ФУНКЦИОНАЛНА АНАЛИЗА - ПРИМЕРИ ЗА ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ

1. 1) Дефинисати прстен и σ - прстен.

   2) Заокружити тачно и образложити!

   а) $(\forall A, B)\, A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{P},\ A \cap B \in \mathcal{P}$.

   б) $(\forall A, B)\, A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{P},\ A \triangle B \in \mathcal{P}$.

   в) $(\forall A, B)\, A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P},\ A \setminus B \in \mathcal{P}$.

2. а) Навести дефиниције колекција $\mathcal{M}(m)$, $\mathcal{M}_k(m)$ и њихов однос са $\mathbb{P}(\mathbb{R}^k)$ и $\mathcal{E}$.

   б) Дефинисати Лебегову меру.

3. Заокружити тачно и сваки одговор образложити зашто је тачан, односно нетачан!

   а) Оператор A је самоадјунгован оператор у Хилбертовом простору H ако и само ако је λA самоадјунгован за свако λ.

   б) Ако су A, B самоадјунговани оператори у Хилбертовом простору H, тада је и $A + B$ самоадјунгован оператор.

   в) Ако су A, B самоадјунговани оператори у Хилбертовом простору H, тада је и A^n самоадјунгован оператор.

   г) Ако су A, B унитарни оператори у Хилбертовом простору H, тада је и AB унитаран оператор.

   д) Оператор A је унитаран оператор у Хилбертовом простору H ако и само ако је λA унитаран за свако λ.

4. Нека је на простору непрекидних функција на сегменту $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ дефинисан оператор A са $(Ax)(t) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi(t-s)x(s)ds$. Показати да је A линеаран и ограничен и наћи му норму.

5. Скуп A је добијен тако што је из коцке $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ прво избачена коцка $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, а затим су из преосталих 26 коцки избачене централне отворене коцке странице $\frac{1}{9}$ и овај процес настављен у бесконачност. Одредити меру скупа A.

6. Показати да је функционела $f : \ell_1 \to \mathbb{R}$, која је дата са $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + x_{n+1}$, $x = (x_n) \in \ell_1$, добро дефинисана, линеарна и непрекидна и одредити јој норму.

7. Заокружити тачно, а нетачно образложити!

   а) Ограничен линеаран оператор A на произвољном Хилбертовом простору $\mathcal{H}$ је унитаран ако и само ако је $A^* = A^{-1}$.

б) Ограничен линеаран оператор A на произвољном Хилбертовом простору $\mathcal{H}$ је унитаран ако и само ако је изометричан.

в) Ограничен линеаран оператор A на произвољном Хилбертовом простору $\mathcal{H}$ је самоадјунгован ако и само ако је $A^{**} = A$.

г) Са $f(x) = x'(t_0)$, $t_0 \in [0,1]$, $x \in \mathbb{C}[0,1]$ је добро дефинисана неограничена линеарна функционела на простору непрекидних функција на $[0,1]$.

8. Допунити.

Ако је A линеарни оператор, тада важи

$$\|A\| = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

9. а) Доказати да је свака непрекидна функција мерљива.

   б) Доказати да је свака растућа функција мерљива.

10. Одредити Лебегову меру датих скупова:

   а) $m(\{11, -8, 0\}) =$

   б) $m((-2,2) \cap \mathbb{Q}) =$

   в) $m((45, 201)) =$

   ($\mathbb{Q}$ је скуп рационалних бројева)