УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МЕТОДИКА НАСТАВЕ АНАЛИЗЕ

6. недеља рада на даљину

КРАГУЈЕВАЦ
2020

Глава 1

Индукција и дедукција

„Главна средства помоћу којих се откривају истине у математици су индукција и аналогија.”
Laplace

„У теорији бројева често се догађа да се због неког неочекиваног срећног случаја помоћу индукције појаве најелегантније нове истине.”
Gauss

Међу начинима закључивања и мисаоним поступцима у науци важно место заузимају индукција и њена супротност дедукција. Математика је дедуктивна наука, а математика у настајању је експериментална индуктивна наука. Сами методи разликују се по циљевима: циљ индукције је опште, а циљ дедукције је појединачно и посебно.

Реч дедукција потиче од латинске речи *deduction* што значи извођење, док реч индукција потиче од латинске речи *inductio* што значи увођење, навођење, побуђивање. Дедуктивни начин размишљања базира се на проналажењу општих решења помоћу којих решавамо појединачне проблеме. За разлику од дедукције, индукција је закључивање којим се из ставова који се односе на ограничен број појединачних случајева исте врсте изводи један општи став, тј. став који се односи на све случајеве те врсте. Овакав метод закључивања такође се назива и непотпуна или емпиријска индукција. Помоћу ње се може доћи како до тачних тако и до нетачних закључака (или до закључака који су тачни само за одређен број случајева). Упркос томе, индукција је изузетно значајна у експерименталним природним наукама. Непотпуна индукција у математици омогућава да се открије нека чињеница, коју затим треба и доказати, нпр. користећи математичку индукцију.

Метод математичке индукције је посебан метод математичког доказивања који нам не дозвољава да доносимо закључке о општем правилу на основу појединачних случајева, без одређених доказа. Значај синтезе индукција-дедукција је добро формулисао руски математичар A. J. Hinčin $(1894 - 1959)$ чија мисао гласи:
„Онај који практикује индукцију не одевајући се у формална правила (тј. не вршећи њену синтезу са дедуктивном формом), престаје да буде математичар; он се бави емпиријским уопштавањем без икакве везе са математичком науком. Обратно, вршећи дедукцију неоплођену индуктивним садржајем, математичар престаје да ствара зато што без елементарне индукције, тј. без добијања општих закључака на основу појединачног материјала, нема и не може бити научног стваралаштва. Наука почиње тамо где по први пут срећемо уопштење."

1.1 Индукција

Емпиријска индукција се састоји у посматрању или експериментисању, и користи се најчешће у природним наукама. Овакво расуђивање има своју примену и у математици јер је помоћу њега откривено, а касније доказано више важних ставова, али понекад може довести и до формулација тврђења за које се показује да су погрешна. Тако је нпр. француски математичар Pjer Ferma посматрајући бројеве $p_n = 2^{2^n} + 1$ који су прости за $n = 1, 2, 3, 4$, извео претпоставку да су сви бројеви облика 2^{2^n} прости. Касније је утврђено да је број $2^{2^5} + 1$ дељив са 641, а исто тако да су и p_n сложени бројеви за $n = 6, \ldots, 23$. Такође, посматрајући бројеве 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331 који су прости, могли бисмо да дођемо до закључка да су сви бројеви облика $333\ldots31$ прости. Међутим, следећи број у низу није прост број, $333333331 = 17 \cdot 19607843$.

Емпиријском индукцијом, као што је већ речено, могу се наслутити неке формуле (једнакости, неједнакости и слично) које зависе од природног броја n, али нам зато метод математичке индукције омогућује да у многим случајевима утврдимо да ли је постављена хипотеза тачна или није.

Појам индукција има следећа три основна својства.

1) Индукција је један од начина закључивања којим се из два или

више појединачних исказа добија нови општи исказ. Краће речено, индукција је расуђивање од појединачног ка општем. То је мисаони поступак којим се стварају генерализације.

ПРИМЕР 1.1. **Појединачна тврђења.** *Права сече кружницу у највише две тачке. Права сече елипсу у највише две тачке. Права сече параболу у највише две тачке. Права сече хиперболу у највише две тачке.*
Опште тврђење. *Права сече криве другог реда у највише две тачке.* $\Diamond$

2) Индукција је метод истраживања којим се при проучавању неког скупа објеката посматрају посебни објекти из тог скупа и утврђују њихова заједничка својства која се затим приписују целом скупу. Уско је повезана са конкретизацијом, специјализацијом, аналогијом и генерализацијом. Без обзира на њену вероватносну природу, индукција је један од најважнијих поступака у науци.

Покажимо на једном примеру како би требало применити индукцију као метод који ученике уводи у истраживачки рад и омогућује им откривање „нових“ математичких истина.

ПРИМЕР 1.2. *Проучавајући бројеве често долазимо до необичних односа међу њима. Такви су и следећи прикази квадрата неких природних бројева.*

$$\begin{aligned}
3^2 &= 1+3+5 & 3^2 &= 1^3+2^3\\
5^2 &= 1+3+5+7+9 & 5^2 &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1\\
6^2 &= 1^3+2^3+3^3 & &\\
19^2 &= 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+1 & &
\end{aligned}$$

Уочавајући једнакости $3^2 = 1^3 + 2^3$ *и* $6^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ *можемо да се запитамо постоји ли веза између збира кубова и квадрата природних бројева. Погледајмо, сада, више специјалних случајева.*

$$\begin{aligned}
&1^3 = 1^2\\
&1^3+2^3 = 9 = 3^2\\
&1^3+2^3+3^3 = 36 = 6^2\\
&1^3+2^3+3^3+4^3 = 100 = 10^2\\
&1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 = 225 = 15^2\\
&1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3 = 441 = 21^2
\end{aligned}$$

Након овог разматрања можемо формулисати прву генерализацију.

Збир кубова првих n природних бројева једнак је квадрату природног броја.

Погледајмо пажљивије основе на левој и десној страни. Њихову везу лако је уочити.

$$
\begin{aligned}
&1 = 1\\
&1+2 = 3\\
&1+2+3 = 6\\
&1+2+3+4 = 10\\
&1+2+3+4+5 = 15\\
&1+2+3+4+5+6 = 21
\end{aligned}
$$

Дошли смо до друге генерализације.

За сваки природни број n важи једнакост

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2.$$

Једнакост се доказује применом принципа математичке индукције. Звучи парадоксално, али то је један дедуктивни поступак. $\Diamond$

3) Индукција је начин излагања у наставном процесу када се од мање општих тврђења долази до општијих тврђења. Представљамо схематски приказ индуктивног закључивања.

Нека је $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ скуп свих могућих посебних случајева таквих да за сваки од њих неко својство s може бити истинито или неистинито. Претпоставимо да је у k случајева својство s истинито, тј. да важи $s(a_1), s(a_2), \ldots, s(a_k)$. Тада се индуктивно закључивање спроводи по схеми

$$s(a_1), s(a_2), \ldots, s(a_k) \Rightarrow (\forall x)s(x).$$

ПРИМЕР 1.3. *Индуктивне дефиниције су степеновање, аритметички низ, геометријски низ, Фибоначијев низ и др.*

Много је садржаја у школској математици за чију је обраду потребан и за развој учениковог мишљења важан индуктивни поступак. Међу таквим садржајима посебно се убрајају разна правила, закони, формуле и теореме, поготово ако се они строго не изводе или не доказују.

1.1.1 Потпуна индукција

Ако је S коначан скуп који садржи k посебних случајева $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и за све њих је испитана ваљаност својства s, онда је закључак изведен на тај начин исправан. Облик закључивања који се заснива на разматрању свих појединачних и посебних исказа или случајева назива се потпуна индукција.

Пример 1.4. *Одредити број простих бројева међу првих* 20 *природних бројева.*
Скуп S *који треба посматрати има* 20 *елемената, па се лако могу испитати сви случајеви и установити који су од посматраних бројева прости. Дакле, међу првих* 20 *природних бројева има* 8 *простих бројева.* $\diamondsuit$

Потпуна индукција се ретко примењује јер се често ради о великом броју појединачних случајева. Ако је број случајева бесконачан, примена потпуне индукције је готово немогућа. Понекад је ипак могуће да се скуп од бесконачно много случајева разврста на коначно много подскупова, а затим се спроведу разматрања и изведу закључци у сваком од тих подскупова.

Пример 1.5. *Испитајмо да ли се квадрат природног броја може завршавати цифром* 8.

Како има бесконачно много природних бројева, јасно је да не можемо испитати све појединачне случајеве. Разврстајмо све природне бројеве у подскупове према последњим цифрама. На тај начин добијамо десет подскупова. Даље, испитајмо које су посљедње цифре квадрата природних бројева. Нпр. ако се број завршава цифром 0 *и његов квадрат завршава са* 0*, ако се број завршава цифром* 1 *и његов квадрат завршава се са* 1*, ако се број завршава цифром* 2*, његов квадрат завршава се са* 4 *итд.*

Испитивањем свих случајева, добијамо да се квадрат природног броја не може завршавати цифром 8.

1.1.2 Непотпуна индукција

Ако скуп S има више елемената од k посебних случајева $a_1, a_2, \ldots, a_k$ за које је испитана ваљаност својства s, онда закључак изведен према већ датој схеми није поуздано истинит већ само вероватно истинит. Облик закључивања који се заснива на разматрању једног или више, али не свих, појединачних и посебних исказа или случајева назива се непотпуна индукција.

Закључак изведен непотпуном индукцијом може, дакле, бити неистинит. Зато се непотпуна индукција као метод истраживања примењује врло опрезно. Међутим, њено значење је у томе да се разматрањем посебних случајева наводи на помисао о постојању неке законитости и она помаже да се постави хипотеза о природи те законитости. Јасно је да то почиње посматрањем и експериментом. Таква индукција примењује се у експерименталним наукама, али је она и у математици богат извор нових сазнања. Разлика је једино у томе што се у математици добијене тврдње затим строго доказују.

У настави математике треба бити опрезан при примени таквог облика закључивања, али га не треба избегавати. Настава математике у основној школи претежно је индуктивна. Предности њене примене су велике: остваривање принципа од лакшег ка тежем, од једноставног ка сложеном, проучавање нових апстрактних појмова и изрека преко посматрања и проверавања, навођење ученика на нове појмове, исказивање нових тврдњи и др. Нове тврдње биће уверљивије уколико се у индукцији посматра већи број посебних случајева.

Применом индукције ученици се наводе на исказивање општих тврдјења.

1) Посматрајмо све садржаоце броја 9 који су мањи од 200 и збирове њихових цифара. То су бројеви 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180, 189, 198, а збирови њихових цифара су 9 или 18. Уочавамо да су збирови цифара садржаоци броја 9.

Ако је природни број дељив са 9*, онда је и збир његових цифара дељив са* 9*.*

2) Посматрајмо природне бројеве 2007, 18999, 456237, 987654321 чији су збирови цифара 9, 36, 27, 45 садржаоци броја 9. Дељењем проверавамо да су и посматрани бројеви дељиви са 9.

Ако је збир цифара природног броја дељив са 9*, онда је и тај природни број дељив са* 9*.*

Ово тврђење нам омогућује брже испитивање дељивости природних бројева са 9 него што се то може постићи дељењем нарочито код великих бројева.

Примена општег тврђења на појединачан случај је дедукција!

Лоша обрада неког наставног садржаја има за последицу и лоше знање ученика. У индуктивној настави потребан је примерен број појединачних и посебних случајева. У противном, изведена тврђења могу бити неуверљиве, а понекад и нетачне. Пример таквог тврђења је да се висине троугла секу у једној тачки.

Пример 1.6. *Да бисмо испитали однос висина у троуглу, морамо посматрати три посебна случаја: оштроугли, правоугли и тупоугли троугао. Долазимо до следећих индуктивних закључака.*

Ако је троугао оштроугли, висине троугла секу се у једној тачки која је унутар троугла.

Ако је троугао правоугли, висине троугла секу се у једној тачки и та је тачка теме правог угла.

Ако је троугао тупоугли, висине троугла се не секу, али се у једној тачки секу праве које садрже висине и та тачка је изван троугла.

На основу ових исказа изводи се следеће опште тврђење.

Праве које садрже висине троугла секу се у једној тачки O. Тачка O назива се ортоцентар троугла.

1.2 Дедукција

Дедукција је облик закључивања при коме се од једног општег исказа или једног посебног или појединачног исказа добија нови, мање уопштен, посебан или појединачни суд. Дакле, код дедуктивног закључивања крећемо од општих сазнања и изводимо истините чињенице о неком конкретном случају.

Дедуктивно закључивање има три облика.

1) Закључивање од уопштеног тврђења ка мање општем или појединачном тврђењу. Нпр. ако су a и b узајамно прости бројеви, онда је највећи заједнички делилац тих бројева 1, тј. важи $D(a, b) = 1$ (опште тврђење); $D(37, 7) = 1$ (појединачно тврђење). Из ових исказа изводи се појединачно тврђење: 37 и 5 су узајамно прости бројеви.

2) Закључивање од појединачног ка посебном. Нпр. број 2 је прост број (појединачно тврђење); број 2 је природан број (појединачно тврђење); неки природни бројеви су прости бројеви (посебно тврђење).

3) Закључивање од општег тврђења ка општем. Нпр. сви парни бројеви дељиви су са 2 (опште тврђење); ниједан непаран број није дељив

са 2 (опште тврђење); ниједан паран број није истовремено и непаран (опште тврђење).

Наводимо пример задатка у коме се примењује дедуктиван начин закључивања.

ПРИМЕР 1.7. *Ако је хипотенуза правоуглог троугла дужине* 5cm*, а дужина катете* 3cm*, колико износи дужина друге катете?*

Дедукција у математици је строго логички заснован метод доказивања. У данашње време се дедукција заснива на неком систему аксиома. Зато се дедуктивни метод назива још и аксиоматски метод.

Пример дедукције је математичка индукција. Назив је помало парадоксалан, али знамо да се метод математичке индукције заснива на једној аксиоми.

Euklid. У „Елементима“ аксиоме, дефиниције и теореме нижу се правилно и примерено, тако да чине савршен логички дедуктивни систем. На почетку „Елемената” Еуклид даје преглед потребних дефиниција и полазних тврђења геометрије, тврђења које се сматрају истинитим и које се не доказују, подељених у два скупа.

Полазна тврђења првог скупа карактеришу општа својства величина и називају се аксиоме. Има их 9. Таква су на пример следећа тврђења.

Целина је већа од дела. Ако се једнаким стварима додају једнаке ствари, и целине су једнаке. За свака два позитивна реална броја a *и* b *постоји такав природан број* n *да је* $na > b$ *(Архимедова аксиома).*

Полазна тврђења другог скупа имају чисто геометријски карактер и називају се постулати. Има их 5. Затим се на темељу аксиома и постулата путем логичког закључивања изводе и доказују теореме и поступно изграђује цела геометрија равни. Постулат обично изражава неки услов који треба да задовољи неки појам или неки однос међу појмовима. Наводимо пет Еуклидових постулата.

Од сваке тачке до сваке тачке може се повући права линија.

Ограничена права може се бити продужена у свом правцу непрекидно.

Из сваког центра са сваким растојањем може се описати круг.

Сви прави углови међусобно су једнаки.

Ако једна права са другим двема образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве, бескрајно продужене секу се и то са оне стране са које су ови углови мањи од два права угла.

Посебно значење и важност има 5. постулат, познат у као Еуклидова аксиома о паралелним правама. Заправо, она говори о томе када две праве a и b једне равни нису паралелне. У уџбеницима 5. постулат исказује се и примењује у следећем еквивалентном и једноставнијем облику.

Кроз тачку ван праве може се повући тачно једна права паралелна са том правом.

Помоћу 5. постулата доказују се многе теореме елементарне геометрије. Међу њима су и тврђења која су му еквивалентна. Осим горњег, ево још неких еквивалената 5. постулата.

У равни постоји бар један правоугаоник, тј. четвороугао са четири права угла.

Збир углова у троуглу једнак је $180°$.

Постоје два слична, а неподударна троугла.

За сваке три тачке које не леже на једној правој постоји јединствена кружница која пролази кроз те тачке.

Lobačevski, Bolyai, Gauss. Све до XIX века нико није сумњао у то да су сви Еуклидови постулати апсолутне и постојане истине и да је еуклидска геометрија једини геометријски систем.

Да еуклидска геометрија није једини геометријски систем открио је јавности 1826. године руски математичар Лобачевски (17921856) изложивши на заседању Физичко-математичког факутета Универзитета у Казању свој рад „Кратко излагање основа геометрије са строгим доказом теорема о паралелним правама". Тај дан сматра се даном рођења новог геометријског система, тзв. нееуклидске геометрије.

Он је питање паралелних права решио на тај начин да је Еуклидов 5. постулат заменио новом аксиомом о паралелним правама која гласи:

Кроз тачку ван праве у равни пролазе две праве које су паралелне том правом.

На темељима ове аксиоме и осталих аксиома, Лобачевски изграђује нови геометријски систем који је он назвао имагинарном геометријом. Гаусс (1777-1856) је тој геометрији дао назив нееуклидска геометрија. Данас се она још назива геометрија Лобачевског или хиперболичка геометрија. Раван у којој је испуњен услов Лобачевског назива се раван Лобачевског или хиперболичка раван. Стварајући нову геометрију, Лобачевски је направио прекретницу у развоју геометрије и извео праву револуцију у математичком, па и у целокупном људском мишљењу. Од страних математичара нове идеје могли су у то време потпуно да схвате и цене само Gauss и Bolyai (1802-1860), јер су и сами дошли на помисао о постојању нееуклидске геометрије. Gauss је основне идеје нееуклидске геометрије имао разрађене већ 1824. године, али се зарекао да за живота неће допустити њихово објављивање, будући да „... *већина људи нема уопште прави осјећај за то, о чему се ту ради*". Bolyai је до својих резултата дошао 1825. године, али их је објавио тек 1832. године као додатак, „ Appendix", уџбенику елементарне и више математике свога оца Farkasa.

Peano. Аксиоматизација аритметике изграђена је доста касније од аксиоматизације геометрије. То је 1891. године учинио **Peano** (1858-1932). Пеанове аксиоме природних бројева се користе за дефиницију природног броја. Његов дедуктивни систем аритметике темељи се на три основна појма: природном броју, природном броју 1 и следбенику.

Природним бројевима називају се елементи сваког непразног скупа N у коме постоји релација *бити следбеник* која задовољава следеће аксиоме.

$(P1)$ 1 је природан број.

$(P2)$ Следбеник сваког природног броја је природан број.

$(P3)$ Никоја два природна броја немају истог следбеника.

$(P4)$ 1 није следбеник ниједног природног броја.

$(P5)$ Нека је M било који подскуп скупа природних бројева који има својство да му припада број 1 и следбеник сваког његовог елемента. Тада је $M = N$.

Ова својства природних бројева су једноставна и очигледна. Сва теорија природних бројева произилази из горњих пет аксиома. Посебну улогу има аксиома $(P5)$. Она је нешто сложенија и користи се за доказивање теорема и рекурзивно дефинисање функција са скупа $\mathbb{N}$ у неки непразни скуп. Данас се та аксиома назива аксиома математичке индукције.

Настава математике у нижим разредима основне школе је претежно индуктивна. Више се користе конкретни и очигледни докази, који не доказују толико, колико уверавају у истинитост тврђења. Дедукција и дедуктивни начин мишљења и доказивања спроводе се после конкретизације и индукције на вишим нивоима наставе математике и образовања ученика, где се дедукција обликује у посебан начин излагања математичких садржаја како у уџбеницима, тако и у наставном процесу. Међутим, иако је математика дедуктивна наука, школска математика не изграђује се ни у једном разреду као строг дедуктивни систем, већ остаје у оквирима модела. Ово поготово важи за наставу математике у основној школи. Многа тврђења се обрађују без доказа.

У школској математици аксиоме имају важну улогу у наставном процесу, али се употребљавају само онолико, колико је потребно да настава математике буде у складу са принципима науке и примерена узрасту и математичким способностима ученика.

Глава 2

Аналогија

„Главна средства помоћу којих се откривају истине у математици су индукција и аналогија."
Laplace

„Математичар је човек који зна да нађе аналогије међу тврђењима, бољи математичар је онај који проналази аналогије међу доказима, а најбољи математичар је онај који уочава аналогије теорија, но може се замислити и онај који међу аналогијама види аналогије."
Banach

Реч аналогија потиче од грчке речи *analogia* што значи склад, правилност, однос, подударност, сродност. Аналогија је врста сличности, али треба нагласити да није свака сличност аналогија. Осим сличности за аналогију је потребна и подударност објеката у одређеним односима.

Закључивање по аналогији је мисаони поступак при коме се из опажања да се два објекта подударају у одређеном броју својстава или односа изводи закључак да се они подударају и у другим својствима или односима који се код једног објекта нису уочили.

Схематски приказ: Објекат A има својства $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k$, док објекат B има својства $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$. Својства $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$ су аналогна својствима $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$. Закључујемо да објекат B има својство p_k.

Очигледно је да закључивање по аналогији није строго, јер из подударања објеката у неким својствима не мора да следи њихово подударање

дарање и у другим својствима, па нас такво закључивање може одвести и до сасвим нетачних закључака. Без обзира на то, аналогија је јако важно средство закључивања.

Оснивач ове методе је *Leonhard Euler*. Навешћемо три његове познате аналогије чије је проучавање најбољи начин да се млади математичари уведу у истраживачки рад.

1) **„Мала аналогија".** *Jacob Bernoulli* није могао да одреди врдност суме $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$, па је јавно поставио проблем. Проблем је привукао *Euler*-а и он га је решио преласком са коначног ка бесконачном. Увео је једначину бесконачног степена и на њу применио својства алгебарских једначина коначног степена и тако добио да је тражена сума $\frac{\pi^2}{6}$. Овај поступак није био исправан (строго математички), па је самим тим критикован од стране других математичара. Међутим, *Euler* је веровао у своје откриће (његове бројне провере указивале на тачност резултата), а онда је применом аналогије дошао до строгог доказа.

2) **„Велика аналогија".** Збир унутрашњих углова n-тоугла једнак је $(n-2)\pi$. Да ли важи нешто аналогно за полиедре? *Euler* проучава овај проблем у два своја научна рада. Покушаји са збиром диедара и збиром просторних углова не дају резултате. Као последњу могућност посматра збир свих углова $\sum\alpha$ страна, проверава тај збир на низу полиедара и за њега и број темена E полиедра поставља хипотезу $\sum\alpha = 2\pi E - 4\pi$. Са друге стране, доказује да код полиедра за $\sum\alpha$, број ивица K и број страна F важи једнакост $\sum\alpha = 2\pi(K - F)$. Последица ових једнакости је нова хипотеза која се данас назива Ојлерова формула и гласи

$$E - K + F = 2.$$

3) Године 1738. *Euler* решава једначине четвртог степена

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

аналогно *Viete*-овом начину решавања једначина трећег степена

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

2.1 Аналогија у настави математике

Наставник често током часа говори: слично се изводи, аналогно се добија, на исти начин се доказује, троуглови су подударни, ово је сличан задатак претходном, сада можемо поновити описани поступак, и сл. Таквим начином говора наставник указује ученицима на аналогију и она постаје важно средство повезивања и лакшег савладавања наставног градива, па самим тим и средство развијања стваралачког мишљења и креативности ученика. При решавању неког проблема ученици се усмеравају на разматрање неког блиског, сродног проблема и опонашање поступка решавања. У неким тежим случајевима може да укаже на смер којим треба да се настави решавање задатака. У геометрији се могу наћи многе аналогије. Прелаз из равни у простор, из планиметрије у стереометрију применом аналогије може да обогати знање ученика, често без великог труда. Постоје три смера примене аналогије: уочавањем аналогних објеката, откривањем аналогних својстава и спровођењем аналогних поступака.

А) АНАЛОГНИ ОБЈЕКТИ

Математика проучава велики број објеката који су према одређеној сродности и унутрашњој структури разврстани у скупове: бројеви, релације, функције, једначине, групе, полигони, полиедри, обртна тела, равни, детерминанте, матрице и др. Могу да се проучавају објекти из истог скупа или из различитих скупова који су врло сродни. Такви су на пример изоморфни објекти. Упознавање ученика са аналогијом може да почне откривањем аналогних објеката. Најједноставнији пример аналогних објеката су дуж и троугао. Аналогија не мора да буде једнозначна (неки објекат може да има више аналогана).

ПРИМЕР 2.1. *Ликови и тела.*

1° *Троугао и тетраедар. Троугао је најједноставнији полигон, одређен је најмањим бројем неколинеарних тачака у равни и омеђен са три дужи. Тетраедар је најједноставнији полиедар, одређен је најмањим бројем некомпланарних тачака у простору и омеђен је са четири троугла.*

2° *Једнакостранични троугао и правилан тетраедар.*

3° *Правоугаоник и квадар. Правоугаоник: наспрамне странице су паралелне, наспрамне странице су подударне, суседне странице су нормалне. Квадар: наспрамне стране су паралелне, наспрамне стране су подударне, суседне стране су нормалне.*

4° *Квадрат и коцка.*

5° *Паралелограм и паралелопипед.*

6° *Круг и лопта.*

7° *Кружница и сфера.*

ПРИМЕР 2.2. *Правоугли троугао можемо посматрати на три различита начина, па се самим тим разликују и његови просторни аналогани.*

1° *Ако посматрамо правоугли троугао као половину правоугаоника, његов аналоган ће бити половина квадра, тј. усправна тространа призма којој је основица правоугли троугао.*

2° *Ако посматрамо правоугли троугао као троугао коме су странице из једног темена нормалне, његов аналоган ће бити тетраедар коме су ивице из једног темена међусобно нормалне.*

3° *Ако посматрамо правоугли троугао као троугао чије две нормалне странице чине отворену изломљену линију, његов аналоган ће бити тетраедар чије три међусобно нормалне ивице чине отворену изломљену линију, тј. тетраедар омеђен правоуглим троугловима.*

Б) АНАЛОГНА СВОЈСТВА

Аналогија нам помаже да наслутимо какво би својство могао имати неки објекат ако његов једноставнији аналоган има одређено својство.

ПРИМЕР 2.3. *За правило* $(ab)^2 = a^2b^2$ *аналогије су* $(abc)^2 = a^2b^2c^2$, $(abcd)^2 = a^2b^2c^2d^2$, *јер је* $(abc)^2 = (ab)^2c^2 = a^2b^2c^2$, $(abcd)^2 = (abc)^2d^2 = a^2b^2c^2d^2$, *итд.*

ПРИМЕР 2.4. *Познато је да за решења x_1 и x_2 квадратне једначине*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

важе Виетове формуле

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Применом аналогије закључујемо да би за решења x_1, x_2 и x_3 кубне једначине $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ могле да важе Виетеове формуле

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

ПРИМЕР 2.5. *Троугао од свих многоуглова има највише својстава, али не треба очекивати да свако својство троугла има свој просторни аналоган. На то нам указује следећа аналогија:*

Праве којим припадају висине троугла секу се у једној тачки.

Праве којим припадају висине тетраедра секу се у једној тачки.

Друго тврђење добијено аналогијом није истинито за сваки тетраедар.

В) АНАЛОГНИ ПОСТУПЦИ

Често се у настави математике може уочити извесна сличност међу поступцима преношења и доказивања својстава. Навешћемо неке примере који указују колико је важна примена аналогије у наставном процесу. Наставно градиво се тако повезује, предавање поједностављује, одређено раније усвојено градиво се поново обнавља и утврђује, а ново градиво брже савладава.

ПРИМЕР 2.6. 1° *Докази тврђења да је свака тачка симетрале дужи подједнако удаљена од њених крајева и свака тачка симетрале угла подједнако удаљена од његових крака су аналогни.*

2° *Формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $h = \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$ за дужине висина једнакостраничног и једнакокраког троугла, $d = a\sqrt{2}$ и $d = \sqrt{a^2+b^2}$ за дужине дијагонала квадрата и правоугаоника, $d = a\sqrt{3}$ и $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ за дужине дијагонала коцке и квадра аналогно се изводе.*

3° *Начин извођења Виетеових формула за квадратну једначину може се пренети на извођење формула за кубну једначину.*

4° *Приликом обраде квадратне функције $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, обрада случаја $a < 0$ је аналогна обради случаја $a > 0$.*

5° *Прва једнакост $a \sin \beta = b \sin \alpha$ синусне теореме за троугао ABC изводи се помоћу висине из темена C и тригонометрије правоуглог троугла. Аналогно се изводи друга једнакост $b \sin \gamma = c \sin \beta$, а из добијених једнакости и цела теорема.*

Аналогија омогућава наставнику сталне измене наставних облика и метода у циљу постизања што бољих резултата при усвајању наставног градива.

Пример 2.7. *Решити систем једначина:* $(abc \neq 0)$

1)

$$\begin{aligned} y + z &= a, \\ x + z &= b, \\ x + y &= c; \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \frac{yz}{y+z} &= \frac{1}{a}, \\ \frac{xz}{x+z} &= \frac{1}{b}, \\ \frac{xy}{x+y} &= \frac{1}{c}; \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} x^2z^2 + x^2y^2 &= axyz, \\ y^2z^2 + y^2x^2 &= bxyz, \\ z^2y^2 + z^2x^2 &= cxyz. \end{aligned}$$

На први поглед постоји извесна сличност међу системима али се права сличност види тек при њиховом решавању. Први систем је линеаран и лако се решава док се решавање друга два брзо своди на решавање првог система.