ЗАВРШНИ ДЕО ИСПИТА ИЗ ФУНКЦИОНАЛНЕ АНАЛИЗЕ

Чујем и заборавим, видим и запамтим, урадим и разумем!

Следеће исказе доказати или оповргнути. [20]

1. Метрика је непрекидна функција својих аргумената.
2. Низ је Кошијев у метричком простору (X, d) ако и само ако је ограничен.
3. Скуп S је затворен у метричком простору (X, d) ако и само ако гранична вредност сваког низ из S, који конвергира у X, припада скупу S.
4. Метрички простор (X, d) је комплетан ако и само ако је компактан.
5. Ортогонални комплемент произвољног подскупа Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ је потпростор од $\mathcal{H}$.
6. Линеарни оператор је непрекидан ако и само ако је ограничен.
7. Низ оператора $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $L(X, Y)$ конвергира тачкасто ка $A \in L(X, Y)$ ако и само ако конвергира по норми ка A.
8. Скуп је мерљив у смислу Лебега ако и само ако је Борелов.
9. Карактеристична функција скупа A је мерљива ако и само ако је скуп A мерљив.
10. Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ има Лебегову меру нула ако и само ако је највише пребројив.

Задатак. Ако је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ мерљива, доказати да је функција $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ мерљива на скупу $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. [10]

Питање. 1. Рисова теорема о репрезентацији ограничене линеарне функционеле на Хилбертовом простору.

2. Теорема Каратеодорија.