Линеарне функционеле

Задатак 1. Нека су t_k фиксиране тачке сегмента $[a,b]$ и c_k произвољни реални бројеви за $k=1,\dots,n$, $n\in\mathbb{N}$. Доказати да је

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k x(t_k)$$

ограничена линеарна функционела на $\mathbb{C}[a,b]$ и израчунати $\|f\|$.
Решење. За произвољне $x,y\in\mathbb{C}[a,b]$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ важи

$$\begin{aligned}f(\alpha x+\beta y)&=\sum_{k=1}^{n}c_k\,(\alpha\,x+\beta\,y)(t_k)=\sum_{k=1}^{n}c_k\,(\alpha\,x(t_k)+\beta\,y(t_k))\\&=\alpha\sum_{k=1}^{n}c_k\,x(t_k)+\beta\sum_{k=1}^{n}c_k\,y(t_k)=\alpha f(x)+\beta f(y),\end{aligned}$$

па је f линеарна функционела на $\mathbb{C}[a,b]$.

Пошто је

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}c_k\,x(t_k)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|c_k|\,|x(t_k)|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\sum_{k=1}^{n}|c_k|=\|x\|\sum_{k=1}^{n}|c_k|,$$

то је $\|f\|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|c_k|$.

Нека је функција x_0 таква да је $x_0(t_k)=\operatorname{sgn}c_k$, $k=1,2,\dots,n$, на $[a,t_0]$ и $[t_n,b]$ узима константне вредности $\operatorname{sgn}c_0$ и $\operatorname{sgn}c_n$, респективно, а на сваком сегменту $[t_k,t_{k+1}]$ је линеарна. Лако се види да је функција x_0 непрекидна на сегменту $[a,b]$.

Како је $\|x_0\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_0(t)|=1$ и

$$|f(x_0)|=\left|\sum_{k=1}^{n}c_k\ \operatorname{sgn}c_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}|c_k|\right|=\sum_{k=1}^{n}|c_k|,$$

то је

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|\geqslant|f(x_0)|=\sum_{k=1}^{n}|c_k|.$$

Према томе, $\|f\|=\sum\limits_{k=1}^{n}|c_k|$. △

Задатак 2. Испитати да ли су следеће функционеле линеарне и ограничене у простору $\mathbb{C}[0,1]$ и ако јесу одредити њихове норме:

(а) $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)\sin t\,dt$;

(б) $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)e^{it}\,dt$;

(в) $f(x) = x'(t_0)$;

(г) $f(x) = \int\limits_0^1 t^{-1/3}\, x(t)\, dt$;

(д) $f(x) = \int\limits_0^1 \sqrt{t}\, x\left(t^2\right)\, dt$.

Решење. (а) Очигледно је посматрана функционела f линеарна и дефинисана на целом $\mathbb{C}[0,1]$. Како је

$$|f(t)| = \left|\int_0^1 x(t)\sin t\, dt\right| \leqslant \int_0^1 |x(t)||\sin t|\, dt \leqslant \|x\| \int_0^1 |\sin t|\, dt = \|x\|(1-\cos 1),$$

то је $\|f\| \leqslant 1 - \cos 1$.

За $x_0(t) = 1,\ t \in [0,1]$, имамо $\|x_0\| = 1$ и $f(x_0) = \int_0^1 \sin t\, dt = 1 - \cos 1$, одакле непосредно добијамо да је $\|f\| = 1 - \cos 1$.

(б) Функционела f је линеарна (доказати!) и важи[1]

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)e^{it}dt\right| \leqslant \int_0^1 |x(t)|\left|e^{it}\right| dt = \int_0^1 |x(t)|dt = \|x\|,$$

па је $\|f\| \leqslant 1$. Уочимо функцију $x_0(t) = e^{-it},\ t \in [0,1]$. Лако се добија $\|x_0\| = 1$ и $f(x_0) = 1$, а тиме и $\|f\| \geqslant 1$, па закључујемо да је $\|f\| = 1$.

(в) Оставља се студенту за самостални рад.

(г) Оставља се студенту за самостални рад.

(д) Лако се доказује да је дата функционела линеарна. Уводећи смену $u = t^2$ имамо

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\int_0^1 \sqrt{t}\, x\left(t^2\right) dt\right| = \left|\frac{1}{2}\int_0^1 u^{-1/4}\, x(u) du\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left|u^{-1/4}\right| |x(u)|\, du \leqslant \frac{1}{2}\, \|x\| \int_0^1 u^{-1/4} du = \frac{2}{3}\, \|x\|,\end{aligned}$$

одакле закључујемо $\|f\| \leqslant 2/3$.

За $x_0(t) = 1,\ t \in [0,1]$, имамо $\|x_0\| = 1$ и $f(x_0) = 2/3$, одакле непосредно добијамо да је $\|f\| = 2/3$. △

[1] $e^{it} = \cos t + i \sin t \Rightarrow \left|e^{it}\right| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$

Адјунговани оператори

Задатак 1. Ако су A и B унитарни оператори у Хилбертовом простору H, доказати да је AB такође унитаран оператор. Испитати за које вредности $\lambda \in \mathbb{K}$ је оператор λA унитаран.
Решење. Ако су A и B унитарни оператори тада $A, B \in L(H)$ и важи $AA^* = A^*A = I$ и $BB^* = B^*B = I$. Пошто је $AB \in L(H)$ дефинисан, постоји и оператор $(AB)^* = B^*A^* \in L(H)$. Како је

$$I = AA^* = AIA^* = ABB^*A^* = (AB)(B^*A^*) = (AB)(AB)^*$$

и

$$I = B^*B = B^*IB = B^*A^*AB = (AB)^*(AB),$$

имамо да је оператор AB унитаран.

Оператор λA, $\lambda \in \mathbb{K}$, је ограничен јер је $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$. Како је потребно да важи

$$(\lambda A)(\lambda A)^* = (\lambda A)^*(\lambda A) = I, \quad \text{тј.} \quad |\lambda|^2 AA^* = |\lambda|^2 A^*A = I,$$

то је $|\lambda|^2 = 1$, односно $|\lambda| = 1$.

Дакле, оператор λA је унитаран ако и само ако је $|\lambda| = 1$. △

Задатак 2. Ако су A и B самоадјунговани оператори у Хилбертовом простору H, доказати да су оператори $A + B$ и A^n, $n \in \mathbb{N}$, такође самоадјунговани оператори у простору H. Испитати у ком случају ће оператор AB бити самоадјунгован.
Решење. Како су A и B самоадјунговани оператори то је

$$(A + B)^* = A^* + B^* = A + B,$$

и

$$(A^n)^* = (A \cdots A)^* = A^* \cdots A^* = A \cdots A = A^n.$$

Одавде закључујемо да су и оператори $A + B$ и A^n такође самоадјунговани.

Како је $(AB)^* = B^*A^* = BA$, то је оператор AB самоадјунгован ако и само ако оператори A и B међусобно комутирају. △

Задатак 3. Доказати да за самоадјунгован оператор $A \neq \mathbf{0}$ у Хилбертовом простору H оператор λA је такође самоадјунгован ако и само ако је скалар λ реалан.
Решење. За произвољан скалар λ из $\mathbb{K}$ оператор λA је линеаран у простору H. Како је оператор $A \neq \mathbf{0}$ самоадјунгован, једнакост

$$(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* = \overline{\lambda} A = \lambda A$$

ће важити ако и само ако је $\lambda = \overline{\lambda}$. Дакле, λA је самоадјунгован оператор у простору H ако и само ако је λ реалан број. △

Задатак 4. Нека су H_1 и H_2 унитарни простори над истим пољем скалара $\mathbb{K}$. Доказати да је оператор $V : H_1 \to H_2$ изометричан ако и само ако важи $\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle$ за било који пар вектора $x, y \in H_1$.

Решење. Претпоставимо да за свако $x, y \in H_1$ важи $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle$. Специјално, ако је $x = y$ добијамо да је $\|Vx\|^2 = \|x\|^2$, тј. $\|Vx\| = \|x\|$. Дакле, V је изометричан оператор.

Обратно, претпоставимо да је $V : H_1 \to H_2$ произвољан изометричан оператор. Тада за свако $x, y \in H_1$ важи

$$\|Vx\| = \|x\|, \quad \|Vy\| = \|y\|, \quad \langle Vx + Vy, Vx + Vy\rangle = \langle x + y, x + y\rangle.$$

Како је

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2,$$

односно

$$(*) \qquad \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\ \mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2,$$

добијамо да је

$$\|Vx\|^2 + 2\ \mathrm{Re}\langle Vx, Vy\rangle + \|Vy\|^2 = \|x\|^2 + 2\ \mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Из последње једнакости закључујемо

$$(1) \qquad \mathrm{Re}\langle Vx, Vy\rangle = \ \mathrm{Re}\langle x, y\rangle, \quad x, y \in H_1.$$

За $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ добијамо да је $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle$, што је требало доказати. Ако је $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, тада у $(*)$ ставимо ix уместо x и добијамо

$$(2) \qquad \mathrm{Im}\langle Vx, Vy\rangle = \ \mathrm{Im}\langle x, y\rangle, \quad x, y \in H_1.$$

Из (1) и (2) закључујемо да је $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle$, $x, y \in H_1$. △

Задатак 5. Доказати да је ограничен линеаран оператор V у Хилбертовом простору H изометричан ако и само ако важи једнакост $V^*V = I$.
Решење. Претпоставимо да је V изометричан оператор. На основу задатка 4 имамо да је

$$(1) \qquad \langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle, \quad x, y \in H,$$

па је

$$(2) \qquad \langle x, V^*(Vy)\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad x, y \in H,$$

одакле следи $V^*(Vy) = y$, $y \in H$, тј. $V^*V = I$.

Ако претпоставимо да је $V^*V = I$, непосредно добијамо (2), а из (2) добијамо (1), па на основу задатка 4, имамо да је V изометричан оператор. △
Задатак 6. Нека је A произвољан ограничен линеарни оператор у Хилбертовом простору H. Доказати да важи $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$.
Решење. Како је $\mathcal{N}(A) = \{x \,|\, Ax = 0\}$ и $\mathcal{R}(A)^\perp = \{y \,|\, \langle Ax, y\rangle = 0\}$, то $y \in \mathcal{R}(A)^\perp$ ако и само ако је $\langle Ax, y\rangle = 0$ за свако $x \in H$. Једнакост $\langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle = 0$, $x \in H$, важи ако и само ако је $A^*y = 0$, тј. $y \in \mathcal{N}(A^*)$. Дакле, $y \in \mathcal{R}(A)^\perp$ ако и само ако $y \in \mathcal{N}(A^*)$, па је $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$. △