e),$$

па је $\|Ax_0\| = \max\limits_{t\in[0,1]} e^t(1-1/e) = e-1$. Дакле, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \|Ax_0\| = e-1$, односно, доказали смо $\|A\| = e-1$.

(в) Како је

$$|(Ax)(t)| = \left|\int_0^1 t^n s^m x(s)\,ds\right| \leqslant \int_0^1 |t^n s^m|\,|x(s)|\,ds \leqslant \|x\|\,t^n \int_0^1 s^m\,ds = \frac{t^n\|x\|}{m+1},$$

то је $\|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |(Ax)(t)| \leqslant \frac{\|x\|}{m+1}$, па је $\|A\| \leqslant \frac{1}{m+1}$.

Уочимо функцију $x_0(t) = 1$, $t \in [0,1]$. Тада је $\|x_0\| = 1$ и

$$|(Ax_0)(t)| = \left|\int_0^1 t^n s^m ds\right| = \frac{t^n}{m+1},$$

па је $\|Ax_0\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \frac{t^n}{m+1} = \frac{1}{m+1}$. Дакле, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \|Ax_0\| = \frac{1}{m+1}$, односно, доказали смо $\|A\| = \frac{1}{m+1}$. △

Задатак 6. Нека је оператор $T : \ell_2 \to \ell_2$ дефинисан са

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots), \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2.$$

Испитати линеарност и ограниченост оператора T и ако је ограничен, наћи његову норму.

Решење. Нека су $x, y \in \ell_2$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Тада је

$$\begin{aligned}
T(\alpha x + \beta y) &= T(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \ldots)\\
&= (\alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1}, \alpha x_{n+2} + \beta y_{n+2}, \ldots)\\
&= (\alpha x_{n+1}, \alpha x_{n+2}, \ldots) + (\beta y_{n+1}, \beta y_{n+2}, \ldots) = \alpha T x + \beta T y,
\end{aligned}$$

тј. оператор T је линеаран.

За свако $x \in \ell_2$ очигледно важи да је $\|Tx\| \leqslant \|x\|$, па је $\|T\| \leqslant 1$. Дакле, оператор T је ограничен у простору ℓ_2.

Уочимо да за $e_{n+1} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, \ldots) \in \ell_2$ важи $\|e_{n+1}\| = 1$ и $T(e_{n+1}) = (1, 0, \ldots) = e_1$.

Како је

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \geqslant \|T(e_{n+1})\| \geqslant \|e_1\| = 1,$$

закључујемо да је $\|T\| = 1$. △