Мера. Спољна мера

Задатак 1. Нека је X произвољан скуп, (a_n) низ елемената из X, а (α_n) низ такав да је $\alpha_n \geqslant 0$ или $\alpha_n = +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је са $\mu(A) = \sum\limits_{a_n \in A} \alpha_n$ дефинисана мера на $\mathbb{P}(X)$.

Решење. Потребно је доказати да је овако дефинисана функција μ ненегативна, σ-адитивна и да је $\mu(\varnothing) = 0$.

(i) Очигледно је $\mu(\varnothing) = \sum\limits_{a_n \in \varnothing} \alpha_n = 0$.

(ii) За сваки скуп $A \in \mathbb{P}(X)$ очигледно важи $\mu(A) = \sum\limits_{a_n \in A} \alpha_n \geqslant 0$.

(iii) Нека је $A = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. Тада је

$$\mu(A) = \sum_{a_n \in A} \alpha_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{a_n \in A_k} \alpha_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

На основу (i), (ii) и (iii) закључујемо да је μ мера на $\mathbb{P}(X)$. $\triangle$

Задатак 2. Нека је X бесконачан непребројив скуп и нека је

$$\mathcal{P} = \{E \subseteq X \mid \operatorname{card}(E) \leqslant \aleph_0 \veebar \operatorname{card}(X \setminus E) \leqslant \aleph_0\}.$$

На $\mathcal{P}$ је задата функција μ на следећи начин:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \operatorname{card}(E) \leqslant \aleph_0, \\ 1, & \operatorname{card}(X \setminus E) \leqslant \aleph_0. \end{cases}$$

Доказати да је μ мера на $\mathcal{P}$.

Решење. На основу дефиниције функције μ је $\mu(\varnothing) = 0$ и $\mu(E) \geqslant 0$ за сваки скуп $E \in \mathcal{P}$.

Докажимо још да је функција μ σ-адитивна. Нека је $E_n \in \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$. Тада $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{P}$.

Претпоставимо најпре да је $\operatorname{card}(E_n) \leqslant \aleph_0$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је $\mu(E_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Како је пребројива унија пребројивих скупова пребројив скуп, то је $\operatorname{card}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leqslant \aleph_0$, односно, $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 0$. Како је и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$, важи $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n)$.

Ако постоји неки природан број n_0 такав да је $\operatorname{card}(X \setminus E_{n_0}) \leqslant \aleph_0$, тада је број n_0 јединствен, јер за свако друго $n \in \mathbb{N}$ важи $E_n \cap E_{n_0} = \varnothing$, па из $E_n \subseteq X \setminus E_{n_0}$, следи да је $\operatorname{card}(E_n) \leqslant \aleph_0$ за свако $n \neq n_0$. Како је $X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} X \setminus E_n \subseteq X \setminus E_{n_0}$, то је $\operatorname{card}\left(X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leqslant \aleph_0$, па је $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 1$. С друге стране,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = \mu(E_{n_0}) + \sum_{n \neq n_0} \mu(E_n) = 1 + \sum_{n \neq n_0} 0 = 1,$$

па и у овом случају важи $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n)$.

Дакле, дата функција μ јесте мера на $\mathcal{P}$. $\triangle$

ЗАДАТАК 3. Ако је $A \subseteq \mathbb{R}^k$, тада је $m(A) = 0$ ако и само ако је $m^*(A) = 0$. Доказати.
РЕШЕЊЕ. Ако је $m(A) = 0$, тада на основу дефиниције мере имамо $m(A) = m^*(A) = 0$. Остаје да покажемо да из $m^*(A) = 0$ следи $m(A) = 0$. Докажимо да је A m^*-мерљив, тј. да важи

$$(*) \qquad m^*(B) \geqslant m^*(A \cap B) + m^*\left(A \cap B^C\right), \quad \text{за свако } B \subseteq \mathbb{R}^k.$$

Како је $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B^C \subseteq A$, а m^* монотона функција, следи

$$0 \leqslant m^*(A \cap B) \leqslant m^*(A) = 0 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant m^*\left(A \cap B^C\right) \leqslant m^*(A) = 0,$$

па закључујемо да је $m^*(A \cap B) = m^*\left(A \cap B^C\right) = 0$, тј. $(*)$ постаје $m^*(B) \geqslant 0$, $B \subseteq \mathbb{R}^k$, што увек важи. Дакле, A јесте m^*-мерлив, па следи и да је $m(A) = m^*(A) = 0$. $\triangle$

ЗАДАТАК 4. Доказати да је Канторов скуп F мере нула.
РЕШЕЊЕ. Уочимо скуп $F' = [0,1] \setminus F$. Скуп F' је пребројива унуја дисјунктних интервала: 1 дужине $1/3$ $\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$, 2 дужине $1/3^2$ $\left(\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \text{ и } \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]\right)$, ..., 2^{n-1} дужине $1/3^n$, итд. Према томе, скуп F' је мерљив и

$$\begin{aligned} m(F') &= \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 4 \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1. \end{aligned}$$

Како је $F \cap F' = \varnothing$ и $F \cup F' = [0,1]$, следи

$$m(F) = m([0,1]) - m(F') = 1 - 1 = 0.$$

$\triangle$

НАПОМЕНА. Канторов скуп је пример непребројивог скупа мере нула.

ЗАДАТАК 5. Нека је скуп $A \subseteq \mathbb{R}^2$ добијен тако што је из квадрата $[0,1] \times [0,1]$ прво избачен квадрат $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, а затим су из преосталих 8 квадрата избачени централни отворени квадрати странице $1/9$, и овај процес настављен у бесконачност. Одредити меру скупа A.
РЕШЕЊЕ. Оставаља се студенту за самостални рад. $\triangle$

ЗАДАТАК 6. Елементи скупа $A \subseteq \mathbb{R}$ су сви бројеви из интервала $[0,1]$ у чијем децималном запису учествује цифра 3. Наћи меру скупа A.
РЕШЕЊЕ. Нека је A_1 скуп свих бројева интервала $[0,1]$ код којих је прва децимала 3, тј. $A_1 = [0.3, 0.4)$, A_2 скуп свих бројева интервала $[0,1]$ код којих је друга децимала 3 и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, тј. $A_2 = [0.03, 0.04) \cup [0.13, 0.14) \cup [0.23, 0.24) \cup [0.43, 0.44) \cup \cdots \cup [0.93, 0.94)$, A_3 скуп свих бројева интервала $[0,1]$ код којих је трећа децимала 3 и $A_3 \cap A_1 = A_3 \cap A_2 = \varnothing$, итд., A_n, $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$, скуп свих бројева код којих је $n-$та децимала једнака 3 и A_n је дисјунктан са свим A_k,

$k = 1, \ldots, n-1$. Тада је $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, дакле, пребројива унија дисјунктних интервала, па је мерљив скуп. Како је

$$m(A_1) = \frac{1}{10},\ m(A_2) = 9 \cdot \frac{1}{10^2},\ \ldots,\ m(A_n) = 9^{n-1} \cdot \frac{1}{10^n},\ \ldots,$$

следи

$$m(A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 9^{n-1} \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 1.$$

△

Задатак 7. Нека су A и B мерљиви подскупови сегмента $[0,1]$ такви да је $m(A) + m(B) > 1$. Доказати да је тада $m(A \cap B) > 0$.
Решење. На основу особина мере и чињенице да је $A \cap B = \mathbf{C}(\mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B)$ (комплемент се узима у односу на интервал $[0,1]$) важи

$$\begin{aligned} m(A \cap B) &= m(\mathbf{C}(\mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B)) = 1 - m(\mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B) \\ &\geqslant 1 - (m(\mathbf{C}A) + m(\mathbf{C}B)) = 1 - (1 - m(A) + 1 - m(B)) \\ &= m(A) + m(B) - 1. \end{aligned}$$

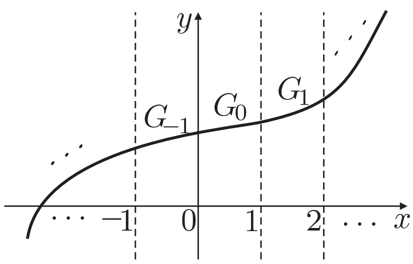
Како је $m(A) + m(B) > 1$, следи да је $m(A \cap B) > 0$. △

Задатак 8. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Израчунати меру скупа $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$.
Решење. Скуп G је затворен у $\mathbb{R}^2$, па је стога мерљив. Можемо га представити као унију својих коначних подскупова, тј. $G = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_n$, при чему је $G_n = G \cap ([n, n+1] \times \mathbb{R})$ (слика 1).

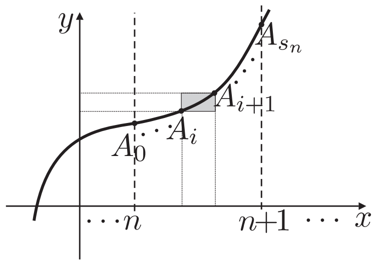
Пошто је функција f непрекидна на $\mathbb{R}$, непрекидна је и на сваком затвореном интервалу $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$, одакле следи да је на сваком од тих интервала униформно непрекидна, тј.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x_1, x_2 \in [n, n+1])\ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји коначан покривач компактног скупа $[n, n+1]$, чији су елементи дијаметра мањег од $\delta(\varepsilon)$, па можемо уочити коначно много тачака $A_i(x_i, f(x_i)) \in G_n$, $i = 0, 1, \ldots, s_n$, таквих да за све $i = 0, 1, \ldots, s_n - 1$ важи $|f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \varepsilon$ (слика 2).



Слика 1.



Слика 2.

Нека је $B_i = G \cap ([x_i, x_{i+1}] \times \mathbb{R}])$, $i = 0, 1, \ldots, s_n - 1$. Тада је $m(B_i) < \varepsilon(x_{i+1} - x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, s_n - 1$. Како је $G_n = \bigcup_{i=0}^{s_n - 1} B_i$ добијамо да је

$$m(G_n) = \sum_{i=0}^{s_n-1} m(B_i) < \varepsilon \sum_{i=0}^{s_n-1} (x_{i+1} - x_i) = \varepsilon(n + 1 - n) = \varepsilon.$$

Дакле, за свако $\varepsilon > 0$ и свако $n \in \mathbb{Z}$ важи $m(G_n) < \varepsilon$, па закључујемо да је $m(G_n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

Према томе, $m(G) = m\left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(G_n) = 0.$ $\triangle$

Мерљиве функције

Задатак 1. Ако су f и g мерљиве функције на скупу E доказати да су скупови $E(f < g) = \{x \in E \mid f(x) < g(x)\}$, $E(f \leqslant g)$, $E(f > g)$, $E(f \geqslant g)$ и $E(f = g)$ мерљиви.
Решење. За свако $x \in E$ за које важи $f(x) < g(x)$ постоји $q \in \mathbb{Q}$ такав да је $f(x) < q < g(x)$. Из мерљивости функција f и g следи да су скупови $E(f < q)$ и $E(q < g)$ мерљиви, а како је

$$E(f < g) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (E(f < q) \cap E(g > q))$$

следи да је $E(f < g)$ мерљив скуп.

Аналогно се доказује да је $E(f > g)$ мерљив скуп, док мерљивост остала три скупа следи из чињеница да је

$$\begin{aligned} &E(f \leqslant g) = E \setminus E(f > g), \quad E(f \geqslant g) = E \setminus E(f < g), \\ &E(f = g) = E(f \leqslant g) \cap E(f \geqslant g). \end{aligned}$$

△

Задатак 2. Ако је функција f^3 мерљива на скупу E, доказати да је тада и функција f мерљива на E.
Решење. Ако је функција f^3 је мерљива, тада је за свако $c \in \mathbb{R}$ скуп $\{x \in E \mid (f(x))^3 > c\}$ мерљив. Обратно, како је

$$\{x \in E \mid (f(x))^3 > c\} = \{x \in E \mid f(x) > \sqrt[3]{c}\},$$

следи да је функција f мерљива. △

Задатак 3. Показати да ако је f^2 мерљива функција, функција f не мора бити мерљива.
Решење. Навешћемо пример функције која није мерљива, док њен квадрат јесте мерљива функција. Нека је A неки немерљив подскуп од $\mathbb{R}$. Дефинишимо функцију f са

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ -1, & x \in \mathbf{C}A. \end{cases}$$

Како је $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} = A$ немерљив скуп, следи да f није мерљива функција, док је $(f(x))^2 = 1$ за свако $x \in \mathbb{R}$, па је функција f^2 очигледно мерљива. △