Линеарни оператори

Задатак 1. Дефинишимо оператор $A:\ell_p\to\ell_p\,,\ p>1$, са $Ax=y=(y_n),\ x=(x_n)\in\ell_p$, при чему је $y_n=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_{kn}x_k,\ n\in\mathbb{N}$, и

$$\alpha=\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{kn}|^q\right)^{p/q}\right]^{1/p}<+\infty\quad \text{за}\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Доказати да је A ограничен линеарни оператор у овом простору и да важи $\|A\|\leqslant\alpha$.
Решење. Линеарност овог оператора се лако показује.

Нека је $x=(x_n)\in\ell_p,\ p>1$. Тада, за $1/p+1/q=1$, применом Хелдерове неједнакости имамо

$$|y_n|\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{kn}||x_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{kn}|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{kn}|^q\right)^{1/q}\|x\|,\quad n\in\mathbb{N},$$

одакле добијамо

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|y_n|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{kn}|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p}\|x\|=\alpha\|x\|,$$

тј. $\|Ax\|_{\ell_p}\leqslant\alpha\|x\|_{\ell_p}$, па је $\|A\|\leqslant\alpha$. △

Задатак 2. Дефинишимо оператор $A:\ell_2\to\ell_2$ са $Ax=y=(y_n)$, $x=(x_n)$, при чему је

$$y_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\,x_k,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Доказати да је A ограничен линеарни оператор у простору ℓ_2 и наћи му норму.
Решење. Запишимо $y_n,\ n\in\mathbb{N}$, у облику

$$y_n=\sum_{k=1}^{+\infty}a_{kn}x_k,\quad n\in\mathbb{N},\quad \text{где је}\quad a_{kn}=\frac{1}{2^{k+n}},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Нека је α дефинисано као у задатку 1 за $p=q=2$, тј.

$$\alpha=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{kn}|^2\right)\right)^{1/2}.$$

Како је $\sum\limits_{k,n=1}^{+\infty}1/4^{k+n}=1/9$, то је $\alpha=1/3$. Према задатку 1 следи да је оператор A ограничен и притом је $\|A\|\leqslant\alpha=1/3$.

Уочимо даље $x_0 = (1/2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Лако добијамо да је

$$\|x_0\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,,$$

па $x_0 \in \ell_2$. Тада је $y_n = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2^k} = \dfrac{1}{3\cdot 2^n}$, $n\in\mathbb{N}$, одакле добијамо

$$\|Ax_0\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|^2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,, \quad \text{тј.} \quad \|Ax_0\| = \frac{1}{3}\|x_0\|.$$

Сада лако видимо да је $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} = 1/3$, што са већ доказаним даје $\|A\| = 1/3$. △

Задатак 3. Нека је $a\in\mathbb{R}$ и $|a|<1$. Показати да је оператор $A : m \to m$ дефинисан са $Ax = y = (y_n)$, $x = (x_n)$, где је

$$y_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a^k x_{n+k}, \quad n\in\mathbb{N},$$

линеаран и ограничен и наћи $\|A\|$.

Решење. Докажимо да за $x\in m$ елемент $y = Ax$ такође припада простору m. Нека је $x = (x_n)\in m$. Тада је

$$\begin{aligned}\|y\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{+\infty} a^k x_{n+k}\right| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{+\infty} |a^k||x_{n+k}| \\ &\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \sum_{k=1}^{+\infty} |a^k| = \|x\| \sum_{k=1}^{+\infty} |a^k| = \frac{|a|}{1-|a|}\|x\| < +\infty,\end{aligned}$$

одакле закључујемо да $y\in m$ и да је оператор A ограничен, тј. да је

$$\|A\| \leqslant \frac{|a|}{1-|a|}. \tag{1}$$

Линеарност се оставља за самостални рад.

Одредимо норму оператора A. Разликоваћемо два случаја.

Нека је $0\leqslant a<1$. Уочимо елемент $x_0 = (1,1,\ldots)\in m$. Лако налазимо да је $\|x_0\| = 1$. Из дефиниције оператора A добијамо

$$Ax_0 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a^k, \sum_{k=1}^{+\infty} a^k, \ldots\right),$$

па је $\|Ax_0\| = \left|\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a^k\right| = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a^k| = \dfrac{|a|}{1-|a|}$. Како је $\|x_0\| = 1$, то је

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \|Ax_0\| = \frac{|a|}{1-|a|}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) директно следи $\|A\| = \dfrac{|a|}{1-|a|}$.

Нека је сада $-1 < a < 0$. Уочимо $x_0 = (-1, 1, -1, 1, \dots) \in m$. Тада је $\|x_0\| = 1$ и $Ax_0 = \left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}a^k, \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k a^k, \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}a^k, \dots\right)$, па је

$$\|Ax_0\| = \max\left\{\left|\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k a^k\right|, \left|\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}a^k\right|\right\} = \left|\sum_{k=1}^{+\infty}|a|^k\right| = \sum_{k=1}^{+\infty}|a|^k = \frac{|a|}{1-|a|},$$

одакле следи

$$\|A\| \geqslant \frac{|a|}{1-|a|}. \tag{3}$$

На основу (1) и (3) добијамо да је $\|A\| = \dfrac{|a|}{1-|a|}$. △

Задатак 4. У простору $\mathbb{C}[0,1]$ дефинисан је интегрални оператор A са

$$(Ax)(t) = x(t) - \int_0^1 tsx(s)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Доказати да је оператор A ограничен, бијективан и линеаран у овом простору. Наћи одговарајући инверзни оператор A^{-1} и доказати да је он такође ограничен.

Решење. Уочимо функцију

$$y(t) = x(t) - \left(\int_0^1 sx(s)ds\right)t = x(t) - c_x t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

где је $c_x = \int_0^1 s\,x(s)\,ds$. Ако $x \in \mathbb{C}[0,1]$ тада је функција y такође елемент тог простора, па је $\mathcal{D}(A) = \mathbb{C}[0,1]$.

Линеарност оператора A се оставља за самостални рад.

Како је $|c_x| = \left|\int_0^1 s\,x(s)\,ds\right| \leqslant \int_0^1 s\,|x(s)|\,ds \leqslant \|x\| \int_0^1 s\,ds = \dfrac{1}{2}\,\|x\|$, то је

$$|y(t)| \leqslant |x(t)| + |c_x|t \leqslant \|x\| + \frac{t}{2}\,\|x\|,$$

одакле добијамо

$$\|y\| = \max_{t\in[0,1]}|y(t)| \leqslant \frac{3}{2}\|x\|, \quad \text{тј.} \quad \|Ax\| \leqslant \frac{3}{2}\|x\|,$$

за свако $x \in \mathbb{C}[0,1]$. Дакле, A је ограничен оператор и важи $\|A\| \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Једнакост (1) можемо записати у облику

$$x(t) = y(t) + c_x t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2}$$

одакле множењем обе стране са t и интеграљењем на $(0,1)$ лако добијамо да је $c_x = c_y + \frac{1}{3}\,c_x$, где је $c_y = \int_0^1 ty(t)\,dt$. Користећи ову везу, (2) можемо записати у облику

$$x(t) = y(t) + \left(\frac{3}{2}\int_0^1 ty(t)\,dt\right)t, \quad y \in \mathbb{C}[0,1]. \tag{3}$$

Ако је $y_1(t) = y_2(t)$ за свако $t \in [0,1]$, тада из једнакости (3) следи $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in [0,1]$. Дакле, оператор A је инјективан. Ако је $y \in \mathbb{C}[0,1]$ произвољна функција, тада функција x, дефинисана са (3), припада простору $\mathbb{C}[0,1]$ и важи $y(t) = (Ax)(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, тј. A је сирјективни оператор. Тиме смо показали да је оператор A бијективан на простору $\mathbb{C}[0,1]$. Из (3) следи да је

$$\|x\| \leqslant \|y\| + \frac{3}{4}\|y\| = \frac{7}{4}\|y\|.$$

Према томе, $\|A^{-1}y\| \leqslant \dfrac{7}{4}\,\|y\|$, па је A^{-1} ограничен оператор и важи $\|A^{-1}\| \leqslant 7/4$. △

Задатак 5. У простору $\mathbb{C}[0,1]$ дат је оператор

$$(Ax)(t) = x(t) - 3\int_0^1 t^3\, s^2\, x(s)\, ds.$$

Доказати да је A линеаран ограничен оператор у простору $\mathbb{C}[0,1]$ и да је сирјективан.
Решење. Оставља се за самостални рад. △

Задатак 6. Нека је $X = \{x \in \mathbb{C}^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ и $Y = \mathbb{C}[0,1]$. Дефинишимо оператор $A : X \to Y$ са $Ax = x''$.

(а) Доказати да је оператор A инјективан.

(б) За произвољно $y \in Y$ нека је $x(s) = \int_0^1 \mathcal{K}(s,t)\, y(t)\, dt$, где је

$$\mathcal{K}(s,t) = \begin{cases} -t(1-s), & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ -s(1-t), & s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Доказати да $x \in X$ и да је оператор A сирјективан.

(в) Доказати да постоји оператор $A^{-1} : Y \to X$.

(г) Доказати да је $\|A^{-1}\| \leqslant 1/8$.

(д) Наћи све фиксне тачке оператора A.

Решење. Лако се види да је оператор A линеаран.

(а) Претпоставимо да за $x_1, x_2 \in X$ важи $Ax_1 = Ax_2$. Тада је $x_1'' = x_2''$, па је $x_1(s) = x_2(s) + c_1 s + c_2$ за свако $s \in [0,1]$. Како x_1 и x_2 припадају простору X, то је $x_1(0) = x_2(0) = 0$ и $x_1(1) = x_2(1) = 0$, па је $c_1 = c_2 = 0$, а тиме и $x_1(s) = x_2(s)$ за свако $s \in [0,1]$. Према томе, оператор A је инјективан.

(б) Како је

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^1 \mathcal{K}(s,t)\, y(t)\, dt = \int_0^s (-t(1-s))y(t)\, dt + \int_s^1 (-s(1-t))\, y(t) dt \\ &= (s-1)\int_0^s t\, y(t) dt - s\int_s^1 (1-t)\, y(t) dt, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1, \end{aligned}$$

то је [1]

$$\begin{aligned} x'(s) &= \int_0^s t\, y(t)\, dt + (s-1)s\, y(s) - \int_s^1 (1-t)\, y(t)\, dt + s(1-s)\, y(s) \\ &= \int_0^s t\, y(t)\, dt - \int_s^1 (1-t)\, y(t)\, dt, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1. \end{aligned}$$

[1] $\left(\int\limits_{g_2(s)}^{g_1(s)} f(t) dt \right)_s' = g_1'(s) f(g_1(s)) - g_2'(s) f(g_2(s))$

Одавде лако добијамо да је $x''(s) = sy(s) + (1-s)y(s) = y(s)$ за све $y \in \mathbb{C}[0,1]$. Дакле, $x'' \in \mathbb{C}[0,1]$, па $x \in \mathbb{C}^2[0,1]$. Лако се види да важи и $x(0) = x(1) = 0$. Ова три услова обезбеђују да $x \in X$.

Показали смо да за свако $y \in Y$ постоји $x(s) = \int_0^1 \mathcal{K}(s,t)\, y(t)\, dt$ такво да је $(Ax)(s) = x''(s) = y(s)$, што значи да је оператор A сирјективан.

(в) Како је оператор A инјективан (доказано у (а)) и сирјективан (доказано у (б)), он је бијективан, па самим тим постоји инверзни оператор $A^{-1} : Y \to X$ дефинисан са

$$(A^{-1}y)(s) = x(s) = \int_0^1 \mathcal{K}(s,t)y(t)dt, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

(г) Како је

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}y\| = \|x\| &= \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\left|\int_0^1 \mathcal{K}(s,t)y(t)dt\right| \leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1 \big|\mathcal{K}(s,t)y(t)\big|dt \\
&\leqslant \|y\| \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\left(\int_0^s |-t(1-s)|dt + \int_s^1 |-s(1-t)|dt\right) \\
&= \|y\| \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\left((1-s)\frac{s^2}{2} + s\left(1-\frac{1}{2}\right) - s\left(s - \frac{s^2}{2}\right)\right) \\
&= \|y\| \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\left(\frac{s}{2} - \frac{s^2}{2}\right) = \frac{\|y\|}{8},
\end{aligned}$$

па је $\|A^{-1}\| \leqslant 1/8$.

(д) Ако је $Ax = x$ тада, пошто A^{-1} постоји, важи $A^{-1}Ax = A^{-1}x$, тј. $x = A^{-1}x$, па је $\|x\| = \|A^{-1}x\| \leqslant \|x\|/8$, одакле закључујемо да је $\|x\| = 0$, па је и $x = 0$. Дакле, једначина $Ax = x$ има јединствено решење $x = 0$, тј. нула је једина фиксна тачка оператора A. $\triangle$

Линеарне функционеле

Задатак 1. Доказати да је функционела $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дата са $f(x)=x_1-x_2,\ x=(x_1,x_2)$, линеарна и непрекидна и одредити $\|f\|$, ако је на $\mathbb{R}^2$ дата норма:

(а) $\|\cdot\|_1$; (б) $\|\cdot\|_\infty$.

Решење. Нека су $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ произвољни вектори из $\mathbb{R}^2$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ произвољни скалари. Тада је

$$f(\alpha x+\beta y)=f((\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2))=\alpha(x_1-x_2)+\beta(y_1-y_2)=\alpha f(x)+\beta f(y),$$

па је f линеарно пресликавање.

(а) Како је $|f(x)|=|x_1-x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|=\|x\|_1$, закључујемо да је f непрекидна функционела и $\|f\|\leqslant 1$. Нека је $x_0=(1,0)$. Тада је $\|x_0\|_1=1$ и $|f(x_0)|=1$, одакле следи да је $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\frac{|f(x)|}{\|x\|}\geqslant\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}=1$, што са претходном неједнакошћу даје $\|f\|=1$.

(в) Важи да је

$$|f(x)|\leqslant|x_1|+|x_2|\leqslant 2\max\{|x_1|,|x_2|\}=2\|x\|_\infty,$$

па је $\|f\|\leqslant 2$. За тачку $x_0=(1,-1)$ имамо да је $\|x_0\|_\infty=1$ и $|f(x_0)|=2$, одакле је $\|f\|\geqslant 2$. Из свега доказаног добијамо да је $\|f\|=2$. $\triangle$

Задатак 2. Показати да су функционеле $f,g:\ell_1\to\mathbb{R}$ дате са:

(а) $f(x)=2x_1-x_3+6x_4,\ x=(x_n)\in\ell_1$,

(б) $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_{2n}, x=(x_n)\in\ell_1$

добро дефинисане, линеарне и непрекидне и одредити им норму.

Решење. (а) Добра дефинисаност је очигледна, а линеарност се лако проверава, па се ово оставља студенту да докаже. Како је

$$|f(x)|\leqslant 2|x_1|+|x_3|+6|x_4|\leqslant 6(|x_1|+|x_3|+|x_4|)\leqslant 6\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|=6\|x\|,$$

следи да је $\|f\|\leqslant 6$. Уочимо низ $e_4=(0,0,0,1,0\ldots)$. Лако налазимо да је $\|e_4\|=1$ и $|f(e_4)|=6$, па је $\|f\|\geqslant 6$. Дакле, $\|f\|=6$.

(б) За произвољан вектор $x\in\ell_1$ важи

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{2n}|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|<+\infty,$$

па ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_{2n}$ апсолутно конвергира. Дакле, g је добро дефинисана функционела. Линеарност се оставља за самостални рад.

Како постоји $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x_{2k}$, због непрекидности апсолутне вредности, имамо

$\lim\limits_{n\to+\infty}\Big|\sum\limits_{k=1}^{n} x_{2k}\Big| = \Big|\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} x_{2k}\Big|$, па је

$$\begin{aligned}|g(x)| &= \Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n}\Big| = \Big|\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} x_{2k}\Big| = \lim_{n\to+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{n} x_{2k}\Big| \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}|x_{2k}| = \sum_{k=1}^{+\infty}|x_{2k}| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}|x_k| = \|x\|.\end{aligned}$$

Према томе, g је непрекидна функционела и $\|g\| \leqslant 1$. Уочимо елемент $e_2 = (0,1,0,\ldots) \in \ell_1$. Лако се добија да је $\|e_2\| = 1$ и $g(e_2) = 1$. Дакле, $\|g\| = 1$. △

Задатак 3. Доказати да су следеће функционеле линеарне и непрекидне и наћи им норму:

(а) $f(x) = x_1 + x_2$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

(б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x_n}{n}$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$.

Решење. Доказ линеарности се оставља студентима за самостални рад.

(а) Ако искористимо неједнакост између аритметичке и квадратне средине за бројеве $|x_1|$ и $|x_2|$ добијамо

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2| \leqslant 2\sqrt{\frac{|x_1|^2 + |x_2|^2}{2}} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2} = \sqrt{2}\,\|x\|_{\ell_2}.\end{aligned}$$

Тиме смо показали да је $\|f\| \leqslant \sqrt{2}$. Уочимо низ $x_0 = (1,1,0,0,\ldots)$. Видимо да је $\|x_0\| = \sqrt{2}$, па је $x_0 \in \ell_2$. Како је $|f(x_0)| = |1+1| = 2$, то је

$$\|f\| = \sup_{x\in\ell_2\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geqslant \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,.$$

Према томе, $\|f\| = \sqrt{2}$.

(б) Пошто је

$$|f(x)| = \Big|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{n}\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\Big|\frac{x_n}{n}\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|x_n| = \|x\|,$$

то је $\|f\| \leqslant 1$. С друге стране, ако уочимо низ $x_0 = (1,0,0,\ldots)$, имамо да $x_0 \in \ell_1$ и $|f(x_0)| = 1$. Следи да је $\|f\| \geqslant 1$, па је $\|f\| = 1$. △